

应用科学学报

JOURNAL OF APPLIED SCIENCES

第二卷

VOL. 2

第四期

NO. 4

1984

《应用科学学报》编辑委员会编辑
上海科学技术出版社出版

编 辑 委 员 会

主 编	黄宏嘉				
副 主 编	邹元熾	夏道行	汤定元	方俊鑫	吴鸿适
编 委	丁维钰	王乃粒	王生洪	韦 钰	严义埧
	张美敦	陈益新	林福成	欧阳邕	姚慧海
	郭本瑜	郭嘉荣			

编 辑 部

负 责 人	汪国铎	杜晓庄			
编 辑 人 员	吴国忠	陈锡培	顾珊繁	凌 岭	许新民
	林基青	李道平			
特 约 编 辑	夏国智	毕东海	欧昌平		

应用科学学报

第二卷 第四期

(本期执行编委: 韦钰)

目 录

具有微结构的材料的多极力学.....R. K. T. Hsieh (283)

·成象技术·

利用微波进行计算机辅助断层成象朱龙龙 顾本立 韦钰 (294)

晶体中原子排列的高分辨电子显微镜观察叶恒强 (302)

300~700 兆赫透射式扫描声学显微镜的研究和试制.....陈戈林

李德杰 张凤禧 罗淑云 应嘉年 周宏朴 胡思正 金芬年 周启博 王华俭 张克潜 (310)

一种用于声学显微镜的新型换能聚焦系统——玻璃金属球面换能器

.....李德杰 陈戈林 张克潜 (322)

激光全息透镜型干涉仪图象畸变的研究与同轴全息透镜型干涉仪的设计...贺安之 (331)

数字超声多频全息欧阳义同 周子文 (338)

单模光纤弯曲时波导几何效应双折射的摄动分析方锡生 林宗琦 (345)

用推迟势方法研究导波光场的性质.....赖祖猷 方俊鑫 (354)

掺杂多晶 $n\text{-TiO}_2$ 光阳极光谱响应的扩展.....史苑蓂 戴晓荣 高清华 孙壁嫫 (361)

研 究 简 报

一种快速建模的方法王志明 张钟俊 (368)

拓扑空间的极大(小)值定理在生物学中应用陆寿坤 (373)

JOURNAL OF APPLIED SCIENCES

Vol. 2, No. 4, October, 1984

(Editor of This Special Issue: Wei Yu)

CONTENTS

Multipole Mechanics of Materials with Microstructure *R. K. T. Hsieh* (293)

•Imaging Techniques•

Microwave Computerized Tomography *Zhu Longlong Gu Bengli Wei Yu* (301)

Observations of the Atomic Arrangement in Crystals by Means of High Resolution Electron
Microscopy.....*Ye Hengqiang* (309)

Research and Development of a Transmission Scanning Acoustic Microscope Operating at
300~700 MHz *Chen Gelin Li Dejie Zhang Fengxi Luo Shuyun Ying Jianing
Zhou Hongpu Hu Sizheng Jin Fennian Zhou Qibo Wang Huajian Zhang Kegian* (321)

A New Transducer-Focusing System for Acoustic Microscope-Glass-Metal Based Concave
Spherical Transducer.....*Li Dejie Chen Gelin Zhang Kegian* (330)

The Analysis of Image Deformation in Holographic Lens Type of Interferometer and the
Design of Coaxial Holographic Lens Type of Interferometer.....*He Anzhi* (337)

Numerical Multifrequency Ultrasonic Holography.....*Ouyang Xitong Zhou Ziwen* (344)

Birefringence in Curved Single-Mode Optical Fibers due to Waveguide Geometry Effect-
Perturbation Analysis *Fang Xisheng Lin Zhongqi* (353)

Analysis of the Optical Guided-Wave Fields by the Retarded-Potential Method.....
..... *Lai Zuyou Fang Junxin* (360)

