工程数学

Engineering Mathematics

陈志国 编著

ZHEJIANG UNIVERSITY PRESS
浙江大学出版社

工 程 数 学

陈志国 编著

ZHEJIANG UNIVERSITY PRESS
浙江大学出版社

图书在版编目（CIP）数据

工程数学 / 陈志国编著. —杭州：浙江大学出版社，2013.7

ISBN 978-7-308-11736-4

Ⅰ. ①工… Ⅱ. ①陈… Ⅲ. ①工程数学—教材
Ⅳ. ①TB11

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2013）第 139491 号

内容简介

本书是高校工科类学生选用教材，由线性代数、微积分、线性规划、复变函数、常微分方程共五部分内容组成。全书取材适中，内容简练，脉络清晰，理论基础与工程案例兼备，对某些传统的数学概念提出了新的看法。

本书也可作为其他专业人员的学习参考。

工 程 数 学

陈志国　编著

责任编辑　杜希武
封面设计　刘依群
出版发行　浙江大学出版社
（杭州市天目山路 148 号　邮政编码 310007）
（网址：http://www.zjupress.com）
排　　版　杭州好友排版工作室
印　　刷　杭州杭新印务有限公司
开　　本　787mm×1092mm　1/16
印　　张　22.25
字　　数　541 千
版 印 次　2013 年 7 月第 1 版　2013 年 7 月第 1 次印刷
书　　号　ISBN 978-7-308-11736-4
定　　价　45.00 元

浙江大学出版社发行部联系方式：（0571）88925591，http://zjdxcbs.tmall.com

前　言

《工程数学》顾名思义，是属于两个不同范畴的结合。工程注重现实的实存性，数学则关注理性思维的创造以及对自然的理性诠释。详细察看造物，万物皆奇妙精细之工程，令人惊叹，无怪乎牛顿在《自然哲学数学原理》中惊叹不已，宇宙真是万有统一的和谐。

科学发展历史表明，工程创造与理性思维的创造之间具有高度的密切关联与和谐性。历史上，数学的发展至少有两条线索。一条是纯理性的形而上的线索，另一条则是与物理等实体科学和工程问题的发展密切相关的线索。从阿基米德到达·芬奇，从欧拉、牛顿、拉格朗日、拉普拉斯、乃至高斯、冯·诺依曼，这些大师把数学和实体科学以及工程的发展完美地结合到一起。这种结合与和谐在本课程中一定程度上得以具体体现，比如：体积变换与行列式，光的折射路径与微分学，拱架结构与微分方程，浮力原理与第二型面积分，流体力学、机翼设计与解析函数，测不准原理与傅里叶变换等。令我们诧异与惊叹的是超自然的纯理性的演绎竟然和自然如此的一致与和谐。

我们很难有别的解释，除了承认这一切的一切都是万有统一的。这种统一见诸于“逻各斯”，当我们研究各门学问的时候，都离不开“logos”，诸如 ontology，psychology，zoology，biology，topology，geology，等等。这种理则性（逻辑性，道性）的贯穿，其实正是我们得以研究清楚事物的原因。进一步地，我们若追寻事物的理则性去研究、创新，这是真正的源头创新。

科技的创新本质上是理性思维的创新，而理性思维的创新在数学中得以高度的体现，尤其是崭新的高度抽象的数学概念。但是，工程数学有别于纯粹数学，不是着重于数学概念、理论的创新，乃在于合理地应用现有数学。当然，这并非绝对，譬如广义函数狄拉克函数的引进就直接与工程相关，并以狄拉克命名。

能好好地应用数学，其实也是件了不起的事情。荀子劝学篇中说道，“君子生非异也，善假于物也”。史蒂夫·乔布斯也曾经说过，“并不是每个人都需要种植自己的粮食，也不是每个人都需要做自己穿的衣服，我们说着别人发明的语言，使用别人发明的数学……”我们一直在使用别人的成果。使用人类的已有经验和知识来进行发明创造是一件很了不起的事情。

现代数学理论结合计算机，可以衍生出很多应用学科，分形几何即是一例。风吹过蕨类植物羊齿叶那种“龙吟萧萧、凤尾森森”的美感可以由代数上几个压缩线性变换通过恰当选择参数得以实现。这种自由思维创造的美感，甚至艺术工作者都可以从中得到启发，其结构的精细与美妙令人叹为观止。

