高等学校工科数学系列

线性代数及其实验

主　编　孙　平　李征宇　罗英语

HEUP 哈尔滨工程大学出版社

线性代数及其实验

主　编　孙　平　李征宇　罗英语
副主编　王　晶　王银凤　宋宇婷

HEUP 哈爾濱工程大學出版社

内容简介

本书内容包括行列式、矩阵、向量组的线性相关性、线性方程组、二次型、线性空间与线性变换、实验与应用。每节后均配有习题。本书除了介绍线性代数的经典理论外，还引入MATLAB软件，介绍如何利用软件处理线性代数方面的问题，这样既使学生深入理解所学知识，又满足了现代科技及工程实践的需要。

本书体系新颖、内容翔实、叙述清晰、例题典型、习题丰富，引入数学软件求解问题有助于培养学生分析、计算和应用等能力。

本书适合作为高等学校理工科非数学类专业本科生的数学课教材或教学参考书，也可供科学研究与工程技术人员学习参考。

图书在版编目(CIP)数据

线性代数及其实验/孙平，李征宇，罗英语主编. —哈尔滨：哈尔滨工程大学出版社，2013.12

ISBN 978-7-5661-0718-3

Ⅰ.①线… Ⅱ.①孙… ②李… ③罗… Ⅲ.①Matlab软件-应用-线性代数-实验-教材 Ⅳ.①0151.2-33

中国版本图书馆CIP数据核字(2013)第303932号

出版发行 哈尔滨工程大学出版社
社　　址 哈尔滨市南岗区东大直街124号
邮政编码 150001
发行电话 0451-82519328
传　　真 0451-82519699
经　　销 新华书店
印　　刷 黑龙江省地质测绘印制中心印刷厂
开　　本 787mm×960mm 1/16
印　　张 18.25
字　　数 390千字
版　　次 2013年12月第1版
印　　次 2013年12月第1次印刷
定　　价 39.00元
http://www.hrbeupress.com
E-mail:heupress@hrbeu.edu.cn

前　言

线性代数是代数学的一门基础课程,也是高等学校工科各专业的一门重要的公共基础课。学习线性代数不仅使学生获得线性代数的基本知识和基本运算技能,同时为学生学习后续课程打下必要的数学基础。

本书针对普通工科高等院校和重点院校中部分专业及自学爱好者的需要,由多年从事线性代数教学且具有丰富教学经验的教师精心策划而编写。其目的是通过精心编排教学内容,深入浅出地揭示概念和理论的本质;为了加强数学应用能力的训练,适当增加例题和习题数量;在章节内容上注重说明相关内容的关系和地位,易于教师组织教学和学生自学理解;引入 MATLAB 数学软件教学,有助于培养学生动手能力和利用数学知识和数学软件解决实际问题的能力;在知识讲解和内容选择上,力求做到通俗易懂,深入浅出,力保知识的系统性和连贯性。

本书内容:第 1 章行列式、第 2 章矩阵、第 3 章向量组的线性相关性、第 4 章线性方程组、第 5 章二次型、第 6 章线性空间与线性变换、第 7 章实验与应用、模拟题及答案、自测题答案及详解。

全书由沈阳建筑大学的孙平、李征宇,长春师范大学的罗英语担任主编,由东北石油大学的王晶、王银凤、宋宇婷担任副主编,参加编写的还有徐启程、汪清杰。各章编写人员如下:李征宇(第 1 章),王晶(第 2 章),王银凤(第 3 章、第 3 章自测题答案及详解、模拟题一),罗英语(第 4 章、第 4 章自测题答案及详解、模拟题二),宋宇婷(第 5 章、第 5 章自测题答案及详解、模拟题三),徐启程(第 6 章、第 2 章自测题答案及详解),孙平(第 7 章),汪清杰(模拟题四、模拟题一、二、三、四答案、第 1 章自测题答案及详解)。全书由孙平统稿。编者在编写工作中得到了哈尔滨工程大学出版社的大力支持,在此表示衷心的感谢!

