金榜图书
JINBANG BOOKS · SINCE 1997

2015

李永乐 · 王式安唯一考研数学系列

全国十二大考研辅导机构指定用书

分阶习题同步训练

数学三

主编 ◎ 李永乐 王式安 季文铎

编委 ◎ 王式安 刘喜波 李永乐 季文铎 武忠祥 胡金德 蔡燧林

本习题集将每章习题，按难度分为三类

分别是基础单项训练、基础综合训练和思维拓展训练

赠送

ISBN 978-7-5150-1054-0

定价：58.00元

书
1997

2015

李永乐·王式安唯一考研数学系列

全国十二大考研辅导机构指定用书

分阶习题同步训练

数学三

主编 ◎ 李永乐 王式安 季文铎

编委 ◎ 王式安 刘喜波 李永乐 季文铎 武忠祥 胡金德 蔡燧林

国家行政学院出版社

说　明

本习题集将每章习题，按难度分为三类，分别是基础单项训练、基础综合训练和思维拓展训练。题型包括选择题、填空题和解答题。选择题均为单项选择题，只有一个最适合的选项。解答题要求写出解题步骤、过程和必要的说明。

基础单项训练

此类题难度较低，属于菜鸟级。题目内容都是所在章节的基本概念、定理和方法的简单重现。为熟悉所学内容而进行的必要练习。

基础综合训练

所在章节的综合练习题，题目涉及的知识点不再是单个的概念，具有一定的综合性，条件设置较隐蔽，需要进行一定探索研究才能得到结果。增加练习的效果。

思维拓展训练

此类题目具有难度和综合性，目的是使学生的数学知识转化成思维模式上来。让学生随着练习逐步深化、拓展知识结构。这类题，结合前后章节的知识，具有开放性，解题方法不统一，变换一些条件就会转化成新的题目。需要学生积极思考，能从不同方法中寻求解题最佳方法。

尽管我们为以上所有的习题都配了答案，但希望同学不要被所提供的答案束缚，积极思考，尽量通过自己的思考得出答案。顺便提一下，如果你被菜鸟题虐的很惨。请记住，不是你不够聪明，而是老师出的题太刁钻。

目录

第一篇　微积分

第二篇　线性代数

第三篇　概率论与数理统计

习题参考答案与解析

第一篇　微积分

第一章　函数　极限　连续

基础单项训练　　难度：★☆　　通关称号：菜鸟

1. 设 $f(x)$ 的连续区间为$[0,1]$，则 $f[\ln(x+1)]$ 的连续区间为

(A)$[0,1]$.　(B)$[0,e-1]$.　(C)$[1,e]$.　(D)$[e^{-1},e]$.

2. 设$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{(1+x)(1+2x)(1+3x)+a}{x}=6$，则 $a=$

(A)1.　(B)-2.　(C)-1.　(D)2.

3. 设 $f(x)=\int_0^{\sin x}\sin(t^2)\mathrm{d}t$，$g(x)=x^3+x^4$，则当 $x\to0$ 时，$f(x)$ 是 $g(x)$ 的

(A) 等价无穷小.　(B) 同阶但非等价的无穷小.

(C) 高阶无穷小.　(D) 低阶无穷小.

4. 设 $f(x)$ 和 $g(x)$ 在$(-\infty,+\infty)$ 内可导，且 $f(x)<g(x)$，则必有

(A)$f(-x)>g(-x)$.　(B)$f'(x)<g'(x)$.

(C) $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)<\lim\limits_{x\to x_0}g(x)$.　(D)$\int_0^x f(t)\mathrm{d}t<\int_0^x g(t)\mathrm{d}t$.

5. 设函数 $f(x)=\dfrac{\ln|x|}{|x-1|}\sin x$，则 $f(x)$ 有

(A)1 个可去间断点，1 个跳跃间断点.

(B)1 个可去间断点，1 个无穷间断点.

(C)2 个跳跃间断点.

(D)2 个无穷间断点.