Extending the Spectral Response of Doped Polycrystalline n-TiO₂ Photoanodes.....
..... *Shi Yuanxiang Dai Xiaorong Gao Qinhua Sun Birou* (367)

RESEARCH NOTES

A Method of Fast Modeling.....*Wang Zhizhong Zhang Zhongjun* (372)

Application of the Maximum (or Minimum) Theorem of Topological Space to Biology.....
..... *Lu Shoukun* (376)

具有微结构的材料的多极力学*

R. K. T. Hsieh

(瑞典皇家技术学院)

提 要

本文论述关于多极力学描述方面的若干近期结果。这一描述,包含着以具有不同多极阶的虚体力和力偶产生的影响,来近似地描写一种材料的微结构的影响。

一、引 言

近年来研究者们理解到:科学和工程问题的许多最优解都具有边缘性质。为了发展这一类科学,一些研究所和中心被创立起来,组织了许多学术会议,且使统一理论的发展得到越来越大的兴趣,例如见[1], [2], 其中我们可以指出“组合学”(Synergetics), 它讨论由许多子系统构成的系统以及在外部参数的临界点上它们的宏观性质如何变化的问题,其所依据的两个主要数学原理是:在临界点上各种极其复杂的系统的动力学仅由极少个模态(称为顺序参数的)所控制;而靠近这些临界点,所有其余的自由度则由屈从原则所支配,参见如[1], 第21页; [3], “晶格缺陷的规范理论”,就是从杨-Mills 普适规范理论推求具有位错和旋错场的物体的完全连续介质理论、弹性理论的拉格朗日是保持不变的,因而变分原理可以应用。已经证明:一阶近似给出经典弹性理论,而二阶和三阶近似各导出位错和旋错的模型理论,参见如[1], 第67页; [4], “均匀化过程理论”,则是以均匀材料来近似具有周期结构的非均匀材料。当着周期的尺度 E 趋于0时,这一近似是有效的。在某些情况下采用多重尺度型变量可使人们得到系统的状态就 E 的幂次展开中的高阶项。利用这一方法,复合材料及含孔材料已被成功地进行处理,参见如 Lions[1], 第81页; [5]。

还有其它一些统一理论,如基于分枝的特征值问题,或者关于某一参数的依赖性,偏微分方程和非线性现象的研究,参见如[6]; 同伦理论拓扑地处理材料介质中可能的局部结构对于任意材料系统的相异性,这一系统可视为具有相应局部结构的材料模型,参见如[7]。

本文论述具有微结构的材料多极描述方面的某些近期结果,这些微结构的发源可能是由于电磁机制、复合材料、缺陷,……。这里的方法是以虚多极体力和体偶的因素来近似具有微结构的物质的力学。这方面的初始概念可在电磁学的理论中找到,参见如 Jackson 的著作^[8]。

1984年2月10日收到

* 复旦大学欧阳颢教授推荐和翻译

二、电磁学的多极展开

如所知, 电磁场是由 Maxwell 方程组所支配的, 对真空中的静力学情况有 (MKSA 制单位):

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \underline{\underline{E}} &= \frac{1}{\epsilon_0} \rho, & \nabla \cdot \underline{\underline{B}} &= 0 \\ \nabla \times \underline{\underline{E}} &= 0, & \nabla \times \underline{\underline{B}} &= \mu_0 \underline{\underline{J}}\end{aligned}\quad (1)$$

利用 Helmholtz 定理, 这些方程等价于

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{V_s} \frac{\rho}{r} dV, \quad \underline{\underline{A}} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{V_s} \frac{\underline{\underline{J}}}{r} dV \quad (2)$$

其中 $\underline{\underline{E}}$ 是电场, $\underline{\underline{B}}$ 是磁场, ρ 是体自由电荷密度, $\underline{\underline{J}}$ 是电流密度, ϵ_0 是介电常数, μ_0 是磁导率, V_s 是包含电荷和电流分布的区域.