本书在编写的过程中,参考或引用了国内外一些专家学者的论著,在此表示衷心感谢!

由于编者水平有限,加之时间仓促,教材中难免有不妥之处,敬请专家、同行和读者批评指正,以便不断完善。

编　者

2013 年 9 月

目　　录

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

第1章　行　列　式

行列式在线性代数中占有重要的地位,它不仅是研究矩阵和线性方程组求解的重要工具,而且在工程技术领域中也有着极其广泛的应用. 本章主要介绍行列式的定义、性质、计算和应用.

1.1　行列式的定义

1.1.1　二阶、三阶行列式

应用加减消元法解二元线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2, \end{cases} \tag{1-1}$$

第一个方程乘以 a_{22} 与第二个方程乘以 a_{12} 相减得

$$(a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12})x_1 = b_1a_{22} - b_2a_{12},$$

第二个方程乘以 a_{11} 与第一个方程乘以 a_{21} 相减得

$$(a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12})x_2 = b_2a_{11} - b_1a_{21},$$

当 $a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12} \neq 0$ 时,方程组的解为

$$x_1 = \frac{b_1a_{22} - b_2a_{12}}{a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}}, x_2 = \frac{b_2a_{11} - b_1a_{21}}{a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}}. \tag{1-2}$$

(1-2)式中的分子、分母都是四个数分两对相乘再相减而得,其中分母 $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$ 是由方程组(1-1)的四个系数确定的,把这四个数按它们在方程组(1-1)中的位置,排成二行二列(横排称行,竖排称列)的数表

$$\begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{matrix} \tag{1-3}$$

表达式 $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$ 称为数表(1-3)所确定的二阶行列式,并记作

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}. \tag{1-4}$$

数 a_{ij} 称为行列式(1-4)的元素,它的第一个下标 i 称为行标,表明该元素位于第 i 行,第二个下标 j 称为列标,表明该元素位于第 j 列. 位于第 i 行第 j 列的元素称为行列式(1-4)的 (i,j) 元.

二阶行列式表示的代数和可以用图 1－1 来帮助记忆.

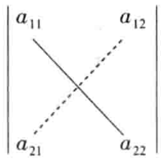

图 1－1

在二阶行列式中，把 a_{11} 到 a_{22} 的对角联线称为主对角线，把 a_{12} 到 a_{21} 的对角联线称为副对角线. 二阶行列式的值等于其主对角线（实线）上的两个元素之积减去副对角线（虚线）上的两个元素之积的差，这是求解二阶行列式的对角线法则. 即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

对于二阶行列式，我们也称为方程组（1－1）的系数行列式. 我们可用二阶行列式表示方程组（1－1）的解，即

$$x_1 = \frac{D_1}{D}, \qquad x_2 = \frac{D_2}{D}.$$

其中，$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, D_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}, D_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}$.

由 $3^2 = 9$ 个数组成的 3 行 3 列的数表，

$$\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{matrix} \tag{1-5}$$

记

$$\begin{aligned} &\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \\ &= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - \\ &\quad a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} \end{aligned} \tag{1-6}$$

式（1－6）的左边称为三阶行列式，其中 a_{ij}（$i, j = 1, 2, 3$）为此行列式的第 i 行第 j 列的元素.

类似二阶行列式，同样可以用对角线法则求解三阶行列式. 三阶行列式的右边共有六项，每项是取自不同行、不同列的三个元素的乘积，其中前三项前面带“＋”号，后三项前面带“－”号，其规律如图 1－2.

