



金榜图书

JINBANG BOOKS · SINCE 1997

2015

李永乐·王式安唯一考研数学系列

全国十二大考研辅导机构指定用书

# 分阶习题 同步训练

数学三

主编 ◎ 李永乐 王式安 季文铎

编委 ◎ 王式安 刘喜波 李永乐 季文铎 武忠祥 胡金德 蔡燧林

本习题集将每章习题，按难度分为三类  
分别是基础单项训练、基础综合训练和思维拓展训练

赠送

ISBN 978-7-5150-1054-0



9 787515 010540 >

定价：58.00元

书

1997

2015

李永乐·王式安唯一考研数学系列  
全国十二大考研辅导机构指定用书

# 分阶习题

# 同步训练

数学三

主 编 ◎ 李永乐 王式安 季文铎

编 委 ◎ 王式安 刘喜波 李永乐 季文铎 武忠祥 胡金德 蔡燧林

国家行政学院出版社

# 说 明

本习题集将每章习题,按难度分为三类,分别是基础单项训练、基础综合训练和思维拓展训练。题型包括选择题、填空题和解答题。选择题均为单项选择题,只有一个最适合的选项。解答题要求写出解题步骤、过程和必要的说明。

## 基础单项训练

此类题难度较低,属于菜鸟级。题目内容都是所在章节的基本概念、定理和方法的简单重现。为熟悉所学内容而进行的必要练习。

## 基础综合训练

所在章节的综合练习题,题目涉及的知识点不再是单个的概念,具有一定的综合性,条件设置较隐蔽,需要进行一定探索研究才能得到结果。增加练习的效果。

## 思维拓展训练

此类题目具有难度和综合性,目的是使学生的数学知识转化成思维模式上来。让学生随着练习逐步深化、拓展知识结构。这类题,结合前后章节的知识,具有开放性,解题方法不统一,变换一些条件就会转化成新的题目。需要学生积极思考,能从不同方法中寻求解题最佳方法。

尽管我们为以上所有的习题都配了答案,但希望同学不要被所提供的答案束缚,积极思考,尽量通过自己的思考得出答案。顺便提一下,如果你被菜鸟题虐的很惨。请记住,不是你不够聪明,而是老师出的题太刁钻。

# 目录

## 第一篇 微积分

第一章 函数 极限 连续 .....	(1)
基础单项训练 .....	(1)
基础综合训练 .....	(2)
思维拓展训练 .....	(5)
第二章 一元函数微分学 .....	(7)
基础单项训练 .....	(7)
基础综合训练 .....	(10)
思维拓展训练 .....	(13)
第三章 一元函数积分学 .....	(15)
基础单项训练 .....	(15)
基础综合训练 .....	(17)
思维拓展训练 .....	(20)
第四章 多元函数微积分学 .....	(22)
基础单项训练 .....	(22)
基础综合训练 .....	(24)
思维拓展训练 .....	(27)
第五章 无穷级数 .....	(29)
基础单项训练 .....	(29)
基础综合训练 .....	(31)
思维拓展训练 .....	(33)
第六章 常微分方程与差分方程 .....	(34)
基础单项训练 .....	(34)
基础综合训练 .....	(36)
思维拓展训练 .....	(38)

## 第二篇 线性代数

第一章 行列式 .....	(40)
基础单项训练 .....	(40)
基础综合训练 .....	(40)
思维拓展训练 .....	(41)
第二章 矩阵 .....	(42)
基础单项训练 .....	(42)
基础综合训练 .....	(42)
思维拓展训练 .....	(43)
第三章 向量 .....	(45)
基础单项训练 .....	(45)
基础综合训练 .....	(46)
思维拓展训练 .....	(48)
第四章 线性方程组 .....	(49)
基础单项训练 .....	(49)
基础综合训练 .....	(50)
思维拓展训练 .....	(52)
第五章 特征值、特征向量、相似矩阵 .....	(53)
基础单项训练 .....	(53)
基础综合训练 .....	(54)
思维拓展训练 .....	(56)
第六章 二次型 .....	(57)
基础单项训练 .....	(57)
基础综合训练 .....	(58)