公式化 (1) 常称为两个散度和两个旋度关系, 而公式化 (2) 称为以势 ϕ 和 $\underline{\underline{A}}$ 表达的 Maxwell 方程组.

我们在这里将采取的描述方程 (1) 和 (2) 的一个观点是将方程 (1) 和 (2) 的右端项均视为原因或源项. 这样, 多极展开的概念便可说明如后. 我们首先处理对真空静电学的应用, 参见例如方程 (2). 考虑静止中的源电荷的连续分布 (参见图 1 和 2, a).

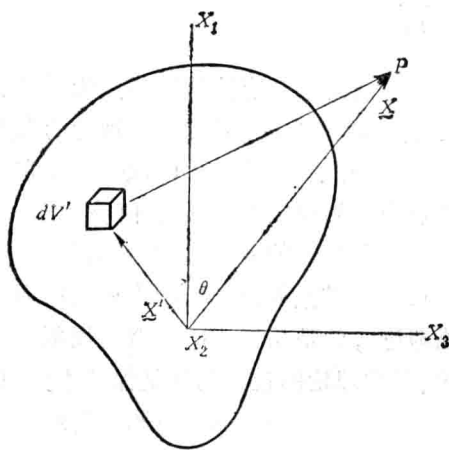


图 1

对于源区域 V_s 外的场 P , 势 $\phi(x)$ 可绕一个适当选取的展开为级数 (多极展开) (体

元 dV 虽宏观上很小, 但包含着极大数目的源电荷), 全域 V 的势方程于是为

$$\begin{aligned}\varphi(x) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0|x|} \int_{V_s} \rho(x') dV' + \frac{1}{4\pi\epsilon_0|x|^2} \int_{V_s} \rho(x') x' \cos\theta dV' \\ &+ \frac{1}{4\pi\epsilon_0|x|^3} \int_{V_s} \rho(x') \left(\frac{3\cos^2\theta - 1}{2} \right) dV' + O\left(\frac{1}{|x|^4}\right)\end{aligned}\quad (3)$$

其中记号 $O(1/|x|^4)$ 表示四阶以上的小量, 当着展开一个表式为级数时, 人们必须确定此级数实际上是收敛的.

级数 (3) 的各项称为势的电磁多极矩, 第一项称为单极项, 其中词头“单”来自 $2^n=1$, 当 $n=0$ 时, 第二项称为偶极项、第三项称为四极项, 其次为八极, 等等 (参见图 3), 可以证明: 任意电荷分布的最低非零多极矩之值是是与坐标原点的选取无关的, 但是所有高阶多极矩一般确实依赖于原点的位置. 远离 V 处, 所产生的势能够用最低非零多极矩来近似. 靠近体积 V 处, 人们可以用方程 (2) 中的 φ 式代替 (3).

从方程 (1) 和 (2) 可见: 当着静态条件成立时, 电与磁是两个独立的然而平行的领域. 应用于真空中磁学的一个类似处理给出磁向量势为

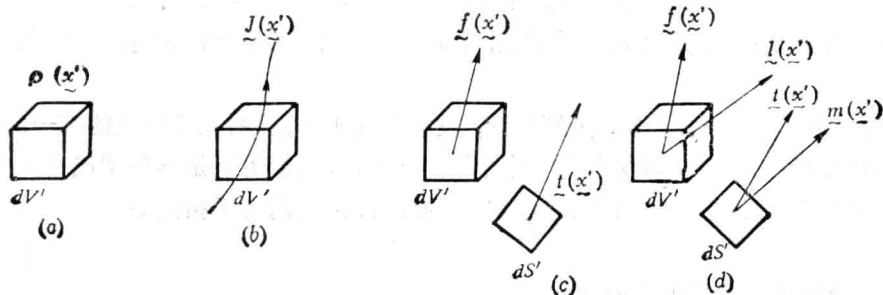


图 2

$$\underline{A}(\underline{x}) = \frac{\mu_0}{4\pi|\underline{x}|} \left[\int_{V_s} \underline{J}(\underline{x}') dV' + \frac{1}{|\underline{x}|} \int_{V_s} \underline{J}(\underline{x}') \left(\frac{\underline{x}}{|\underline{x}|} \cdot \underline{x}' \right) dV' + \dots \right] \quad (4)$$