观察（1－6）式，三阶行列式是它第一行的三个元素各与一个二阶行列式相乘的代数

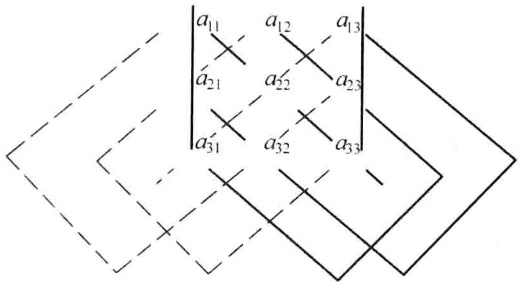

图 1－2

和. 与 a_{1j} 相乘的二阶行列式 M_{1j} 恰是划去 D 中 a_{1j} 所在的行与列后余下的低一阶行列式,乘积前加符号 $(-1)^{1+j}$ $(j=1,2,3)$.

如果令

$$A_{1j}=(-1)^{1+j}M_{1j}\quad (j=1,2,3),$$

那么三阶行列式可以更简洁地表示为

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

$$= a_{11}A_{11}+a_{12}A_{12}+a_{13}A_{13}.$$

如果我们定义一阶行列式 $|a|=a$,那么二阶行列式也符合上述规律. 即

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}(-1)^{1+1}|a_{22}| + a_{12}(-1)^{1+2}|a_{21}| = a_{11}A_{11}+a_{12}A_{12}.$$

例 1－1　计算三阶行列式

$$D=\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 1 & -1 \\ 3 & -5 & 2 \end{vmatrix}.$$

解　$D=1\times1\times2+(-2)\times(-1)\times3+3\times2\times(-5)$

$-3\times1\times3-(-2)\times2\times2-1\times(-1)\times(-5)$

$=2+6-30-9+8-5=-28.$

1.1.2　全排列与逆序

由 n 个不同元素排成一行,称为这 n 个元素的一个全排列.

n 个不同元素的所有不同的排列共有 $P_n=n!$ 种. 我们主要讨论 n 个自然数 $1,2,\cdots,n$ 所构成的排列.

首先规定一个标准排列次序：称 $1,2,\cdots,n$ 为标准序（即规定左小右大为顺序）. 由 $1,2,\cdots,n$ 所构成的任一排列中，若某两个元素的排列次序与顺序不同，就称为一个逆序. 例如：1,2,3 排成的 3 级排列，共可有 $P_3=3!\ =6$ 种，即 123,132,213,231,312,321. 其中 123 就是标准排列，而在 132 中，3 在 2 的左边，与标准序不同，故 3、2 之间有 1 个逆序.

一般地，n 个自然数 $1,2,\cdots,n$ 的一个任意排列记作 $p_1p_2\cdots p_n$，若第 i 个位置上的元素 p_i 的左边有 t_i 个元素比 p_i 大，就说元素 p_i 的逆序是 t_i. 一个排列中所有逆序的和，称为这个排列的逆序数，记作 t. 因此排列 $p_1p_2\cdots p_n$ 的逆序数就是：

$$t = t_1 + t_2 + \cdots + t_n = \sum_{i=1}^{n} t_i. \tag{1-7}$$

例 1-2 求排列 641523 的逆序数.

解 6 级排列的标准序为 123456，下面逐一分析各数的逆序数：

首位 6 的逆序数为 0；4 的逆序数为 1；1 的逆序数为 2；5 的逆序数为 1；2 的逆序数为 3；3 的逆序数为 3；所以由公式（1-7），排列 641523 的逆序数 $t=0+1+2+1+3+3=10$.

例 1-3 求排列 $n(n-1)\cdots 1$ 的逆序数.

解 n 级排列的标准序为 $12\cdots n$.

首位 n 的逆序数为 0；$n-1$ 的逆序数为 1；$n-2$ 的逆序数为 2；……；2 的逆序数为 $n-2$；1 的逆序数为 $n-1$；所以由公式（1-7），排列 $n(n-1)\cdots 1$ 的逆序数为

$$t = t[n(n-1)\cdots 1] = 0 + 1 + \cdots + (n-2) + (n-1) = \frac{n(n-1)}{2}.$$

称 t 为奇数的排列为奇排列，而 t 为偶数的排列为偶排列. 如例 1-2 中的排列就是一个偶排列；排列 561423 也是一个偶排列，而排列 461523 就是一个奇排列；容易得到，$n!$ 个不同的 n 级排列中，奇排列和偶排列各占一半.