6. 设 $f(x)$，$g(x)$ 定义在$(-1,1)$ 上，且都在 $x=0$ 处连续，若 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{g(x)}{x}, & x\neq0\\ 2, & x=0\end{cases}$，则

(A)$g(0)=0$ 且 $g'(0)=0$.　(B)$g(0)=0$ 且 $g'(0)=1$.

(C)$g(0)=0$ 且 $g'(0)=2$.　(D)$g(0)=1$ 且 $g'(0)=0$.

7. 设 $f(x)=\begin{cases}x, & |x|\leqslant1,\\ x^2, & 1<|x|\leqslant4,\end{cases}$ 且 $g(x)=f(x^2)+f(x+3)$，则 $g(x)$ 的定义域为________.

8. 设 $f(x)=\begin{cases}x^2, & x\leqslant0\\ -x^3, & x>0\end{cases}$ 的反函数是 $g(x)$，则 $g(4)=$ ________.

9. 已知当 $x\to0$ 时，$(1+ax^2)^{\frac{1}{3}}-1$ 与 $\cos x-1$ 是等价无穷小，则常数 $a=$ ________.

10. 已知$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln\left(1+\dfrac{f(x)}{\sin2x}\right)}{3^x-1}=5$，则$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)}{x^2}=$ ________.

11. 若$\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^2+ax+b}{1-x}=5$，则 $a=$ ________，$b=$ ________.

12. 求$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln(1+x)+\ln(1-x)}{1-\cos x+\sin^2x}$.

13. 求极限$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\ln\cos(x-1)}{1-\sin\dfrac{\pi}{2}x}$.

14. 求极限$\lim\limits_{x\to 0}\left[\dfrac{a}{x}-\left(\dfrac{1}{x^2}-a^2\right)\ln(1+ax)\right](a\neq 0)$.

15. 计算 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x+e^{tx}}{1+e^{tx}}$.

基础综合训练　　难度：★★☆　　通关称号：小达人

1. 当 $x\to 0$ 时，下列无穷小量中阶数最高的是

(A) $\sqrt{1+x^2}-\sqrt{1-x^2}$.　　(B) $3x^3-4x^4+5x^5$.

(C) $e^{x^2}-\cos x$.　　(D) $\displaystyle\int_0^{1-\cos x}\frac{\sin t^2}{t}dt$.

2. 设 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2x^n-3x^{-n}}{x^n+x^{-n}}\sin\dfrac{1}{x}$，则 $f(x)$ 有

(A) 两个第一类间断点.

(B) 三个第一类间断点.

(C) 两个第一类间断点和一个第二类间断点.

(D) 一个第一类间断点和一个第二类间断点.

3. 若 $a>0,b>0$ 均为常数，则$\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{a^x+b^x}{2}\right)^{\frac{3}{x}}=$ ________.

4. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{\sin x^2}\displaystyle\int_{\frac{x}{2}}^{x}\frac{e^{xt}-1}{t}dt=$ ________.

5. 设函数 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\ln(1+ax^3)}{x-\arcsin x}, & x<0,\\ 6, & x=0,\\ \dfrac{e^{ax}+x^2-ax-1}{x\sin\dfrac{x}{4}}, & x>0,\end{cases}$

则 $a=$ ________时，$f(x)$ 在 $x=0$ 处连续；$a=$ ________时，$x=0$ 是 $f(x)$ 的可去间断点？

6. 求$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x^2}-\sqrt[3]{1+2\sin^2 x}}{\tan^2 x}$

7. 求$\lim\limits_{x\to 0}(3e^{\frac{x}{x-1}}-2)^{\frac{1}{x}}$.

8. 求极限$\lim\limits_{x\to\infty}x^3\ln\dfrac{x+1}{x-1}-2x^2$.

9. 求$\lim\limits_{n\to\infty}\sin(\pi\sqrt{n^2+1})$

10. 求函数 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x(\pi+2x)}{2\cos x}, x\leqslant 0\\ \sin\dfrac{1}{x^2-1}, x>0\end{cases}$ 的间断点.