其中 $\underline{J}(\underline{x})$ 是 $\underline{x}'$ 处源微元 dV' 中的流密度(参见图 1 和 2, b). 这一展开的第一项称为单极项, 如同在相应的静电展开的情况中那样. 但是这里由于尚未发现磁极, 它总是零.

对于静止材料中具有局部化电荷和电流分布的区域 V_s , 方程 (1) 和 (2) 将被修正. 然而, 对许多材料(线性、各向同性、不太大的电场和磁场), 用介质代替真空仅引起以材料的介电常数 ϵ 和磁化率 μ 代替 ϵ_0 和 μ_0 (这里的“原因” ρ 包含着自电和极化电荷, 而 $\underline{J}$ 包含常规和磁化电流). 对于可变形介质, 情景远为复杂, 可找参考文献, 例如 [9].

对于时间变化的情况, 电和磁是相互联系的, 试验发现散度方程维持不变, 但对于旋度方程须加上额外的项. 还有, 必须另外解释势场的被积函数.

除去作为一种统一途径处理电磁场外, 电磁场多极展开在处理局部电荷和电流分布引起的辐射方面是特别有帮助的^[10~11].

三、力学中的多极描述

实验证实, 电磁学和力学间有相互作用, 例如, 有下面的事实: 电子是具有质量的且铁磁体的长度是被磁化度所影响的 (Joule, 1842). 因此, 很自然, 研究者们试图应用多极概

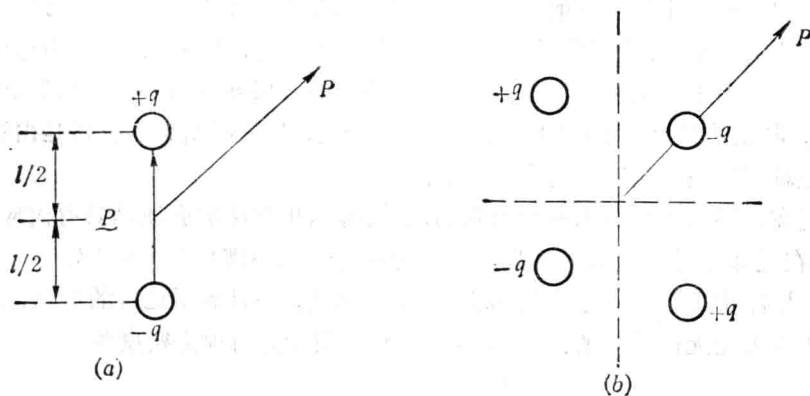


图 3

念于力学中. 力学是讨论在体载荷作用下物质的运动的. 长程作用机制是由体力 f_i 表达的, 可能的话, 还有体力偶 I_i . 短程作用机制是由表面力 t_i (应力) 表达的, 还可能有力偶 m_i (偶应力).

现在让我们考察一种介质, 为简单计, 设它是无限体, 作用在物质上的唯一载荷将是区域 V 中充满着局部力和力偶分布 (图 1 和图 2, c), 它们可以是体积型或表面型的 (图 1 及图 2, c 和 2, d). 进一步, 我们考虑在 V 的外部, 到处均有平衡关系

$$\sigma_{ij,i} = -f_j \quad (5)$$

或者, 如果物质能够支持力偶的话,

$$\begin{aligned} \sigma_{ij,i} &= -f_j \\ \varepsilon_{jmn}\sigma_{mn} + m_{ij,i} &= -I_j \end{aligned} \quad (6)$$