思维拓展训练 ..... (60)

### 第三篇 概率论与数理统计

第一章 随机事件与概率 ..... (61)

基础单项训练 ..... (61)

基础综合训练 ..... (62)

思维拓展训练 ..... (63)

第二章 随机变量及其概率分布 ..... (65)

基础单项训练 ..... (65)

基础综合训练 ..... (66)

思维拓展训练 ..... (67)

第三章 多维随机变量及其分布 ..... (69)

基础单项训练 ..... (69)

基础综合训练 ..... (70)

思维拓展训练 ..... (72)

第四章 随机变量的数字特征 ..... (73)

基础单项训练 ..... (73)

基础综合训练 ..... (74)

思维拓展训练 ..... (75)

第五章 大数定律和中心极限定理 ..... (77)

基础单项训练 ..... (77)

基础综合训练 ..... (78)

第六章 数理统计的基本概念 ..... (79)

基础单项训练 ..... (79)

基础综合训练 ..... (79)

思维拓展训练 ..... (81)

第七章 参数估计 ..... (82)

基础单项训练 ..... (82)

基础综合训练 ..... (83)

思维拓展训练 ..... (84)

### 习题参考答案与解析

第一篇 微积分 ..... (85)

第一章 函数 极限 连续 ..... (85)

基础单项训练 ..... (85)

基础综合训练 ..... (87)

思维拓展训练 ..... (92)

第二章 一元函数微分学 ..... (96)

基础单项训练 ..... (96)

基础综合训练 ..... (100)

思维拓展训练 ..... (106)

第三章 一元函数积分学 ..... (110)

基础单项训练 ..... (110)

基础综合训练 ..... (114)

思维拓展训练 ..... (118)

第四章 多元函数微积分学 ..... (120)

基础单项训练 ..... (120)

基础综合训练 ..... (123)

思维拓展训练 ..... (130)

第五章 无穷级数 ..... (133)

基础单项训练 ..... (133)

基础综合训练 ..... (136)

思维拓展训练 ..... (141)

第六章 常微分方程与差分方程 ..... (143)

基础单项训练 ..... (143)

基础综合训练 ..... (146)

思维拓展训练 ..... (149)

第二篇 线性代数 ..... (153)

第一章 行列式 ..... (153)

基础单项训练 ..... (153)

基础综合训练 ..... (153)

思维拓展训练 ..... (154)

第二章 矩阵 ..... (155)

基础单项训练 ..... (155)

基础综合训练 ..... (155)

思维拓展训练 ..... (157)

第三章 向量 ..... (158)

基础单项训练 ..... (158)

基础综合训练 .....	(158)
思维拓展训练 .....	(159)
<b>第四章 线性方程组 .....</b>	<b>(161)</b>
基础单项训练 .....	(161)
基础综合训练 .....	(161)
思维拓展训练 .....	(161)
<b>第五章 特征值、特征向量、相似矩阵 .....</b>	<b>(163)</b>
基础单项训练 .....	(163)
基础综合训练 .....	(164)
思维拓展训练 .....	(165)
<b>第六章 二次型 .....</b>	<b>(167)</b>
基础单项训练 .....	(167)
基础综合训练 .....	(168)
思维拓展训练 .....	(169)
<b>第三篇 概率论与数理统计 .....</b>	<b>(170)</b>
<b>第一章 随机事件与概率 .....</b>	<b>(170)</b>
基础单项训练 .....	(170)
基础综合训练 .....	(172)
思维拓展训练 .....	(173)
<b>第二章 随机变量及其概率分布 .....</b>	<b>(175)</b>
基础单项训练 .....	(175)