11. 求极限$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^{\sin^2 x}\ln(1+t)\mathrm{d}t}{\sqrt{1+x^4}-1}$.

12. 求极限 $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{x^x-(\sin x)^x}{x^2\arctan x}$.

13. 求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos(xe^{2x})-\cos(xe^{-2x})}{x^3}$.

14. 求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^{2x}|t-x|\sin t\mathrm{d}t}{|x|^3}$.

15. 设 $f(x)$ 是满足 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{1-\cos x}=-1$ 的连续函数，且当 $x\to 0$ 时，$\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$ 是与 x^n 同阶的无穷小量，求正整数 n.

16. 求极限 $\lim\limits_{x\to 1^-}(1-x)^3\sum\limits_{n=1}^{\infty}n^2x^n$.

17. 设 $f(1)=0,f'(1)=a$，求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+2f(e^{x^2})}-\sqrt{1+f(1+\sin^2 x)}}{\ln\cos x}$.

18. 设 $g(x)$ 在 $x=0$ 的某邻域内连续，且 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{g(x)-1}{x}=a$，

已知 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\int_0^1 g(x^2t)\mathrm{d}t-1}{x^2}, & x<0,\\ \dfrac{1}{2}, & x=0,\\ \dfrac{a+b\cos x}{x^2}, & x>0\end{cases}$ 在 $x=0$ 处连续，求 a,b.

思维拓展训练　　难度：★★★★　　通关称号：小牛人

1. 设 $[u]$ 表示不超过 u 的最大整数 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{[2x]}{x}, x\neq 0\\ 1, x=0\end{cases}$，判别 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)$ 是否存在. 并问 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)$ 是否存在？

2. 已知曲线 $y=f(x)$ 在 $x=1$ 处的切线方程为 $y=x-1$，求：$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x^2\ln\cos x}\int_0^{x^2}\mathrm{e}^t f(1+\mathrm{e}^{x^2}-\mathrm{e}^t)\mathrm{d}t$.

3. 设 $f(x)$ 在 $x=a$ 的某邻域内可导，且 $f(a)\neq 0, a\neq 0$，求极限 $\lim\limits_{x\to a}\left[\dfrac{1}{(x-a)f(a)}-\dfrac{1}{\int_a^x f(t)\mathrm{d}t}+\dfrac{1}{2x-a}\right]$.

4. 设 $1\leqslant x<+\infty$ 时，$0<f'(x)<\dfrac{1}{x^2}$，且 $f'(x)$ 连续，证明 $\lim\limits_{n\to\infty}f(n)$ 存在.

5. 设 $f(x)$ 具有连续的二阶导数，且 $\lim\limits_{x\to 0}\left[1+x+\dfrac{f(x)}{x}\right]^{\frac{1}{x}}=\mathrm{e}^{3}$. 求 $\lim\limits_{x\to 0}\left[1+\dfrac{f(x)}{x}\right]^{\frac{1}{x}}$.

6. 设 $f(x)$ 在 $x=0$ 的某邻域内二阶可导，且 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=0$，$f''(0)\neq 0$，$\lim\limits_{x\to 0^{+}}\dfrac{\int_{0}^{x}f(t)\mathrm{d}t}{x^{\alpha}-\sin x}=\beta(\beta\neq 0)$，求 α、β(其中 $\beta\neq 0$).

7. 设 $f(x)$ 在 $(-a,a)$ 内连续，在 $x=0$ 处可导，且 $f'(0)\neq 0$.

(1) 求证：对任给的 $0<x<a$，存在 $0<\theta<1$，使 $\int_{0}^{x}f(t)\mathrm{d}t+\int_{0}^{-x}f(t)\mathrm{d}t=x[f(\theta x)-f(-\theta x)]$.

(2) 求 $\lim\limits_{x\to 0^{+}}\theta$.