其中 $t_i = \sigma_{ij}n_j$ 和 $m_i = m_{ij}n_j$, σ_{ij} 为应力张量, m_{ij} 为偶应力张量, n_j 为表面的单位法向量. 在任意点 x , 由于力学因素引起的位移 $u_i(x)$ 能用 Green 函数表式得到 (图 2, c):

$$u_i(x) = \int G_{ij}^F(x, x') dF_j(x') \quad (7)$$

Green 函数 G_{ij}^F 是由于 j 方向的单位力引起的 i 方向的位移. 对于 Hooke 材料, 有

$$C_{iklm}G_{lj,mi}^F + \delta_{kj}\delta(x-x') = 0 \quad (8)$$

其中 C_{iklm} 是材料常数张量, δ_{kj} 是 Kronecker 记号, δ 是 Dirac δ -函数.

将式 (7) 绕适当选取的原点展为 Taylor 级数, 有

$$\begin{aligned} u_i(x) &= G_{ij}^F(0, x) \left[\int_{V'} f_j(x') dV' + \int_{S'} t_j(x') dS' \right] \\ &+ G_{ij,m'}^F(0, x) \left[\int_{V'} f_j(x') x'_m dV' + \int_{S'} t_j(x') x'_m dS' \right] \\ &+ \frac{1}{2} G_{ij,m'n'}^F(0, x) \left[\int_{V'} f_j(x') x'_m x'_n dV' + \int_{S'} t_j(x') x'_m x'_n dS' \right] + \dots \end{aligned} \quad (9)$$

这里 m' 表示 $\partial/\partial x'_m$.

对于一个无限体, Green 函数 $G_{ij}(0, x)$ 是比例于 $\frac{1}{|x|}$ 的. 因此, 类似于电学, (9) 中第一个括号内的系数一般称为力学单极, 第二个括号内系数称为力学偶极, 等等. 然而, 如果人们仅考虑建立一个平衡系统的力学载荷, (9) 中的第一项总是零, 人们可以称第二个括号中的系数为力学单极. 这样的单极已在例如 [12] 中用过, 他的讨论中认为这里如同在静电学中一样没有力矩作用在单极上. 也许磁向量势的多极展开 (4) 中的第二项可以称为磁单极. 自然, 电磁学和力学多极间的类比是不完全的, 只要指出学位移是由物质运动决定的而电磁场在真空中也存在这点就够了.

如果现在用局部力分布来模拟材料的微结构, 这里意味着介质是具有内应力的, 方程 (5) 的右端在无体力时必须为零且弹性材料的应力一般不满足 Hooke 律.

然而, 人们可以定义内局部力分布 $f_i^{(\eta)}$ 为虚体力, 并且利用已有的方法, 特别是多极展开. 这里应力是无微结构的. 对 Hooke 材料我们于是有虚力密度为

$$f_i^{(\eta)} = -C_{iklm}u_{l,mk}^{(\eta)} \quad (10)$$

其中位移 $u_i^{(\eta)}(x)$ 系由表式 (7), (9) 给出.

对于能够支持力偶的材料, 一般情况要求: 转动位移 $\phi_i(x)$ 必须加到平移位移 $u_i(x)$ 上去(图 2, d). 于是我们有

$$\begin{aligned} u_i(x) &= \int G_{ij}^F(x, x') dF_j(x') + \int G_{ij}^L(x, x') dL_j(x') \\ \phi_i(x) &= \int g_{ij}^F(x, x') dF_j(x') + \int g_{ij}^L(x, x') dL_j(x') \end{aligned} \quad (11)$$

其中 $G_{ij}^F, G_{ij}^L, g_{ij}^F, g_{ij}^L$ 是四个 Green 张量函数.