基础综合训练 .....	(176)
思维拓展训练 .....	(178)
<b>第三章 多维随机变量及其分布 .....</b>	<b>(180)</b>
基础单项训练 .....	(180)
基础综合训练 .....	(182)
思维拓展训练 .....	(185)
<b>第四章 随机变量的数字特征 .....</b>	<b>(187)</b>
基础单项训练 .....	(187)
基础综合训练 .....	(189)
思维拓展训练 .....	(191)
<b>第五章 大数定律和中心极限定理 .....</b>	<b>(193)</b>
基础单项训练 .....	(193)
基础综合训练 .....	(194)
<b>第六章 数理统计的基本概念 .....</b>	<b>(195)</b>
基础单项训练 .....	(195)
基础综合训练 .....	(196)
思维拓展训练 .....	(197)
<b>第七章 参数估计 .....</b>	<b>(199)</b>
基础单项训练 .....	(199)
基础综合训练 .....	(200)
思维拓展训练 .....	(201)

# 第一篇 微积分

## 第一章 函数 极限 连续

### 基础单项训练

难度：★☆☆

通关称号：菜鸟

1. 设  $f(x)$  的连续区间为  $[0, 1]$ , 则  $f[\ln(x+1)]$  的连续区间为  
 (A)  $[0, 1]$ . (B)  $[0, e-1]$ . (C)  $[1, e]$ . (D)  $[e^{-1}, e]$ .
2. 设  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)(1+2x)(1+3x)+a}{x} = 6$ , 则  $a =$   
 (A) 1. (B) -2. (C) -1. (D) 2.
3. 设  $f(x) = \int_0^{\sin x} \sin(t^2) dt$ ,  $g(x) = x^3 + x^4$ , 则当  $x \rightarrow 0$  时,  $f(x)$  是  $g(x)$  的  
 (A) 等价无穷小. (B) 同阶但非等价的无穷小.  
 (C) 高阶无穷小. (D) 低阶无穷小.
4. 设  $f(x)$  和  $g(x)$  在  $(-\infty, +\infty)$  内可导, 且  $f(x) < g(x)$ , 则必有  
 (A)  $f(-x) > g(-x)$ . (B)  $f'(x) < g'(x)$ .  
 (C)  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) < \lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$ . (D)  $\int_0^x f(t) dt < \int_0^x g(t) dt$ .
5. 设函数  $f(x) = \frac{\ln|x|}{|x-1|} \sin x$ , 则  $f(x)$  有  
 (A) 1 个可去间断点, 1 个跳跃间断点.  
 (B) 1 个可去间断点, 1 个无穷间断点.  
 (C) 2 个跳跃间断点.  
 (D) 2 个无穷间断点.
6. 设  $f(x), g(x)$  定义在  $(-1, 1)$  上, 且都在  $x=0$  处连续, 若  $f(x) = \begin{cases} \frac{g(x)}{x}, & x \neq 0 \\ 2, & x = 0 \end{cases}$ , 则  
 (A)  $g(0) = 0$  且  $g'(0) = 0$ . (B)  $g(0) = 0$  且  $g'(0) = 1$ .  
 (C)  $g(0) = 0$  且  $g'(0) = 2$ . (D)  $g(0) = 1$  且  $g'(0) = 0$ .
7. 设  $f(x) = \begin{cases} x, & |x| \leq 1, \\ x^2, & 1 < |x| \leq 4, \end{cases}$  且  $g(x) = f(x^2) + f(x+3)$ , 则  $g(x)$  的定义域为 \_\_\_\_\_.
8. 设  $f(x) = \begin{cases} x^2, & x \leq 0 \\ -x^3, & x > 0 \end{cases}$  的反函数是  $g(x)$ , 则  $g(4) =$  \_\_\_\_\_.
9. 已知当  $x \rightarrow 0$  时,  $(1+ax^2)^{\frac{1}{3}} - 1$  与  $\cos x - 1$  是等价无穷小, 则常数  $a =$  \_\_\_\_\_.
10. 已知  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + \frac{f(x)}{\sin 2x})}{3^x - 1} = 5$ , 则  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x^2} =$  \_\_\_\_\_.
11. 若  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + ax + b}{1-x} = 5$ , 则  $a =$  \_\_\_\_\_,  $b =$  \_\_\_\_\_.
12. 求  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x) + \ln(1-x)}{1 - \cos x + \sin^2 x}$ .

