

奥数 题库



澳大利亚数学能力检测 试题解析与评注

(适用于初中)

[澳] W. J. 阿特金斯 P. J. 泰勒 M. G. 克拉珀 编著
朱华伟 孙文先 编译



科学出版社

奥数题库



澳大利亚数学能力检测 试题解析与评注

中学中级卷

2006—2013

〔澳〕W. J. 阿特金斯 P. J. 泰勒 M. G. 克拉珀 编著
朱华伟 孙文先 编译

科学出版社
北京

内 容 简 介

本书收录了 2006—2013 年澳大利亚数学能力检测试题中学中级卷的全部试题,对每一道试题均给出详解,有些题目还给出了多种解法与评注,目的是使读者加深对问题的理解与开拓思路,培养举一反三的能力。

本书可供初中数学资优生、准备参加初中数学竞赛及中考的学生、中学数学教师、数学爱好者、高等师范院校数学教育专业师生、研究生及数学教师参考。

图书在版编目(CIP)数据

澳大利亚数学能力检测试题解析与评注. 中学中级卷: 2006—2013 / (澳)阿特金斯(Atkins, W. J.), (澳)泰勒(Taylor, P. J.), (澳)克拉珀(Clapper, M. G.) 编著; 朱华伟, 孙文先编译. —北京: 科学出版社, 2014.3

(奥数题库)

ISBN 978-7-03-040272-1

I. ①澳… II. ①阿…②泰…③克…④朱…⑤孙… III. ①中学数学课—初中—题解 IV. ①G634.605

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2014) 第 050520 号

责任编辑: 李 敏 周 杰 / 责任校对: 鲁 素
责任印制: 赵德静 / 封面设计: 黄华斌

科学出版社出版

北京东黄城根北街 16 号

邮政编码: 100717

<http://www.sciencep.com>

中国科学院印刷厂印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2014 年 4 月第 一 版 开本: 720 × 1000 1/16

2014 年 4 月第一次印刷 印张: 12 3/4

字数: 250 000

定价: 54.00 元

(如有印装质量问题, 我社负责调换)

张景中谈奥数

华伟教授认为，竞赛数学是教育数学的一部分。这个看法是言之成理的。数学要解题，要发现问题、创造方法。年复一年进行的数学竞赛活动，不断地为数学问题的宝库注入新鲜血液，常常把学术形态的数学成果转化为可能用于教学的形态。早期的国际数学奥林匹克试题，有不少进入了数学教材，成为例题和习题。竞赛数学与教育数学的关系，于此可见一斑。

写到这里，忍不住要为数学竞赛说几句话。有一阵子，媒体上面出现不少讨伐数学竞赛的声音，有的教育专家甚至认为数学竞赛之害甚于黄、赌、毒。我看了有关报道后第一个想法是，中国现在值得反对的事情不少，论轻重缓急还远远轮不到反对数学竞赛吧。再仔细读这些反对数学竞赛的意见，可以看出来，他们反对的实际上是某些为牟利而又误人子弟的数学竞赛培训。就数学竞赛本身而言，是面向青少年中很小一部分数学爱好者而组织的活动。这些热心参与数学竞赛的数学爱好者(还有不少数学爱好者参与其他活动，例如青少年创新发明活动、数学建模活动、近年来设立的丘成桐中学数学奖)，估计不超过约两亿中小学生的百分之五。从一方面讲，数学竞赛培训活动过热产生的消极影响，和升学考试体制以及教育资源分配过分集中等多种因素有关，这笔账不能算在数学竞赛头上；从另一方面看，大学招生和数学竞赛挂钩，也正说明了数学竞赛活动的成功因而得到认可。

对于青少年的课外兴趣活动，积极的对策不应当是限制堵塞，而是开源分流。发展多种课外活动，让更多的青少年各得其所，把各种活动都办得像数学竞赛这样成功并且被认可，数学竞赛培训活动过热的问题自然就化解或缓解了。

摘自《走进教育数学》丛书总序

前 言

澳大利亚数学竞赛 (Australian Mathematics Competition) 于 1978 年开始正式举办, 在此之前曾在澳大利亚一些地区进行小规模试验性的竞赛. 目前它是世界上规模最大的数学竞赛之一, 每年都吸引几十万名学生参赛, 其中部分参赛者是来自邻近国家和地区, 人数较多者包括新加坡、新西兰、马来西亚、中国台湾、中国香港与菲律宾, 成绩表现优异的国家还包括中国、印度尼西亚、泰国、印度与保加利亚, 在澳大利亚几乎所有的学校都参加此竞赛.