第二章　一元函数微分学

基础单项训练　　难度：★☆　　通关称号：菜鸟

1. 设函数 $f(x)=(x-1)(x+2)(x-3)(x+4)\cdots(x+100)$，则 $f'(1)=$ ________.

2. 设函数 $f(x)$ 在点 $x=0$ 可导，且 $f(0)=0$，则 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(1-\cos x)}{\tan^2 x}=$ ________.

3. 设 $f(x)$ 有一阶连续导数，且 $f(0)=0, f'(0)=1$，则 $\lim\limits_{x\to0}[1+f(x)]^{\frac{1}{\ln(1+x)}}=$ ________.

4. 函数 $y=x^2-\ln x^2$ 的单调递减区间是________.

5. 已知 $f(x)=x^3+ax^2+bx$ 在 $x=-1$ 处取得极小值 -2，则 $a=$ ________，$b=$ ________.

6. 曲线 $y=\dfrac{x^2}{2x+1}$ 的斜渐近线方程为________.

7. 过原点作曲线 $y=\ln x$ 的切线，该切线方程是________.

8. 函数 $y=|\pi^2-x^2|\sin^2 x$ 的不可导点个数为

(A)0.　　(B)1.　　(C)2.　　(D)3.

9. 若 $f(x)=-f(-x)$，在 $(0,+\infty)$ 内 $f'(x)>0, f''(x)>0$，则在 $(-\infty,0)$ 内

(A) $f'(x)<0, f''(x)<0$.　　(B) $f'(x)<0, f''(x)>0$.

(C) $f'(x)>0, f''(x)<0$.　　(D) $f'(x)>0, f''(x)>0$.

10. 奇函数 $f(x)$ 在闭区间 $[-1,1]$ 上可导，且 $|f'(x)|\leqslant M$（M 为正常数），则必有

(A) $|f(x)|\geqslant M$.　　(B) $|f(x)|>M$.

(C) $|f(x)|\leqslant M$.　　(D) $|f(x)|<M$.

11. 设 $f(x)$ 在 $x=0$ 的某邻域内有连续的四阶导数，且当 $x\neq0$ 时，$f(x)\neq0$，同时

$$F(x)=\begin{cases}\dfrac{\tan x-\sin x}{f(x)}, & x\neq0,\\ 1, & x=0\end{cases}$$

在 $x=0$ 处连续，则必有

(A) $f'(0)=1$.　　(B) $f''(0)=2$.

(C) $f'''(0)=3$.　　(D) $f^{(4)}(0)=4$.

12. 曲线 $y=\dfrac{1+e^{-x^2}}{1-e^{-x^2}}$

(A) 没有渐近线.　　(B) 仅有水平渐近线.

(C) 仅有铅直渐近线.　　(D) 既有水平渐近线又有铅直渐近线.

13. 设 $f(x), g(x)$ 具有任意阶导数，且满足 $f''(x)+f'(x)g(x)+f(x)x=e^x-1, f(0)=1, f'(0)=0$. 则

(A) $f(0)=1$ 为 $f(x)$ 的极小值.　　(B) $f(0)=1$ 为 $f(x)$ 的极大值.

(C) $(0,f(0))$ 为曲线 $y=f(x)$ 的拐点.　　(D) 由 $g(x)$ 才能确定 $f(x)$ 的极值和拐点.

14. 设 $F(x)=\int_0^x tf(x-t)\mathrm{d}t$，$f(x)$ 为连续函数，且 $f(0)=0, f'(x)>0$，则 $y=F(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 内是

(A) 递增且为凹弧.　　(B) 递增且为凸弧.

(C) 递减且为凹弧.　　(D) 递减且为凸弧.

15. 已知 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上二阶可导，且 $f'(x)\neq0$，问在下列哪个条件下，能保证至少存在一个 $\xi\in(a,b)$，使 $f''(\xi)+f(\xi)=0$.

(A) $f'(a)f(b)=f'(b)f(a)$.　　(B) $f'(a)f(a)=f'(b)f(b)$.