数学无论作为工程科学的基本语言，还是必不可少的工具，对于工程科学都愈来愈重

要，而且很显然这种趋势在未来仍将继续下去。因此，工科学生势必对一些基本原理、方法与结果应有坚实的基础。本课程将线性代数放在最前面，以便读者对数学的结构有较为清晰的框架认识，也依据笛卡尔的思想，训练由几何直观转向代数运算的分析，并建立代数框架；反之，将抽象的线性问题由代数框架进行直观的几何思考。第二部分是微积分，学习无穷小分析，在极限理论基础上，给予微分一种明确的定义，不混同于有限的变化量。通过建立微分公设命题，可以清楚地讲述高阶微分，避免以往在这方面的含糊之处。其余各部分有线性规划初步，复变函数，常微分方程，各部分内容都配有适当的案例分析。

本课程本着学以致用的精神，尽量使知识结构的条理性、逻辑性和知识的应用性并重。

陈志国

2012 年 12 月于浙江大学

目　　录

第一篇　线性代数

第二篇 微积分

第三篇　线性规划

第四篇 复变函数

第五篇　常微分方程

第一篇　线性代数

研究关联多个因素的量所引起的问题，在数学上需要考察多个未知量．如果所研究的量与量之间是按比例的关系，那么称这个问题为线性问题．“代数”一词的一个基本含义就是运算．顾名思义，线性代数乃是对于线性关系的变量之间的运算．

线性问题比非线性要简单得多，但在实际问题中线性所占比例是很少的．当然，线性与非线性的划分并非绝对的．比如变量 y 是 x 的幂函数，那么就不是线性关系，但是对两个量取对数以后，两个对数量就变成线性关系了．利用这样的转变，在求海岸线的分形维数时，依据实验数据，按照最小二乘法可以求出．再如微积分中求非线性问题的积分时，虽然变量之间是非线性的关系，但是微分量之间却是线性的．因此，以直代曲，以线性代非线性是微积分理论的主要思想．

历史上线性代数的第一个问题是关于解线性方程组的．大约早在公元前 1600 年，巴比伦的代数学已经达到相当的水平．在现在保存的楔形文字泥板上，有解五元一次方程组的问题．个别的甚至含有十个未知量的十个方程（大多数是线性的），这是一个因校正天文观测数据而引起的问题，巴比伦人用一种特殊的方法最终算出所有未知量．

对线性方程组的近代处理始于莱布尼兹，他开始对线性方程组消元理论的讨论，并因此引出行列式的概念．线性方程组理论的发展促成了作为工具的矩阵论和行列式理论的创立与发展，这些内容都已成为线性代数的主要部分．

另外物理学的问题也构成对数学的挑战．向量的概念在物理学中早已有之，向量的相加的平行四边形法则亦早为人所熟知．怎样用代数的方法研究向量，而不必画出图形，这要求数学家们寻找一种数学工具．英国数学物理学家麦克斯韦尔在格拉斯曼等人的工作上将四元数分解成数量部分和向量部分，创建了大量的向量分析，实现了从数学理论到物理学实际所需用的向量的过渡．

目前线性代数内容一般包括行列式、矩阵、线性方程组、向量空间、线性变换、特征值与特征向量等．

在过去几十年中，有两个主要因素影响了工程数学的发展．这些因素是，自动电子计算机在工程问题的广泛应用以及线性代数与线性分析的与日俱增的利用．

第一章 行列式

行列式在历史上原为求解线性方程组而引入，但在线性代数和其他数学领域以及工程技术中，行列式都是一个很重要的工具.本章从几何观点引入行列式的定义，给出行列式性质及其计算方法.

§1.1 行列式的定义

在中学课程中，熟知二元一次方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \end{cases}$$

的解为

$$x_1 = \frac{a_{22}b_1 - a_{12}b_2}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}, x_2 = \frac{a_{11}b_2 - a_{21}b_1}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}$$

若引进以下 2 阶行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

则上述解可统一地表示为

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}, \quad x_2 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}$$

同理，当考察三元一次方程组的解时，若定义 3 阶行列式为

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} &= a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} \\ &= a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) - a_{12}(a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31}) + a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31}) \\ &= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31} \end{aligned}$$

则三元一次方程组的解为

$$x_j = \frac{D_j}{D} \quad (j = 1,2,3)$$

其中 D 表示如上系数构成的三阶行列式，而 D_j 表示系数行列式中的第 j 列由右边的常数列代替的三阶行列式.