1.1.3 对换

将一个排列中的任意两个元素的位置对换，而其余元素不动，得到一个新的排列，这称为对换. 若对换的是相邻的两个元素，则称为相邻对换.

排列 461523 可由排列 641523 进行一次相邻对换得到，也可由排列 561423 进行一次不相邻对换得到，这里排列 641523 和排列 561423 都是偶排列，而排列 461523 是一个奇排列，可见进行一次对换（无论相邻与否）将改变排列的奇偶性. 一般地我们有：

定理 1.1.1 一个排列经过一次元素对换，排列的奇偶性改变一次.

证 先证相邻对换的情形. 设排列

$$\cdots ij \cdots \tag{1-8}$$

经过一次相邻对换后变成排列

$$\cdots ji \cdots \tag{1-9}$$

这里"…"表示排列中其余那些不动的元素.容易看出,i,j 和其他的元素之间的逆序没有改变,改变的只是 i 和 j 二者的次序:若 $i<j$,则在排列(1-8)中 ij 不构成逆序,但在排列(1-9)中 ji 成一个逆序,故(1-9)的逆序数比(1-8)的逆序数增加1;若 $i>j$,则在排列(1-8)中 ij 成一个逆序,但在排列(1-9)中 ji 则没有逆序,故排列(1-9)的逆序数比排列(1-8)的逆序数减小1.总之,排列(1-9)与排列(1-8)的奇偶性不同.

再证一般对换的情形.设排列

$$\cdots ib_1b_2\cdots b_kj\cdots \tag{1-10}$$

将 i 与 j 对换,变成排列

$$\cdots jb_1b_2\cdots b_ki\cdots \tag{1-11}$$

这一过程可视为(1-10)先经 k 次相邻对换(i 向后换),变成排列

$$\cdots b_1b_2\cdots b_kij\cdots$$

又经 $k+1$ 次相邻对换(j 向前换),就变成排列(1-11),于是可知排列(1-10)可经 $2k+1$ 次相邻对换变成排列(1-11),因此排列(1-10)与排列(1-11)的奇偶性改变了 $2k+1$ 次,故必相异.

推论 奇排列调成标准排列的对换次数为奇数,偶排列调成标准排列的对换次数为偶数.

证 由定理1.1.1知对换的次数就是排列奇偶性的变化次数,而标准排列是逆序数为零的偶排列,故推论成立.

1.1.4 n 阶行列式

定义1.1.1 设有 n^2 个数 $a_{ij}(i,j=1,2,\cdots,n)$ 排成一个数表,称

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

为 n 阶行列式,其值等于所有取自不同行不同列的 n 个元素乘积的代数和

$$\sum_{j_1j_2\cdots j_n}(-1)^{t(j_1j_2\cdots j_n)}a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}. \tag{1-12}$$

其中,$j_1j_2\cdots j_n$ 是 $1,2,\cdots,n$ 的一个排列,$t(j_1j_2\cdots j_n)$ 是 $j_1j_2\cdots j_n$ 排列的逆序数,$\sum\limits_{j_1j_2\cdots j_n}$ 表示对所有 n 级排列求和.习惯上,我们记:

此为试读,需要完整PDF请访问: www.ertongbook.com

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

用 $a_{ij}(1\leqslant i,j\leqslant n)$ 表示 D 中第 i 行,第 j 列元素. 行列式简记为 $\det(a_{ij})$.