(C) $f'^2(a)+f^2(b)=f'^2(b)+f^2(a)$.　　(D) $f'^2(a)-f^2(b)=f'^2(b)-f^2(a)$.

16. 设 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1-\sqrt{1-x}}{x}, & x<0\\ a+bx, & x\geqslant 0\end{cases}$ (1) 求 a 的值使 $f(x)$ 处处连续；(2) 再求 b 的值使 $f(x)$ 处处可导.

17. 设 $f(x)$ 就具有二阶导数，且 $f(a)=0$，$g(x)=\begin{cases}\dfrac{f(x)}{x-a}, x\neq a,\\ f'(a), x=a,\end{cases}$ 求 $g'(x)$，并证明 $g(x)$ 的一阶导数在 $x=a$ 点处连续.

18. 设函数 $f(x)$ 在点 $x=0$ 可导且 $f(0)=1$，又设 $f(x)$ 满足函数方程 $f(x+1)=2f(x)$，求 $f'(n)$，其中 n 是整数.

19. 求证：设函数 $f(x)$，$g(x)$ 在点 $x=a$ 可导，$f(a)=g(a)=0$ 且存在 $\delta>0$，使得当 $0<|x-a|<\delta$ 时，有 $|f(x)|\geqslant|g(x)|$，则 $|f'(a)|\geqslant|g'(a)|$.

20. 设 $f(x)$ 具有二阶连续导数，$f(0)=0$，$f'(0)=0$，$f''(x)>0$. 在曲线 $y=f(x)$ 上任意一点 $(x,f(x))(x\neq 0)$ 处作此曲线的切线，此切线在 x 轴上的截距记为 u，求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{xf(u)}{uf(x)}$.

21. 求 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x}\int_0^x|\sin t|\,dt$.

22. 设函数 $f(x)$ 在闭区间[0,1]上可微，对于[0,1]上的每一个 x，函数 $f(x)$ 的值都在开区间(0,1)内，且 $f'(x)\neq 1$，证明在(0,1)内有且仅有一个 x，使得 $f(x)=x$.

23. 设在$[0,+\infty)$上函数$f(x)$有连续导数,且$f'(x)\geqslant k>0$,$f(0)<0$,证明:$f(x)$在$(0,+\infty)$内有且仅有一个零点.

24. 设$f(x)$在$[a,b]$上连续,在(a,b)内可导,且$f(a)\cdot f(b)>0$,$f(a)\cdot f(\frac{a+b}{2})<0$.试证:对任意实数$k$,存在$\xi\in(a,b)$,使得$f'(\xi)=kf(\xi)$.

25. 设$f(x)$在闭区间$[0,c]$上连续,其导数$f'(x)$在开区间$(0,c)$内存在且单调减少,$f(0)=0$,试应用拉格朗日中值定理证明不等式$f(a+b)\leqslant f(a)+f(b)$,其中$a$,$b$满足条件$0\leqslant a\leqslant b\leqslant a+b\leqslant c$.

26. 设$y=y(x)$由方程$2x-\int_1^{x+y}e^{-t^2}\,dt=xy$确定,求$y'(0)$.

27. 曲线$y=k(x^2-3)^2$在拐点处的法线通过原点,求k的值.

28. 设$(1,-1)$是曲线$y=x^3+ax^2+bx+c$的拐点,且y在$x=0$处取极大值.求a,b,c.

基础综合训练　　难度：★★☆　　通关称号：小达人

1. 设 $y = f\left(\frac{2x-1}{x+1}\right)$，$f'(x) = \ln x^{\frac{1}{3}}$，则 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} =$ ________.

2. 设 $f(x)$ 为单调二阶可导函数，其反函数为 $g(x)$，且已知 $f(1) = 2$，$f'(1) = -\frac{1}{\sqrt{3}}$，$f''(1) = 1$，则 $g''(2) =$ ________.