历史上行列式的引进正是为求解线性方程组.在解析几何里面,我们知道上述分别表示两个平面向量所张成的有向面积和三个三维向量所张成的有向体积,之所以称其为有向,乃是因为数值有正负.一个自然的问题是如何定义 n 阶行列式以及它所代表的几何意义是什么?我们试图用几何观点引入,但作为预备,先引入逆序数.

排列与逆序数

把 n 个不同的元素排成一列,叫做这 n 个元素的全排列(简称排列),根据排列组合理论,这样的排列数共有 $n!$ 个.对于 n 个不同的元素,先规定各元素之间的一个标准次序(如 n 个不同的自然数,可规定由小到大),于是在这 n 个元素的任一排列中,当某两个元素的先后次序与标准次序不同时,就称这两个元素构成了一个**逆序**.一个排列中所有逆序的总和称之为这个排列的**逆序数**.逆序数为奇数的排列称为**奇排列**,逆序数为偶数的排列称为**偶排列**.

计算排列逆序数的方法

设 $j_1,j_2,\cdots,j_n$ 为 $1,2,\cdots,n$ 的一个排列,记 $\tau(j_1,j_2,\cdots,j_n)$ 为这一排列的逆序数,记 $\tau(j_k)$ 为比 j_k 大且排在前面的元素的个数,则

$$\tau(j_1,j_2,\cdots,j_n)=\sum_{k=1}^{n}\tau(j_k)$$

例 1　求排列 $13\cdots(2n-1)24\cdots(2n)$ 的逆序数.

解　在该排列中,$1\sim(2n-1)$ 中每个奇数的逆序数全为 0,2 的逆序数为 $(n-1)$,4 的逆序数为 $(n-2)$,$\cdots$,$(2n-2)$ 的逆境序数为 1,$2n$ 的逆序数为 0,于是该排列的逆序数为

$$1+2+3+\cdots+(n-1)=\frac{n(n-1)}{2}$$

例 2　在 $1\sim9$ 构成的排列中,求 j、k,使排列 $1\ 2\ 7\ 4\ j\ 5\ 6\ k\ 9$ 为偶排列.

解　由题可知,j、k 的取值范围为 $\{3,8\}$,当 $j=3$、$k=8$ 时,经计算可知,排列 127435689 的逆序数为 5,即为奇排列;当 $j=8$、$k=3$ 时,经计算可知,排列 127485639 的逆序数为 10,即为偶排列,故 $j=8$,$k=3$.

例 3　已知 $\tau(j_1,j_2,\cdots,j_n)=k$,求 $\tau(j_n,j_{n-1},\cdots,j_1)$.

解　因为对于任意的 s,t,都有 $\tau(j_s,j_t)+\tau(j_t,j_s)=1$,所以

$$\tau(j_1,j_2,\cdots,j_n)+\tau(j_n,j_{n-1},\cdots,j_1)=C_n^2=\frac{n(n+1)}{2}$$

在排列中,将任意两个元素对调位置,其余元素不动,这种作出新排列的过程叫做**对换**.将相邻两元素对换,称为**相邻对换**.

定理 1　对换一个排列中的任意两个元素,排列改变奇偶性.

证明　该定理的证明可分为两步来证.第一步证明相邻对换情况,第二步证明一般情况.

设 $a_1a_2\cdots a_labb_1b_2\cdots b_m\xrightarrow{a\leftrightarrow b}a_1a_2\cdots a_lbab_1b_2\cdots b_m$.若 $\tau(a_1a_2\cdots a_labb_1b_2\cdots b_m)=k$,则当 $a>b$ 时,$\tau(a_1a_2\cdots a_lbab_1b_2\cdots b_m)=k-1$;当 $a<b$ 时,$\tau(a_1a_2\cdots a_lbab_1b_2\cdots b_m)=k+1$.由此可见,相邻对换改变排列的奇偶性.