澳大利亚数学竞赛中学试题依难易分为中学初级卷 (适用于小学六年级、初中一年级)、中学中级卷 (适用于初中二、三年级)、中学高级卷 (适用于高中) 三种. 每套试题共有 30 题, 第 1—25 题是有五个选择项的单项选择题, 第 26—30 题则深具挑战性, 其答案设计为 000~999 的正整数. 答题时间 75 分钟, 不得使用任何辅助计算器具.

试题的难度是经过精心分级的, 前面的一些试题, 通常与课堂上数学基本技能高度相关, 我们假定所有的学生应该有能力答对这些题目. 从第 11 题以后, 试题难度逐渐加深, 特别是最后五题, 则是非常具有挑战性的.

命题委员会的组成包括来自澳大利亚与世界各地的专家, 他们全心投入拟订试题与审查试题的工作, 以确保试题的质量, 并控制试题所涉及的知识并未超出中学生的能力所及. 特别具有难度的试

题，考生必须熟悉如何运用课堂知识与细心尝试各种可能性，才能够求出答案。

澳大利亚数学信托基金会（Australian Mathematics Trust）出版了一系列有关澳大利亚数学竞赛中学试题的解析，但因为是根据试题所属数学知识之分支编排，将中学初级卷、中级卷、高级卷的试题都融合在一起，知识面跨度较大，对于中学低年级学生阅读产生一定的困难。于是我们改变了编排的形式，本书收录 2006 年至 2013 年澳大利亚数学竞赛中学中级卷的全部试题，我们将英文版原试题与中文翻译版试题并列，以方便学生顺便了解数学语句与词汇的英文说法。对于每一道试题我们均给出了详细解答，有些题目还给出了多种解法与评注，目的是使读者加深对问题的理解与开拓思路，从中得到有益的启发。本书英文版的所有打字编排工作由命题委员会主席 Warren Atkins 与澳大利亚数学信托基金会执行董事 Peter Taylor 亲自操办，书中运用许多生动的图案与表格来体现一些概念，让学生易于了解，非常适合喜爱数学的中学生自修。

在本书编译与撰写评注过程中，我们参阅了许多中外文文献资料，在此向原作者表示衷心的感谢。财团法人台北市九章数学教育基金会研究员李政霖、广州大学附属中学曹路路老师对本书的编写提供了很大的帮助，在此向他们表示真诚的感谢。对于本书存在的问题，诚挚希望读者不吝赐教。

2013 年 11 月于广州大学城

目 录

张景中谈奥数

前言

第 1 章 2006–2013 年英文试题、中文试题	1
1.1 2006 年中学中级卷英文试题	1
1.2 2006 年中学中级卷中文试题	6
1.3 2007 年中学中级卷英文试题	10
1.4 2007 年中学中级卷中文试题	16
1.5 2008 年中学中级卷英文试题	21
1.6 2008 年中学中级卷中文试题	26
1.7 2009 年中学中级卷英文试题	30
1.8 2009 年中学中级卷中文试题	37
1.9 2010 年中学中级卷英文试题	43
1.10 2010 年中学中级卷中文试题	48
1.11 2011 年中学中级卷英文试题	53
1.12 2011 年中学中级卷中文试题	59
1.13 2012 年中学中级卷英文试题	65
1.14 2012 年中学中级卷中文试题	70
1.15 2013 年中学中级卷英文试题	76
1.16 2013 年中学中级卷中文试题	81
第 2 章 2006–2013 年试题简答	87
2.1 2006 年中学中级卷试题简答	87
2.2 2007 年中学中级卷试题简答	87
2.3 2008 年中学中级卷试题简答	88

2.4	2009 年中学中级卷试题简答	88
2.5	2010 年中学中级卷试题简答	89
2.6	2011 年中学中级卷试题简答	89
2.7	2012 年中学中级卷试题简答	90
2.8	2013 年中学中级卷试题简答	90
第 3 章	2006—2013 年试题解析与评注	91
3.1	2006 年中学中级卷试题解析与评注	91
3.2	2007 年中学中级卷试题解析与评注	100
3.3	2008 年中学中级卷试题解析与评注	112
3.4	2009 年中学中级卷试题解析与评注	122
3.5	2010 年中学中级卷试题解析与评注	133
3.6	2011 年中学中级卷试题解析与评注	153
3.7	2012 年中学中级卷试题解析与评注	170
3.8	2013 年中学中级卷试题解析与评注	182