对于 n 阶行列式,它也等于由其展开式

$$a_{11}A_{11}+a_{12}A_{12}+\cdots+a_{1n}A_{1n}=\sum_{k=1}^{n}a_{1k}A_{1k},$$

运算所得到的数,即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=\sum_{k=1}^{n}a_{1k}A_{1k}. \tag{1-13}$$

其中 $A_{1j}=(-1)^{1+j}M_{1j}(j=1,2,\cdots,n)$ 称为元素 a_{1j} 的代数余子式,M_{1j} 称为元素 a_{1j} 的余子式,它是 n 阶行列式(1-13)中划去元素 a_{1j} 所在行、列后余下的 $n-1$ 阶行列式. 代数余子式是行列式的一个重要概念,在行列式的计算中起到非常重要的作用.

n 阶行列式一般可用 D 或 D_n 表示. 当 $n=1$ 时称为一阶行列式,规定一阶行列式 $|a|$ 的值等于 a.

例如,在三阶行列式

$$D_3=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & 3 \end{vmatrix}$$

中,元素 $a_{31}=2$ 的余子式和代数余子式分别为

$$M_{31}=\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}=6,\qquad A_{31}=(-1)^{3+1}M_{31}=6.$$

利用式(1-13)可进行较高阶行列式的计算.

例 1-4 用定义计算下列 4 阶行列式 $D_4=\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}$.

解 在 $\sum(-1)^t a_{1q_1}a_{2q_2}a_{3q_3}a_{4q_4}$ 中,要使 $a_{1q_1}a_{2q_2}a_{3q_3}a_{4q_4}\neq 0$,应取 $a_{3q_3}=a_{32}$,从而 $a_{1q_1}=a_{14}$,$a_{4q_4}=a_{43}$,$a_{2q_2}=a_{21}$,所以 $a_{1q_1}a_{2q_2}a_{3q_3}a_{4q_4}=a_{14}a_{21}a_{32}a_{43}$,4123 的逆数序为 3,故

$$D_4=\begin{vmatrix}0&1&0&1\\1&0&1&0\\0&1&0&0\\0&0&1&1\end{vmatrix}=\sum(-1)^t a_{1q_1}a_{2q_2}a_{3q_3}a_{4q_4}=(-1)^3\times1\times1\times1\times1=-1.$$

例 1－5　计算四阶行列式

$$D_4=\begin{vmatrix}3&0&0&-5\\-4&1&0&2\\6&5&7&0\\-3&4&-2&-1\end{vmatrix}.$$

解　由(1－13)式有

$$\begin{aligned}D_4&=\begin{vmatrix}3&0&0&-5\\-4&1&0&2\\6&5&7&0\\-3&4&-2&-1\end{vmatrix}\\&=3(-1)^{1+1}\begin{vmatrix}1&0&2\\5&7&0\\4&-2&-1\end{vmatrix}+(-5)(-1)^{1+4}\begin{vmatrix}-4&1&0\\6&5&7\\-3&4&-2\end{vmatrix}\\&=3\left[1\cdot(-1)^{1+1}\begin{vmatrix}7&0\\-2&-1\end{vmatrix}+2\cdot(-1)^{1+3}\begin{vmatrix}5&7\\4&-2\end{vmatrix}\right]+\\&\quad 5\left[(-4)\cdot(-1)^{1+1}\begin{vmatrix}5&7\\4&-2\end{vmatrix}+1\cdot(-1)^{1+2}\begin{vmatrix}6&7\\-3&-2\end{vmatrix}\right]\\&=3(-7-76)+5(152-9)=466.\end{aligned}$$

在行列式 D 中，将 $a_{11},a_{22},\cdots,a_{nn}$ 所组成的对角线称为 D 的主对角线，这些元素称为主对角元. 而 $a_{1n},a_{2,n-1},\cdots,a_{n1}$ 所组成的对角线则称为 D 的副对角线.

主对角线以上(下)的元素全为零的行列式称为下(上)三角形行列式.