下证一般情况,设 $a_1a_2\cdots a_lac_1c_2\cdots c_nbb_1b_2\cdots b_m\xrightarrow{a\leftrightarrow b}a_1a_2\cdots a_lbc_1c_2\cdots c_nab_1b_2\cdots b_m$

把上述对换分解成:

(1) $a_1a_2\cdots a_lac_1c_2\cdots c_nbb_1b_2\cdots b_m$

(2) $a_1a_2\cdots a_lc_1c_2\cdots c_nbab_1b_2\cdots b_m$

(3) $a_1a_2\cdots a_lbc_1c_2\cdots c_nab_1b_2\cdots b_m$

把(1) 作 $n+1$ 次相邻对换得(2),再将(2) 作 n 次相邻对换得(3). 因此作 $2n+1$ 次相邻对换,就可由(1) 得到(3),故此对换一个排列中的任意两个元素,排列改变奇偶性.

定理 2 在 n 元排列中,奇、偶排列的个数相等,各有 $n!/2$ 个.

证 设奇排列有 p 个,偶排列有 q 个. 将每个奇排列的头两个数对换,则得一个偶排列,说明有多少奇排列,就至少有多少个偶排列. 反之亦然,因此,$p=q$.

定理 3 任意一个 n 元排列都可以经过一些对换变成自然排列,并且所作对换的个数与这个排列有相同的奇偶性.

证 设该排列逆序数为 τ,所作对换个数为 k,则 $(-1)^k(-1)^\tau=1$,证毕.

高维平行多面体的体积问题

本段的目的是由几何问题引出行列式的概念,但内容涉及第四章的线性空间与基的概念,初学者可以先跳过此段. 我们先看平面的平行四边形面积,若设 α,β 为平面上两向量,由它们构成的平行四边形的"有向"面积记为 $\alpha\wedge\beta$,则由基本几何的等高等底原理我们知道 $\alpha\wedge(k\alpha+\beta)=\alpha\wedge\beta$,$(\alpha+\beta)\wedge(\alpha+\beta)=0$. 现在要从几何直观中抽象出代数性质,我们发现 具有

1) 退化性质,对任意 α,$\alpha\wedge\alpha=0$;

2) 双线性性质,$\gamma\wedge(k\alpha+l\beta)=k\gamma\wedge\alpha+l\gamma\wedge\beta$,$(m\alpha+n\beta)\wedge\gamma=m\alpha\wedge\gamma+n\beta\wedge\gamma$.

据此,$(\alpha+\beta)\wedge(\alpha+\beta)=\alpha\wedge\alpha+\alpha\wedge\beta+\beta\wedge\alpha+\beta\wedge\beta=0$,因此 $\alpha\wedge\beta=-\beta\wedge\alpha$. 所以

$$(a_{11}\alpha+a_{12}\beta)\wedge(a_{21}\alpha+a_{22}\beta)=\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{vmatrix}\alpha\wedge\beta$$

现在来讨论高维平行多面体的体积问题. 设 $e_1,e_2,\cdots,e_n$ 为 n 维欧式空间一组基,则由此基可以张成一个平行多面体,记此多面体的体积为 $e_1\wedge e_2\wedge\cdots\wedge e_n$. 又设 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 为一组向量,我们要求此向量组张成的平行多面体的体积. 由于高维空间的高度抽象,因此我们从低维空间抽象出一般的**"体积原理"**:

1. 退化性质 当 $\alpha_{j1},\alpha_{j2},\cdots,\alpha_{jn}$ 中有两个相等时,则 $\alpha_{j1}\wedge\alpha_{j2}\wedge\cdots\wedge\alpha_{jn}=0$;

2. *n* 重线性性质

$\alpha_1\wedge\alpha_2\wedge\cdots\wedge(k\alpha_i+l\beta_i)\wedge\cdots\wedge\alpha_n=k\alpha_1\wedge\alpha_2\wedge\cdots\wedge\alpha_i\wedge\cdots\wedge\alpha_n+l\alpha_1\wedge\alpha_2\wedge\cdots\wedge\beta_i\wedge\cdots\wedge\alpha_n$.