13. 求极限  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln \cos(x-1)}{1 - \sin \frac{\pi}{2}x}$ .

14. 求极限  $\lim_{x \rightarrow 0} [\frac{a}{x} - (\frac{1}{x^2} - a^2) \ln(1+ax)] (a \neq 0)$ .

15. 计算  $\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{x + e^{tx}}{1 + e^{tx}}$ .

### 基础综合训练

难度：★★☆

通关称号：小达人

1. 当  $x \rightarrow 0$  时, 下列无穷小量中阶数最高的是

(A)  $\sqrt{1+x^2} - \sqrt{1-x^2}$ .

(B)  $3x^3 - 4x^4 + 5x^5$ .

(C)  $e^{x^2} - \cos x$ .

(D)  $\int_0^{1-\cos x} \frac{\sin t^2}{t} dt$ .

2. 设  $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2x^n - 3x^{-n}}{x^n + x^{-n}} \sin \frac{1}{x}$ , 则  $f(x)$  有

(A) 两个第一类间断点.

(B) 三个第一类间断点.

(C) 两个第一类间断点和一个第二类间断点.

(D) 一个第一类间断点和一个第二类间断点.

3. 若  $a > 0, b > 0$  均为常数, 则  $\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{a^x + b^x}{2} \right)^{\frac{1}{x}} =$  \_\_\_\_\_.

4.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\sin x^2} \int_{\frac{x}{2}}^x \frac{e^t - 1}{t} dt =$  \_\_\_\_\_.

5. 设函数  $f(x) = \begin{cases} \frac{\ln(1+ax^3)}{x - \arcsin x}, & x < 0, \\ 6, & x = 0, \\ \frac{e^{ax} + x^2 - ax - 1}{x \sin \frac{x}{4}}, & x > 0, \end{cases}$

则  $a =$  \_\_\_\_\_ 时,  $f(x)$  在  $x = 0$  处连续;  $a =$  \_\_\_\_\_ 时,  $x = 0$  是  $f(x)$  的可去间断点?

6. 求  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x^2} - \sqrt[3]{1+2\sin^2 x}}{\tan^2 x}$



7. 求  $\lim_{x \rightarrow 0} (3e^{\frac{x}{x-1}} - 2)^{\frac{1}{x}}$ .

8. 求极限  $\lim_{x \rightarrow \infty} x^3 \ln \frac{x+1}{x-1} - 2x^2$ .

9. 求  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sin(\pi \sqrt{n^2 + 1})$

10. 求函数  $f(x) = \begin{cases} \frac{x(\pi + 2x)}{2\cos x}, & x \leq 0 \\ \sin \frac{1}{x^2 - 1}, & x > 0 \end{cases}$  的间断点.

11. 求极限  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^{\sin^2 x} \ln(1+t) dt}{\sqrt{1+x^4} - 1}$ .

12. 求极限  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^x - (\sin x)^x}{x^2 \arctan x}$ .

13. 求极限  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(xe^{2x}) - \cos(xe^{-2x})}{x^3}$ .

14. 求极限  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^{2x} |t-x| \sin t dt}{|x|^3}$ .

15. 设  $f(x)$  是满足  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{1 - \cos x} = -1$  的连续函数, 且当  $x \rightarrow 0$  时,  $\int_0^x f(t) dt$  是与  $x^n$  同阶的无穷小量, 求正整数  $n$ .