对于微极弹性固体, 它们满足^[13]

$$\begin{aligned} C_{iklm} G_{ij,mi}^F - 2\alpha \varepsilon_{ikm} g_{mj,i}^F + \delta_{kj} \delta(x \sim x') &= 0 \\ C_{iklm} G_{ij,mi}^L - 2\alpha \varepsilon_{ikm} g_{mj,i}^L &= 0 \\ D_{iklm} g_{ij,mi}^F + 2\alpha \varepsilon_{kmn} G_{mj,n}^F - 4\alpha g_{kj}^F &= 0 \\ D_{iklm} g_{ij,mi}^L + 2\alpha \varepsilon_{kmn} G_{mj,n}^L - 4\alpha g_{kj}^L + \delta_{kj} \delta(x - x') &= 0 \end{aligned} \quad (12)$$

其中 D_{iklm} 和 α 是与微极性相关的弹性常数, ε_{ikm} 是排列记号.

(11) 绕原点的 Taylor 展开给出

$$\begin{aligned} u_i(x) &= G_{ij}^F(0, x) \left[\int_{V'} f_j(x') dV' + \int_{S'} t_{ij}(x') dS' \right] \\ &+ G_{ij,m'}^F(0, x) \left[\int_{V'} f_j(x') x'_m dV' + \int_{S'} t_j(x') x'_m dS' \right] + \dots \\ &+ G_{ij}^L(0, x) \left[\int_{V'} l_j(x') dV' + \int_{S'} m_j(x') dS' \right] \\ &+ G_{ij,m'}^L(0, x) \left[\int_{V'} l_j(x') x'_m dV' + \int_{S'} m_j(x') x'_m dS' \right] + \dots \\ \phi_i(x) &= g_{ij}^F(0, x) \left[\int_{V'} f_j(x') dV' + \int_{S'} t_j(x') dS' \right] \\ &+ g_{ij,m'}^F(0, x) \left[\int_{V'} f_j(x') x'_m dV' + \int_{S'} t_j(x') x'_m dS' \right] \\ &+ g_{ij}^L(0, x) \left[\int_{V'} l_j(x') dV' + \int_{S'} m_j(x') dS' \right] \\ &+ g_{ij,m'}^L(0, x) \left[\int_{V'} l_j(x') x'_m dV' + \int_{S'} m_j(x') x'_m dS' \right] + \dots \end{aligned} \quad (13)$$

对于建立一个平衡系统的力学载荷, 我们有

$$\begin{aligned} \int_{V'} f_j(x') dV' + \int_{S'} t_j(x') dS' &= 0 \\ \int_{V'} l_j(x') dV' + \int_{S'} m_j(x') dS' + \int_{V'} \varepsilon_{jmn} x'_m f_n(x') dV' + \int_{S'} \varepsilon_{jmn} x'_m t'_n(x') dS' &= 0 \end{aligned} \quad (14)$$

这说明项 $G_{ij}^L(0, x)$ 和 $g_{ij}^L(0, x)$ 的多极系数能被消为项 $F_{ij,m'}^F(0, x)$ 和 $g_{ij,m'}^F(0, x)$ 的多极系数. 计及局部力和力偶分布的最简模型, 能用下面的张量表示:

$$\begin{aligned} P_{jm}^F &= \int_{V'} f_j(x') x'_m dV' + \int_{S'} t_j(x') x'_m dS' \\ P_{jm}^L &= \int_{V'} l_j(x') x'_m dV' + \int_{S'} m_j(x') x'_m dS' \end{aligned} \quad (15)$$

代替(6), 我们也能用虚力 $f_i^{(f)}$ 和虚力偶 $I_i^{(f)}$ 给出

$$\begin{aligned} f_k^{(f)}(\mathcal{E}) &= -C_{iklm}u_{i,m}^{(f)} + 2\alpha\epsilon_{ikm}\varphi_{m,i}^{(f)} \\ l_k^{(f)}(\mathcal{E}) &= -D_{iklm}\varphi_{i,m}^{(f)} - 2\alpha\epsilon_{ikm}u_{m,n}^{(f)} + 4\alpha\varphi_k^{(f)} \end{aligned} \quad (16)$$

其中位移 u_i , φ_i 由方程(11), (13)给出.