根据以上两个性质可以得到

定理 4 设

$$\begin{aligned}\alpha_1&=a_{11}e_1+a_{12}e_2+\cdots+a_{1n}e_n\\ \alpha_2&=a_{21}e_1+a_{22}e_2+\cdots+a_{2n}e_n\\ &\cdots\cdots\\ \alpha_n&=a_{n1}e_1+a_{n2}e_2+\cdots+a_{nn}e_n\end{aligned}$$

则

$$\alpha_1\wedge\alpha_2\wedge\cdots\wedge\alpha_n=\sum_{j_1j_2\cdots j_n}(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)}a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}e_1\wedge e_2\wedge\cdots\wedge e_n$$

定义 1 n 阶行列式定义为

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=\sum_{j_1j_2\cdots j_n}(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)}a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$$

通过逆序数的讨论，我们不难得到行列式的等价定义：

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=\sum_{i_1i_2\cdots i_n}(-1)^{\tau(i_1i_2\cdots i_n)}a_{i_11}a_{i_22}\cdots a_{i_nn}$$

注记 按照行列式定义，向量组张成的体积与经线性变换后张成的体积之间相差系数行列式的绝对值. 这样，我们就不难理解多重积分中作变量变换时雅可比行列式的意义了，我们以后还将涉及.

§1.2 行列式的性质

当阶数较高时，直接用定义计算它的行列式是很困难的，利用下面介绍的行列式的性质，可以简化行列式的计算.

性质 1 行列互换，行列式不变.

由等价定义即得.

性质 2 若 D 互换两行得到 D_1，则 $D=-D_1$.

证明 设行列式

$$D_1=\begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix}$$

是由交换两行而得的行列式. 当 $k\neq i,j$ 时，$b_{kp}=a_{kp}$；当 $k=i,j$ 时，$b_{ip}=a_{jp}$，$b_{jp}=a_{ip}$，故

$$\begin{aligned} D_1&=\sum_{p_1p_2\cdots p_n}(-1)^{\tau(p_1p_2\cdots p_n)}b_{1p_1}b_{2p_2}\cdots b_{ip_i}\cdots b_{jp_j}b_{np_n} \\ &=\sum_{p_1p_2\cdots p_n}(-1)^{\tau(p_1p_2\cdots p_n)}a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{jp_i}\cdots a_{ip_j}a_{np_n} \end{aligned}$$

设 $\tau_1=\tau(p_1p_2\cdots p_j\cdots p_i\cdots p_n)$，则 $(-1)^{\tau}=-(-1)^{\tau_1}$. 因此

$$\begin{aligned} D_1&=-\sum_{p_1\cdots p_j\cdots p_i\cdots p_n}(-1)^{\tau_1}a_{1p_1}\cdots a_{jp_i}\cdots a_{ip_j}\cdots a_{np_n} \\ &=-\sum_{p_1\cdots p_j\cdots p_i\cdots p_n}(-1)^{\tau_1}a_{1p_1}\cdots a_{ip_j}\cdots a_{jp_i}\cdots a_{np_n}=-D \end{aligned}$$

推论 1 若 D 的某两行相同，则 $D=0$.

证 D 互换相同的两行仍然得到，根据性质 2，得 $D=-D$，故 $D=0$.

性质 3 若用数 k 乘 D 的某一行得到 B，则 $B=kD$.

此性质直接根据定义而得，表明行列式某一行的公因子可以提到行列式外面，于是有

推论 2 若 D 的某一行的元素全为 0，则 $D=0$.

性质 4 若 D 的某两行的对应元素成比例，则 $D=0$.

性质 5 若 D 的某一行的元素均可表为两数之和，则 D 可按下式表为两个行列式之和：

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ b_{i1}+c_{i1} & b_{i2}+c_{i2} & \cdots & b_{in}+c_{in} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ b_{i1} & b_{i2} & \cdots & b_{in} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ c_{i1} & c_{i2} & \cdots & c_{in} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

证明 由定义，

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=\sum_{j_1j_2\cdots j_n}(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)}a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{ij_i}\cdots a_{nj_n}$$

$$=\sum_{j_1j_2\cdots j_n}(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)}a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots(b_{ij_i}+c_{ij_i})\cdots a_{nj_n}$$

$$=\sum_{j_1j_2\cdots j_n}(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)}a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots b_{ij_i}\cdots a_{nj_n}+\sum_{j_1j_2\cdots j_n}(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)}a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots c_{ij_i}\cdots a_{nj_n}$$

再根据定义，得证.