16. 求极限  $\lim_{x \rightarrow 1^-} (1-x)^3 \sum_{n=1}^{\infty} n^2 x^n$ .

17. 设  $f(1) = 0, f'(1) = a$ , 求极限  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+2f(e^{x^2})} - \sqrt{1+f(1+\sin^2 x)}}{\ln \cos x}$ .

18. 设  $g(x)$  在  $x=0$  的某邻域内连续, 且  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{g(x)-1}{x} = a$ ,

$$\text{已知 } f(x) = \begin{cases} \frac{\int_0^1 g(x^2 t) dt - 1}{x^2}, & x < 0, \\ \frac{1}{2}, & x = 0, \\ \frac{a + b \cos x}{x^2}, & x > 0 \end{cases} \text{ 在 } x=0 \text{ 处连续, 求 } a, b.$$

## 思维拓展训练

难度: ★★★★★

通关称号: 小牛人

1. 设  $[u]$  表示不超过  $u$  的最大整数  $f(x) = \begin{cases} \frac{[2x]}{x}, & x \neq 0 \\ 1, & x = 0 \end{cases}$ , 判别  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$  是否存在. 并问  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$  是否存在?

2. 已知曲线  $y = f(x)$  在  $x=1$  处的切线方程为  $y = x - 1$ , 求:  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2 \ln \cos x} \int_0^{x^2} e^t f(1 + e^{t^2} - e^t) dt$ .

3. 设  $f(x)$  在  $x=a$  的某邻域内可导, 且  $f(a) \neq 0, a \neq 0$ , 求极限  $\lim_{x \rightarrow a} \left[ \frac{1}{(x-a)f(a)} - \frac{1}{\int_a^x f(t) dt} + \frac{1}{2x-a} \right]$ .

4. 设  $1 \leq x < +\infty$  时,  $0 < f'(x) < \frac{1}{x^2}$ , 且  $f'(x)$  连续, 证明  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(n)$  存在.

5. 设  $f(x)$  具有连续的二阶导数, 且  $\lim_{x \rightarrow 0} \left[ 1 + x + \frac{f(x)}{x} \right]^{\frac{1}{x}} = e^3$ . 求  $\lim_{x \rightarrow 0} \left[ 1 + \frac{f(x)}{x} \right]^{\frac{1}{x}}$ .

6. 设  $f(x)$  在  $x=0$  的某邻域内二阶可导, 且  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = 0, f''(0) \neq 0, \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\int_0^x f(t) dt}{x^\alpha - \sin x} = \beta (\beta \neq 0)$ , 求  $\alpha, \beta$  (其中  $\beta \neq 0$ ).

7. 设  $f(x)$  在  $(-a, a)$  内连续, 在  $x=0$  处可导, 且  $f'(0) \neq 0$ .

(1) 求证: 对任给的  $0 < x < a$ , 存在  $0 < \theta < 1$ , 使  $\int_0^x f(t) dt + \int_0^{-x} f(t) dt = x[f(\theta x) - f(-\theta x)]$ .

(2) 求  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \theta$ .