第 1 章 2006—2013 年英文试题、中文试题

1.1 2006 年中学中级卷英文试题

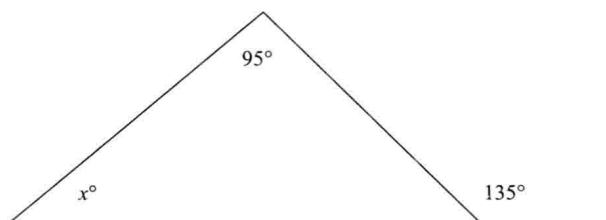
Australian Mathematics Competition 2006 Intermediate Division Competition Paper

Questions 1 to 10, 3 marks each

1. $92.2 - 85.3$ equals

- (A) 6.1 (B) 6.9 (C) 7.1 (D) 7.5 (E) 7.9

2. In the diagram, the value of x is

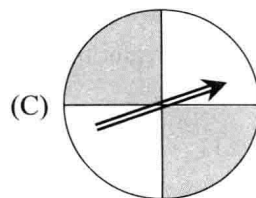
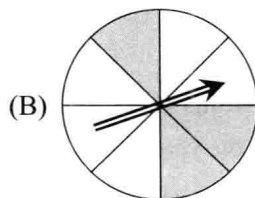
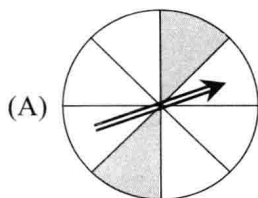


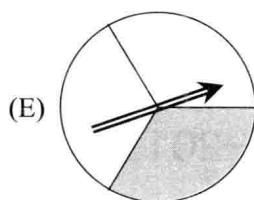
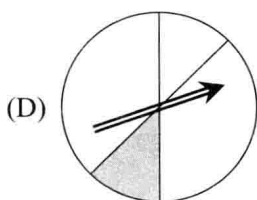
- (A) 35 (B) 40 (C) 45 (D) 50 (E) 55

3. If $a = 2b - 5$, then b equals

- (A) $\frac{a}{2}$ (B) $\frac{a}{2} + 5$ (C) $\frac{a - 5}{2}$ (D) $\frac{a + 5}{2}$ (E) $2a + 5$

4. Which of the spinners below would give a one-in-four chance of the arrow landing in the shaded region?





5. The area, in square centimetres, of one face of a cube whose volume is 64 cm^3 is

- (A) 8 (B) 16 (C) 24 (D) 32 (E) 64

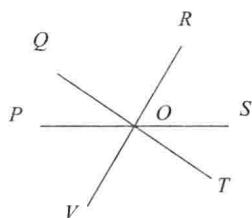
6. The average of five numbers is 4. Four of them are 1, 2, 3 and 4. What is the other?

- (A) 6 (B) 7 (C) 8 (D) 9 (E) 10

7. $\frac{1}{4}\%$ expressed as a decimal is

- (A) 0.235 (B) 0.14 (C) 0.025 (D) 0.014 (E) 0.0025

8. In the diagram, $\angle POR = 120^\circ$ and $\angle QOS = 145^\circ$. The size of $\angle TOV$ is



- (A) 45° (B) 60° (C) 85°
(D) 90° (E) 95°

9. The page numbers of a book are consecutive whole numbers. If you begin reading at the top of page x and stop reading at the bottom of page y , the number of pages you have read is

- (A) $x - y$ (B) $y - x$ (C) $x + y$
(D) $y - x + 1$ (E) $y - x - 1$

10. Jim notices the odometer of his car reads 062319 km where all the digits are different. The shortest distance, in kilometres, he will travel before the digits are all different again is

- (A) less than 10 (B) between 10 and 20
(C) between 20 and 30 (D) between 30 and 40
(E) greater than 40

Questions 11 to 20, 4 marks each

11. The middle date of the year in 2006 is

- (A) 29th June (B) 30th June (C) 1st July

- (D) 2nd July (E) 3rd July

12. Each of the vertices of a square $PQRS$ is given a number. For each of the sides of the square the sum of the numbers at its endpoints is calculated. If for PQ this sum is 3, for QR it is 7 and for RS it is 12, what is the sum for PS ?