3. 当 $x =$ ________时，函数 $y = x \cdot 2^x$ 取得极小值.

4. 若 $x \to 0$ 时，$F(x) = \int_0^x (x^2 - t^2) f'(t)\mathrm{d}t$ 的导数与 x^2 为等价无穷小，则 $f'(0)$ 等于

(A)0.　　(B)1.　　(C) -1.　　(D) $\frac{1}{2}$.

5. 设 $y = f(x)$，满足关系式 $y'' - 2y' + 4y = 0$，且 $f(x_0) > 0$，$f'(x_0) = 0$ 则 $f(x)$ 在 x_0 点处

(A) 取得极大值.　　(B) 取得极小值.

(C) 在 x_0 点某邻域内单调增加.　　(D) 在 x_0 点某邻域内单调减少.

6. 设 $f(x) = (x-a)^n \varphi(x)$，其中 $\varphi(x)$ 在点 a 的某邻域内具有 $n-1$ 阶导数，求 $f^{(n)}(a)$.

7. 证明：设函数 $f(x)$，$g(x)$ 二次可导，满足方程 $f(x)g(x) = 1$. 又 $f'(x) \neq 0$，$g'(x) \neq 0$. 则

$$\frac{f''(x)}{f'(x)} - \frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{g''(x)}{g'(x)} - \frac{g'(x)}{g(x)}.$$

8. 设不恒为常数的函数 $f(x)$ 在闭区间$[a,b]$上连续，在开区间(a,b)内可导，且 $f(a) = f(b)$. 证明：在(a,b)内至少存在一点 ξ，使得 $f'(\xi) > 0$.

9. 假设函数 $f(x)$ 在$[a,b]$上连续，在(a,b)内可导，且 $f'(x) \leqslant 0$，记 $F(x) = \frac{1}{x-a}\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$，证明：在$(a,b)$内 $F'(x) \leqslant 0$.

10. 设 $x \geqslant 0$,证明:

(1) $\sqrt{x+1}-\sqrt{x}=\dfrac{1}{2\sqrt{x+\theta(x)}}$,其中$\dfrac{1}{4}\leqslant\theta(x)\leqslant\dfrac{1}{2}$;

(2) $\lim\limits_{x\to 0}\theta(x)=\dfrac{1}{4}$, $\lim\limits_{x\to+\infty}\theta(x)=\dfrac{1}{2}$.

11. 设 $f(x)$,$g(x)$ 在$[a,b]$上连续,且满足

$$\int_a^x f(t)\mathrm{d}t \geqslant \int_a^x g(t)\mathrm{d}t, x\in[a,b], \int_a^b f(t)\mathrm{d}t=\int_a^b g(t)\mathrm{d}t.$$

证明:$\int_a^b xf(x)\mathrm{d}x \leqslant \int_a^b xg(x)\mathrm{d}x$.

12. 设 $f(x)$ 连续,令 $\varphi(x)=\begin{cases}\int_0^x\left[\int_0^u f(t)\mathrm{d}t\right]\mathrm{d}u, & x\leqslant 0\\ \int_{-x}^0 \ln[1+f(x+t)]\mathrm{d}t, & x>0\end{cases}$. 讨论 $\varphi(x)$ 在 $x=0$ 处的可导性.

13. 设 $f(x)>0$,$f''(x)$ 在$(-\infty,+\infty)$内连续,令 $\varphi(x)=\begin{cases}\dfrac{\int_0^x tf(t)\mathrm{d}t}{\int_0^x f(t)\mathrm{d}t}, & x\neq 0,\\ 0, & x=0.\end{cases}$

(1) 求 $\varphi'(x)$,并讨论 $\varphi'(x)$ 的连续性.

(2) 证明 $\varphi(x)$ 单调不减.

14. 设 $f(x)=\begin{cases}\int_x^{x^2}\dfrac{\sin xu}{u}\mathrm{d}u, & x\neq 0,\\ 0, & x=0,\end{cases}$ 求 $f''(0)$.