## 第二章 一元函数微分学

## 基础单项训练

难度: ★☆

通关称号: 菜鸟

1. 设函数  $f(x) = (x-1)(x+2)(x-3)(x+4)\cdots(x+100)$ , 则  $f'(1) =$  \_\_\_\_\_.
2. 设函数  $f(x)$  在点  $x=0$  可导, 且  $f(0) = 0$ , 则  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(1-\cos x)}{\tan^2 x} =$  \_\_\_\_\_.
3. 设  $f(x)$  有一阶连续导数, 且  $f(0) = 0, f'(0) = 1$ , 则  $\lim_{x \rightarrow 0} [1 + f(x)]^{\frac{1}{\ln(1+x)}} =$  \_\_\_\_\_.
4. 函数  $y = x^2 - \ln x^2$  的单调递减区间是 \_\_\_\_\_.
5. 已知  $f(x) = x^3 + ax^2 + bx$  在  $x = -1$  处取得极小值  $-2$ , 则  $a =$  \_\_\_\_\_,  $b =$  \_\_\_\_\_.
6. 曲线  $y = \frac{x^2}{2x+1}$  的斜渐近线方程为 \_\_\_\_\_.
7. 过原点作曲线  $y = \ln x$  的切线, 该切线方程是 \_\_\_\_\_.
8. 函数  $y = |\pi^2 - x^2| \sin^2 x$  的不可导点个数为  
(A) 0. (B) 1. (C) 2. (D) 3.
9. 若  $f(x) = -f(-x)$ , 在  $(0, +\infty)$  内  $f'(x) > 0, f''(x) > 0$ , 则在  $(-\infty, 0)$  内  
(A)  $f'(x) < 0, f''(x) < 0$ . (B)  $f'(x) < 0, f''(x) > 0$ .  
(C)  $f'(x) > 0, f''(x) < 0$ . (D)  $f'(x) > 0, f''(x) > 0$ .
10. 奇函数  $f(x)$  在闭区间  $[-1, 1]$  上可导, 且  $|f'(x)| \leq M$  ( $M$  为正常数), 则必有  
(A)  $|f(x)| \geq M$ . (B)  $|f(x)| > M$ .  
(C)  $|f(x)| \leq M$ . (D)  $|f(x)| < M$ .
11. 设  $f(x)$  在  $x=0$  的某邻域内有连续的四阶导数, 且当  $x \neq 0$  时,  $f(x) \neq 0$ , 同时  
$$F(x) = \begin{cases} \frac{\tan x - \sin x}{f(x)}, & x \neq 0, \\ 1, & x = 0 \end{cases}$$
 在  $x=0$  处连续, 则必有  
(A)  $f'(0) = 1$ . (B)  $f''(0) = 2$ .  
(C)  $f'''(0) = 3$ . (D)  $f^{(4)}(0) = 4$ .
12. 曲线  $y = \frac{1 + e^{-x^2}}{1 - e^{-x^2}}$   
(A) 没有渐近线. (B) 仅有水平渐近线.  
(C) 仅有铅直渐近线. (D) 既有水平渐近线又有铅直渐近线.
13. 设  $f(x), g(x)$  具有任意阶导数, 且满足  $f''(x) + f'(x)g(x) + f(x)x = e^x - 1, f(0) = 1, f'(0) = 0$ . 则  
(A)  $f(0) = 1$  为  $f(x)$  的极小值. (B)  $f(0) = 1$  为  $f(x)$  的极大值.  
(C)  $(0, f(0))$  为曲线  $y = f(x)$  的拐点. (D) 由  $g(x)$  才能确定  $f(x)$  的极值和拐点.
14. 设  $F(x) = \int_0^x t f(x-t) dt, f(x)$  为连续函数, 且  $f(0) = 0, f'(x) > 0$ , 则  $y = F(x)$  在  $(0, +\infty)$  内是  
(A) 递增且为凹弧. (B) 递增且为凸弧.  
(C) 递减且为凹弧. (D) 递减且为凸弧.
15. 已知  $f(x)$  在  $[a, b]$  上二阶可导, 且  $f'(x) \neq 0$ , 问在下列哪个条件下, 能保证至少存在一个  $\xi \in (a, b)$ , 使  $f''(\xi) + f(\xi) = 0$ .  
(A)  $f'(a)f(b) = f'(b)f(a)$ . (B)  $f'(a)f(a) = f'(b)f(b)$ .  
(C)  $f'^2(a) + f^2(b) = f'^2(b) + f^2(a)$ . (D)  $f'^2(a) - f^2(b) = f'^2(b) - f^2(a)$ .