性质 6 若将 D 的某一行的倍数加到另一行得到 B，则 $B=D$.

证明 由性质 5 和性质 4 而得.

根据性质 1，行列式成立的性质对列也成立，因此，将性质 2－6 中的“行”改为“列”，仍然成立.

例 1 计算 n 阶行列式

$$D=\begin{vmatrix} n & n-1 & \cdots & 3 & 2 & 1 \\ n & n-1 & \cdots & 3 & 3 & 1 \\ n & n-1 & \cdots & 5 & 2 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ n & 2n-3 & \cdots & 3 & 2 & 1 \\ 2n-1 & n-1 & \cdots & 3 & 2 & 1 \end{vmatrix}$$

解 将 D 的第 1 行乘以(-1)加到第 $2,3,\cdots,n$ 行，再将其第 $n,n-1,\cdots,1$ 列通过相邻两列互换依次调为第 $1,2,\cdots,n$ 列，则得

$$D=\begin{vmatrix} n & n-1 & \cdots & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 2 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & n-2 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ n-1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ & & 2 & \cdots & 0 \\ & & & \ddots & \vdots \\ & & & & n-1 \end{vmatrix}$$

$$=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}(n-1)!$$

§1.3　行列式的计算

定义 1　划去元素 a_{ij} 所在的第 i 行第 j 列得到的行列式称为元素 a_{ij} 的余子式，记作 M_{ij}，令 $A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}$，称为元素 a_{ij} 的代数余子式.

定理 1　如果一个 n 阶行列式的第 i 行元素除了 a_{ij} 以外均为零，则

$$D=a_{ij}A_{ij}$$

证明　情形 1，当行列式的第一行元素除了 a_{11} 以外均为零，

$$\begin{aligned}D&=\begin{vmatrix}a_{11}&0&\cdots&0\\a_{21}&a_{22}&\cdots&a_{2n}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a_{n1}&a_{n2}&\cdots&a_{nn}\end{vmatrix}=\sum_{1j_2\cdots j_n}(-1)^{\tau(1j_2\cdots j_n)}a_{11}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}\\&=a_{11}\sum_{j_2\cdots j_n}(-1)^{\tau_1(j_2\cdots j_n)}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}\\&=a_{11}M_{11}\end{aligned}$$

情形 2，一般情况，

$$D=\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1j}&\cdots&a_{1n}\\\vdots&\vdots&\vdots&\vdots&\vdots&\vdots\\0&0&\cdots&a_{ij}&\cdots&0\\\vdots&\vdots&\vdots&\vdots&\vdots&\vdots\\a_{n1}&a_{n2}&\cdots&a_{nj}&\cdots&a_{nn}\end{vmatrix}$$

将 D 的第 i 行逐步与前面 $i-1$ 行对换，可将第 i 行换到第一行，其余各行仍按原先先后次序；然后将第 j 列与前面 $j-1$ 列逐步对换，可将第 j 列换到第一列. 这样经过 $i+j-2$ 次对换，将 a_{ij} 调换到第一行、第一列的位置，所得行列式

$$D_1=(-1)^{i+j-2}D=(-1)^{i+j}D$$

由情形 1，$D_1=a_{ij}M_{ij}$，所以

$$D=(-1)^{i+j}D_1=a_{ij}A_{ij}$$

定理 2　行列式等于它的任一行的元素与其代数余子式的乘积之和，即

$$D=a_{i1}A_{i1}+a_{i2}A_{i2}+\cdots+a_{in}A_{in}\quad(i=1,2,\cdots,n)\tag{1}$$

(1) 式称为 D 按第 i 行的展开式.

证明　将 D 写成以下形式

$$D=\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\\vdots&\vdots&\vdots&\vdots\\a_{i1}+0+\cdots+0&0+a_{i2}+\cdots+0&\cdots&0\cdots+0+a_{in}\\\vdots&\vdots&\vdots&\vdots\\a_{n1}&a_{n2}&\cdots&a_{nn}\end{vmatrix}$$

再应用性质 5 与定理 1 即得证明.

推论　行列式的某一行元素与另一行的对应元素的代数余子式的乘积之和为 0，即