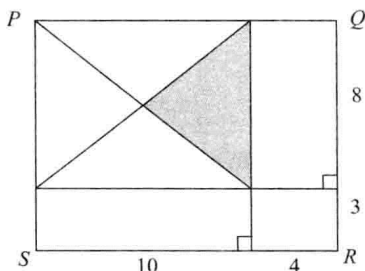
- (A) 2 (B) 7 (C) 8 (D) 16 (E) 22

13. In the sequence of numbers $\dots, q, r, s, t, 0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, \dots$, each number is the sum of its two preceeding numbers. What is the value of q ?

- (A) -3 (B) -1 (C) 0 (D) 1 (E) 3

14. What fraction of the rectangle $PQRS$ in the diagram is shaded?

- (A) $\frac{1}{16}$ (B) $\frac{3}{5}$ (C) $\frac{1}{8}$
(D) $\frac{1}{10}$ (E) $\frac{10}{77}$



15. A train travelling at constant speed takes a quarter of a minute to pass a signpost and takes three-quarters of a minute to pass completely through a tunnel which is 600 m in length. The speed of the train, in kilometres per hour, is

- (A) 50 (B) 56 (C) 64 (D) 72 (E) 80

16. In the multiplication

$$\begin{array}{r} P \ 7 \ * \ * \\ \times \qquad \qquad \qquad 6 \\ \hline * \ 2 \ * \ 8 \ 4 \end{array}$$

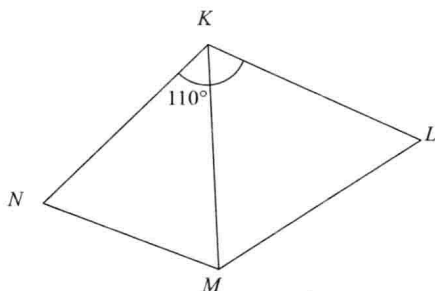
P and $*$ stand for digits. P could be

- (A) 7 (B) 6 (C) 5 (D) 9 (E) 8

17. How many different pairs of 2-digit numbers multiply to give a 3-digit number with all digits the same?

- (A) 5 (B) 6 (C) 7 (D) 8 (E) 9

18. In the quadrilateral $KLMN$, $KM=KL=KN$. If $\angle NKL=110^\circ$, then the size of $\angle LMN$ is



- (A) 70° (B) 115° (C) 125° (D) 140° (E) 145°

19. Define the operation $\oplus$ as $a \oplus b = \frac{b}{a} - 1$. The value of $(3 \oplus 4) \oplus (1 \oplus 2)$ is

- (A) 0 (B) 2 (C) $\frac{1}{2}$ (D) $\frac{3}{4}$ (E) 5

20. I have 450 grams of salt and flour mix. How many grams of flour should I add to reduce the percentage of salt in the mixture to 90% of what it was?

- (A) 50 (B) 10 (C) 30 (D) 45 (E) 60

Questions 21 to 30, 5 marks each

21. How many positive integers less than 72 have the property that the highest common factor of the number and 72 is equal to 1?

- (A) 12 (B) 30 (C) 36 (D) 18 (E) 24

R	W	B
B	R	W
W	B	R

22. The nine squares of a 3×3 grid painted on a wall are to be coloured red, white and blue so that no row or column contains squares of the same colour. One such pattern is shown in the diagram. How many different patterns can be made?

- (A) 15 (B) 6 (C) 9
(D) 12 (E) 24

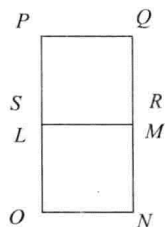
23. Five bales of hay are weighed two at a time in all possible combinations. The weights, in kilograms, are:

110, 112, 113, 114, 115, 116, 117, 118, 120 and 121.

What is the weight, in kilograms, of the heaviest bale?

- (A) 58 (B) 59 (C) 60 (D) 61 (E) 62

24. The squares $PQRS$ and $LMNO$ have equal sides of 1 m and are initially placed so that the side SR touches LM as shown.