16. 设  $f(x) = \begin{cases} \frac{1 - \sqrt{1-x}}{x}, & x < 0 \\ a + bx, & x \geq 0 \end{cases}$  (1) 求  $a$  的值使  $f(x)$  处处连续; (2) 再求  $b$  的值使  $f(x)$  处处可导.

17. 设  $f(x)$  就具有二阶导数, 且  $f(a) = 0$ ,  $g(x) = \begin{cases} \frac{f(x)}{x-a}, & x \neq a, \\ f'(a), & x = a, \end{cases}$  求  $g'(x)$ , 并证明  $g(x)$  的一阶导数在  $x = a$  点处连续.

18. 设函数  $f(x)$  在点  $x = 0$  可导且  $f(0) = 1$ , 又设  $f(x)$  满足函数方程  $f(x+1) = 2f(x)$ , 求  $f'(n)$ , 其中  $n$  是整数.

19. 求证: 设函数  $f(x), g(x)$  在点  $x = a$  可导,  $f(a) = g(a) = 0$  且存在  $\delta > 0$ , 使得当  $0 < |x - a| < \delta$  时, 有  $|f(x)| \geq |g(x)|$ , 则  $|f'(a)| \geq |g'(a)|$ .

20. 设  $f(x)$  具有二阶连续导数,  $f(0) = 0, f'(0) = 0, f''(x) > 0$ . 在曲线  $y = f(x)$  上任意一点  $(x, f(x)) (x \neq 0)$  处作此曲线的切线, 此切线在  $x$  轴上的截距记为  $u$ , 求  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{xf(u)}{uf(x)}$ .

21. 求  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} \int_0^x |\sin t| dt$ .

22. 设函数  $f(x)$  在闭区间  $[0, 1]$  上可微, 对于  $[0, 1]$  上的每一个  $x$ , 函数  $f(x)$  的值都在开区间  $(0, 1)$  内, 且  $f'(x) \neq 1$ , 证明在  $(0, 1)$  内有且仅有一个  $x$ , 使得  $f(x) = x$ .

23. 设在  $[0, +\infty)$  上函数  $f(x)$  有连续导数, 且  $f'(x) \geq k > 0, f(0) < 0$ , 证明:  $f(x)$  在  $(0, +\infty)$  内有且仅有一个零点.

24. 设  $f(x)$  在  $[a, b]$  上连续, 在  $(a, b)$  内可导, 且  $f(a) \cdot f(b) > 0, f(a) \cdot f(\frac{a+b}{2}) < 0$ . 试证: 对任意实数  $k$ , 存在  $\xi \in (a, b)$ , 使得  $f'(\xi) = kf(\xi)$ .

25. 设  $f(x)$  在闭区间  $[0, c]$  上连续, 其导数  $f'(x)$  在开区间  $(0, c)$  内存在且单调减少,  $f(0) = 0$ , 试应用拉格朗日中值定理证明不等式  $f(a+b) \leq f(a) + f(b)$ , 其中  $a, b$  满足条件  $0 \leq a \leq b \leq a+b \leq c$ .

26. 设  $y = y(x)$  由方程  $2x - \int_1^{x+y} e^{-t^2} dt = xy$  确定, 求  $y'(0)$ .

27. 曲线  $y = k(x^2 - 3)^2$  在拐点处的法线通过原点, 求  $k$  的值.

28. 设  $(1, -1)$  是曲线  $y = x^3 + ax^2 + bx + c$  的拐点, 且  $y$  在  $x = 0$  处取极大值. 求  $a, b, c$ .