例 1－6　计算 n 阶上三角形行列式

$$D=\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\0&a_{22}&\cdots&a_{2n}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\0&0&\cdots&a_{nn}\end{vmatrix}.$$

解　n 阶上三角形行列式的特点是当 $i>j$ 时，$a_{ij}=0$. 由于行列式展开式中的一般项为

$$(-1)^{t(j_1j_2\cdots j_n)}a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n},$$

在行列式第 n 行的元素中，除了 a_{nn} 可能不是零外其他全部为零，因此，仅需要考虑 $j_n=n$ 的

那些项. 在第 $n-1$ 行中,除了 $a_{n-1,n-1}$ 和 $a_{n-1,n}$ 可能不是零外,其他元素全部为零. 因此,j_{n-1} 只有选取 $n-1$ 和 n 这两种可能. 由于 $j_n=n$,因而,j_{n-1} 就不能选取 n,只能选取 $n-1$,即 $j_n=n-1$. 这样逐步推下去,直到 j_1 也只能选取 1 这一种可能,即 $j_1=1$. 由此可以看出,在展开式中除了

$$a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$$

这一项外,其余的项全部为零. 而 $t(12\cdots n)=0$,故得

$$D=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$$

特殊地,主对角线元素以外的其他元素全为零的行列式称为对角形行列式. 即有

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

同理,可知下三角行列式

$$D=\begin{vmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{1n} \\ 0 & 0 & \cdots & a_{2,n-1} & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & a_{n-1,2} & \cdots & a_{n-1,n-1} & a_{n-1,n} \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{n,n-1} & a_{nn} \end{vmatrix}=(-1)^{\frac{(n-1)n}{2}}a_{1n}a_{2,n-1}\cdots a_{n1},$$

特殊情况有

$$\begin{vmatrix} 0 & \cdots & 0 & a_{1n} \\ 0 & \cdots & a_{2,n-1} & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix}=(-1)^{\frac{(n-1)n}{2}}a_{1n}a_{2,n-1}\cdots a_{n1}.$$

例 1-7 由行列式定义计算

$$f(x)=\begin{vmatrix} 2x & x & 1 & 2 \\ 1 & x & 1 & -1 \\ 3 & 2 & x & 1 \\ 1 & 1 & 1 & x \end{vmatrix}$$

中 x^3 的系数,并说明理由.

解 由行列式定义,$f(x)$ 中的一般乘积项可设为 $x_{1j_1}x_{2j_2}x_{3j_3}x_{4j_4}$,只有当第 2,3,4 行中所取的元素恰好有两个含 x 时,上述乘积项才可能产生出 x^3 的项,所以排列 $j_1j_2j_3j_4$ 可能为 4231,3214,2134 三种,这三种中只有第三种才真正出现 x^3 的项,所以相应的项为 $(-1)^{\tau(2134)}x^3=-x^3$,则系数为 -1.

习 题 1.1

1. 计算下列行列式:

(1) $\begin{vmatrix} \cos x & -\sin x \\ \sin x & \cos x \end{vmatrix}$; (2) $\begin{vmatrix} a & 0 & b \\ 0 & e & 0 \\ c & 0 & d \end{vmatrix}$; (3) $\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & 0 \\ y_1 & y_2 & 0 \\ 0 & 0 & z \end{vmatrix}$.

2. 计算下列排列的逆序数:

(1) 523146879; (2) $n,n-1,\cdots,2,1$.

3. 确定六阶行列式

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{16} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{26} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{61} & a_{62} & \cdots & a_{66} \end{vmatrix}$$

中以下各乘积的符号:

(1) $a_{23}a_{31}a_{42}a_{56}a_{14}a_{65}$; (2) $a_{21}a_{13}a_{32}a_{55}a_{64}a_{46}$.

4. 用定义计算行列式:

(1) $\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 5 & 0 \\ 7 & 6 & 10 & 4 \end{vmatrix}$; (2) $\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \end{vmatrix}$.

1.2 n 阶行列式的性质

如果 n 较大时,直接按定义计算 n 阶行列式是比较麻烦的,然而灵活利用 n 阶行列式的基本性质和行列式按行(列)展开定理,就可以大大简化 n 阶行列式的计算.