The square $PQRS$ is rotated about R until Q coincides with N . The square is then rotated about Q until P coincides with O . It is then rotated about P until S coincides with L and then finally rotated about S until R coincides with M and the square is now back to its original position. The length, in metres, of the path traced out by the point P in these rotations is

- (A) $\pi(2 + \sqrt{2})$ (B) 4π (C) $2\pi(2 + \sqrt{2})$
 (D) 2π (E) $\pi(3 + \sqrt{2})$

25. The vertices of a cube are each labelled with one of the integers $1, 2, 3, \dots, 8$. A face-sum is the sum of the labels of the four vertices on a face of the cube. What is the maximum number of equal face-sums in any of these labellings?

- (A) 2 (B) 3 (C) 4 (D) 5 (E) 6

For questions 26 to 30, shade the answer as a whole number from 000 to 999 in the space provided on the answer sheet.

26. If $(1+3+5+\dots+p) + (1+3+5+\dots+q) = (1+3+5+\dots+25)$, what is the value of $p+q$?

27. Each of the students in a class writes a different 2-digit number on the whiteboard. The teacher claims that no matter what the students write, there will be at least three numbers on the whiteboard whose digits have the same sum. What is the smallest number of students in the class for the teacher to be correct?

28. In a quadrilateral $PQRS$, X is a point on QR and Y is point on PS . One circle touches all four sides of the quadrilateral $PQXY$, and another circle touches all four sides of $XRSY$. If $PQ=10$ cm, $QR=20$ cm, $RS=14$ cm and $PS=26$ cm, what is the length, in centimetres, of XY ?

29. In a regular polygon there are two diagonals such that the angle between them is 50° . What is the smallest number of sides of the polygon for which this is possible?

30. The sum of n positive integers is 19. What is the maximum possible product of these n numbers?

1.2 2006年中学中级卷中文试题

2006 年澳大利亚数学能力检测中学中级卷

1—10 题，每题 3 分

1. 算式 $92.2 - 85.3$ 等于

- (A) 6.1 (B) 6.9 (C) 7.1 (D) 7.5 (E) 7.9

2. 图 1-1 中， x 之值等于

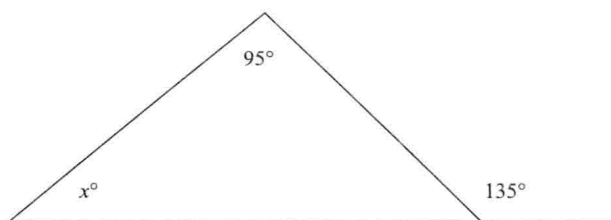


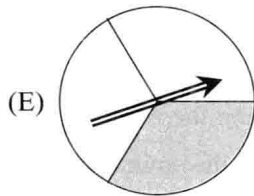
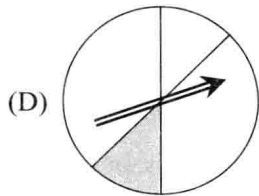
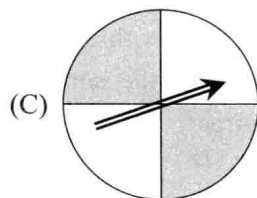
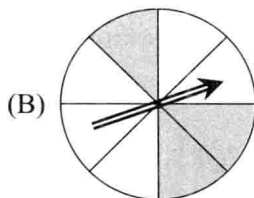
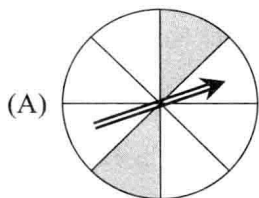
图 1-1

- (A) 35 (B) 40 (C) 45 (D) 50 (E) 55

3. 若 $a = 2b - 5$ ，则 b 等于

- (A) $\frac{a}{2}$ (B) $\frac{a}{2} + 5$ (C) $\frac{a - 5}{2}$ (D) $\frac{a + 5}{2}$ (E) $2a + 5$

4. 请问下列哪一个转轮可使箭头有四分之一的机会落在阴影部分？



5. 有一个体积为 64 cm^3 的正立方体，请问它每个面的面积为多少平方厘米？

- (A) 8 (B) 16 (C) 24 (D) 32 (E) 64

6. 有五个数的平均是 4, 其中四个数为 1、2、3 及 4. 请问还有一个数是什么?

- (A) 6 (B) 7 (C) 8 (D) 9 (E) 10

7. 请问 $\frac{1}{4}\%$ 可用小数表示为什么?