## 基础综合训练

难度：★★☆

通关称号：小达人

1. 设  $y = f\left(\frac{2x-1}{x+1}\right)$ ,  $f'(x) = \ln x^{\frac{1}{3}}$ , 则  $\frac{dy}{dx} =$  \_\_\_\_\_.
2. 设  $f(x)$  为单调二阶可导函数, 其反函数为  $g(x)$ , 且已知  $f(1) = 2$ ,  $f'(1) = -\frac{1}{\sqrt{3}}$ ,  $f''(1) = 1$ , 则  $g''(2) =$  \_\_\_\_\_.
3. 当  $x =$  \_\_\_\_\_ 时, 函数  $y = x \cdot 2^x$  取得极小值.
4. 若  $x \rightarrow 0$  时,  $F(x) = \int_0^x (x^2 - t^2)f'(t)dt$  的导数与  $x^2$  为等价无穷小, 则  $f'(0)$  等于  
(A) 0.                      (B) 1.                      (C) -1.                      (D)  $\frac{1}{2}$ .
5. 设  $y = f(x)$ , 满足关系式  $y'' - 2y' + 4y = 0$ , 且  $f(x_0) > 0$ ,  $f'(x_0) = 0$  则  $f(x)$  在  $x_0$  点处  
(A) 取得极大值.                      (B) 取得极小值.  
(C) 在  $x_0$  点某邻域内单调增加.                      (D) 在  $x_0$  点某邻域内单调减少.
6. 设  $f(x) = (x-a)^n \varphi(x)$ , 其中  $\varphi(x)$  在点  $a$  的某邻域内具有  $n-1$  阶导数, 求  $f^{(n)}(a)$ .

7. 证明: 设函数  $f(x), g(x)$  二次可导, 满足方程  $f(x)g(x) = 1$ . 又  $f'(x) \neq 0, g'(x) \neq 0$ . 则

$$\frac{f''(x)}{f'(x)} - \frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{g''(x)}{g'(x)} - \frac{g'(x)}{g(x)}.$$

8. 设不恒为常数的函数  $f(x)$  在闭区间  $[a, b]$  上连续, 在开区间  $(a, b)$  内可导, 且  $f(a) = f(b)$ . 证明: 在  $(a, b)$  内至少存在一点  $\xi$ , 使得  $f'(\xi) > 0$ .

9. 假设函数  $f(x)$  在  $[a, b]$  上连续, 在  $(a, b)$  内可导, 且  $f'(x) \leq 0$ , 记  $F(x) = \frac{1}{x-a} \int_a^x f(t)dt$ ,  
证明: 在  $(a, b)$  内  $F'(x) \leq 0$ .



10. 设  $x \geq 0$ , 证明:

$$(1) \sqrt{x+1} - \sqrt{x} = \frac{1}{2\sqrt{x+\theta(x)}}, \text{ 其中 } \frac{1}{4} \leq \theta(x) \leq \frac{1}{2};$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow 0} \theta(x) = \frac{1}{4}, \lim_{x \rightarrow +\infty} \theta(x) = \frac{1}{2}.$$

11. 设  $f(x), g(x)$  在  $[a, b]$  上连续, 且满足

$$\int_a^x f(t) dt \geq \int_a^x g(t) dt, x \in [a, b], \int_a^b f(t) dt = \int_a^b g(t) dt.$$

证明:  $\int_a^b xf(x) dx \leq \int_a^b xg(x) dx.$

12. 设  $f(x)$  连续, 令  $\varphi(x) = \begin{cases} \int_0^x \left[ \int_0^u f(t) dt \right] du, & x \leq 0 \\ \int_{-x}^0 \ln[1 + f(x+t)] dt, & x > 0 \end{cases}$ . 讨论  $\varphi(x)$  在  $x=0$  处的可导性.

13. 设  $f(x) > 0, f''(x)$  在  $(-\infty, +\infty)$  内连续, 令  $\varphi(x) = \begin{cases} \frac{\int_0^x tf(t) dt}{\int_0^x f(t) dt}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$

(1) 求  $\varphi'(x)$ , 并讨论  $\varphi'(x)$  的连续性.

(2) 证明  $\varphi(x)$  单调不减.

14. 设  $f(x) = \begin{cases} \int_x^{x^2} \frac{\sin xu}{u} du, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0, \end{cases}$  求  $f''(0)$ .