1.2.1 n 阶行列式的基本性质

定义 1.2.1 将行列式 D 的行、列位置互换后所得到的行列式称为 D 的转置行列式,记为 D^{T},即若

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

则

$$D^{\mathrm{T}}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

性质 1.2.1 行列式 D 与它的转置行列式 D^{T} 相等,即 $D=D^{\mathrm{T}}$.

证 将 $D=\det(a_{ij})$ 的转置行列式记作

$$D^{\mathrm{T}}=\begin{vmatrix} b_{11} & b_{21} & \cdots & b_{n1} \\ b_{12} & b_{22} & \cdots & b_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{1n} & b_{2n} & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix},$$

则 $b_{ij}=a_{ji}(ij=1,2,\cdots,n)$. 由定义知

$$D^{\mathrm{T}}=\sum(-1)^t b_{1p_1}b_{2p_2}\cdots b_{np_n}=\sum(-1)^t a_{p_11}a_{p_22}\cdots a_{p_nn},$$

于是,

$$D=\sum(-1)^t a_{p_11}a_{p_22}\cdots a_{p_nn}=D^{\mathrm{T}}.$$

读者可以用数学归纳法和行列式的展开形式证明此性质.

这个性质也说明在行列式中行与列具有等同的地位,即凡是行列式对行成立的性质,对列也成立.

性质 1.2.2 行列式中两行(列)互换后,行列式的值改变符号.

证 记

$$D=\begin{array}{c}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \cdots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \cdots & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}\end{array}\begin{array}{l} \\ \\ \text{第 } i \text{ 行} \\ \\ \text{第 } j \text{ 行} \\ \\ \\ \end{array}$$

又记

$$D_1=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \cdots & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \cdots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \cdots & \vdots \\ b_{i1} & b_{i2} & \cdots & \cdots & b_{in} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \cdots & \vdots \\ b_{j1} & b_{j2} & \cdots & \cdots & b_{jn} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \cdots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix},$$

即 D_1 由行列式 D 互换第 i 行与第 j 行得到. 由定义,

$$D=\sum(-1)^t a_{1p_1}\cdots a_{ip_i}\cdots a_{jp_j}\cdots a_{np_n},$$

而

$$\begin{aligned} D_1 &= \sum(-1)^t b_{1p_1}\cdots b_{ip_i}\cdots b_{jp_j}\cdots b_{np_n} \\ &= \sum(-1)^t a_{1p_1}\cdots a_{jp_i}\cdots a_{ip_j}\cdots a_{np_n} \\ &= \sum(-1)^{t_1} a_{1p_1}\cdots a_{ip_j}\cdots a_{jp_i}\cdots a_{np_n}. \end{aligned}$$

其中 $t=t(p_1\cdots p_i\cdots p_j\cdots p_n)$, $t_1=t(p_1\cdots p_j\cdots p_i\cdots p_n)$. 由定理 1.1.1, t_1 与 t 的奇偶性正好相反,故 $(-1)^t=-(-1)^{t_1}$,所以 $D_1=-D$.

性质 1.2.3　若行列式中有两行(列)元素完全相同,则行列式值等于零.

证　设行列式

$$D=\begin{array}{l} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \cdots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \cdots & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \end{array}\begin{array}{l} \\ \\ \text{第 } i \text{ 行} \\ \\ \text{第 } j \text{ 行} \\ \\ \\ \end{array}$$

将 i 行与 j 行交换,由性质 1.2.2 得 $D=-D$,于是 $2D=0$,即 $D=0$.

性质 1.2.4　以数 k 乘行列式的某一行(列)中所有元素,就等于用 k 去乘此行列式,即

$$k\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ ka_{i1} & ka_{i2} & \cdots & ka_{in} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

此为试读,需要完整PDF请访问: www.ertongbook.com