- (A) 0.235 (B) 0.14 (C) 0.025 (D) 0.014 (E) 0.0025

8. 在图 1-2 中, 已知 $\angle POR = 120^\circ$ 且 $\angle QOS = 145^\circ$, 请问 $\angle TOV$ 等于什么?

- (A) 45° (B) 60° (C) 85°
(D) 90° (E) 95°

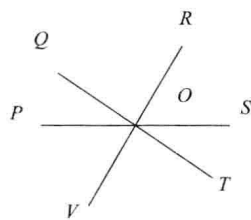


图 1-2

9. 书本的页数为连续的正整数. 已知您从第 x 页第一行开始阅读, 直到第 y 页最后一行为止, 请问您共阅读了多少页?

- (A) $x - y$ (B) $y - x$ (C) $x + y$
(D) $y - x + 1$ (E) $y - x - 1$

10. 小吉发现他的汽车里程表上的计数为 062319 km, 这个计数的每一位数码都互不相同. 请问这辆汽车最少还要再行驶多少千米, 才能再使里程表上计数的每一位数码都互不相同?

- (A) 少于 10 (B) 介于 10 与 20 之间
(C) 介于 20 与 30 之间 (D) 介于 30 与 40 之间
(E) 超过 40

11—20 题, 每题 4 分

11. 在公元 2006 年, 请问哪一天是最中间的一天?

- (A) 6 月 29 日 (B) 6 月 30 日 (C) 7 月 1 日
(D) 7 月 2 日 (E) 7 月 3 日

12. 在正方形 $PQRS$ 的每个顶点上填写一个数, 把此正方形每条边的两端点上的数加起来, 将总和写在这条边上. 已知 PQ 上的数是 3, QR 上的数是 7, RS 上的数 12, 请问 PS 上的数是什么?

- (A) 2 (B) 7 (C) 8 (D) 16 (E) 22

13. 在数列 $\dots, q, r, s, t, 0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, \dots$ 中, 每一项都是其前两项之和. 请问 q 之值是什么?

- (A) -3 (B) -1 (C) 0 (D) 1 (E) 3

14. 图 1-3 中, 请问矩形 $PQRS$ 的几分之几被涂上阴影?

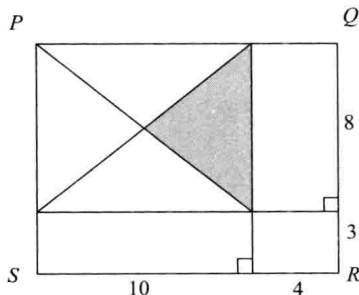


图 1-3

- (A) $\frac{1}{16}$ (B) $\frac{3}{5}$ (C) $\frac{1}{8}$ (D) $\frac{1}{10}$ (E) $\frac{10}{77}$

15. 一列火车以匀速行驶, 这列火车通过一个信号灯耗时四分之一分钟, 它从进入一座 600 m 长的隧道开始到完全离开为止耗时四分之三分钟. 请问这列火车的时速为多少千米每小时?

- (A) 50 (B) 56 (C) 64 (D) 72 (E) 80

16. 在下乘式中,

$$\begin{array}{r} P \ 7 \ * \ * \\ \times \qquad \qquad \qquad 6 \\ \hline * \ 2 \ * \ 8 \ 4 \end{array}$$

其中 * 代表任何数码 (不必相同), 而 P 代表某个数码, 请问下列哪一项可能是 P 之值?

- (A) 7 (B) 6 (C) 5 (D) 9 (E) 8

17. 将两个两位数相乘, 得到一个每位数码都相同的三位数, 请问这样的两位数共有多少对?

- (A) 5 (B) 6 (C) 7
(D) 8 (E) 9

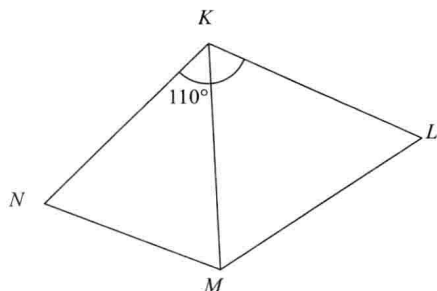


图 1-4

18. 在四边形 $KLMN$ 中, $KM=KL=KN$, $\angle NKL=110^\circ$, 如图 1-4 所示. 请问 $\angle LMN$ 等于什么?

- (A) 70° (B) 115° (C) 125°
(D) 140° (E) 145°