对于张量(15), 它可写为

$$\begin{aligned} f_k^{(f)}(\mathcal{E}) &= -P_{ks}^F\delta, \quad S(\mathcal{E}-\mathcal{E}') \\ l_k^{(f)}(\mathcal{E}) &= -P_{ks}^L\delta, \quad S(\mathcal{E}-\mathcal{E}') - \epsilon_{ksn}P_{ns}^F\delta(\mathcal{E}-\mathcal{E}') \end{aligned} \quad (17)$$

在应用多极展开于某些特殊情况之前, 我们说明一下力学多极的历史. Kröner^[14] 是第一个引进弹性偶极力的人. Siems^[15] 应用弹性多极的概念模拟点缺陷. Kovács^[12] 证明: 当人们要与静电学完全类似时, 所有物理缺陷能够描述为弹性偶极或单极的表面分布. Hsieh, Vörös 和 Kovács^[13] 将多极理论发展到弹性连续介质, 其中微结构是由刚体组成. Hsieh^[16] 还证明: (非局部)长程作用能够改善弹性场沿着奇性线——例如位错线——的连续介质近似. 基本的想法是缺陷能被模拟为局部力和力偶分布. 为简单起见, 我们限于讨论最低阶非零多极的情况. 说 S 是多极弹性介质中任意选取的曲面 S , 且经受一个变换使得在点 $\mathcal{E}'$ 处的微元 dS'_i 具有位移 $a_k(\mathcal{E}')$ 和旋转 $\Omega_k(\mathcal{E}')$. 这一变换的结果使曲面变为多极弹性奇性源, 定义如下:

$$\begin{aligned} dP_{im}^F &= C_{iklm}a_k(\mathcal{E}')dS'_i \\ dP_{im}^L &= D_{iklm}\Omega_k(\mathcal{E}')dS'_i \end{aligned} \quad (18)$$

对于由曲面截线(线缺陷)定义的缺陷, 可作如下处理: 在材料中由曲线 C 围成的曲面 S_C 上作一切割, 曲面的正法向由右手法则与 C 相联系. 假若点 $\mathcal{E}'$ 处原来重合的正、负曲面的点相对移开 $a_k^L(\mathcal{E}')$, 则称为线缺陷的一类特殊的缺陷被作出来. 假若 $a_k^L(\mathcal{E}')$ 由相对于曲面的刚体运动给出, 那末就形成了一个位错或旋错, 于是在(18)中我们有

$$\begin{aligned} a_k(\mathcal{E}') &= b_k + \epsilon_{kpq}\Omega_p(x'_q - x_q^0) \\ \Omega_k(\mathcal{E}') &= \Omega_k \end{aligned} \quad (19)$$

这里 b_k 为常量(Burgers 向量), Ω_p 是绕一个轴(Franck 向量)的常旋转, 又 $x'_q - x_q^0$ 是轴上任一点 x_p 到曲面 S_C 上点 x'_q 的向量, 表式(19)通过弹性单极(18)定义了 Volterra 型线缺陷^[17].

对于均匀体缺陷, 即它们的体积不同于基体中的空洞的体积, 如同 Eshelby 给出的相似处理可以应用[18]. 在目前的记号下, 它们被定义为闭曲面缺陷. 特别地, 我们有

$$\begin{aligned} a_i(\mathcal{E}') &= \begin{cases} u_i^T(\mathcal{E}'), & \text{当 } \mathcal{E}' \in V \text{ 时} \\ 0, & \text{其余处} \end{cases} \\ \Omega_i(\mathcal{E}') &= \begin{cases} \phi_i^T(\mathcal{E}'), & \text{当 } \mathcal{E}' \in V \text{ 时} \\ 0, & \text{其余处} \end{cases} \end{aligned} \quad (20)$$

$u_{m,1}^T$ 和 $\phi_{m,1}^T$ 为 Eshelby 无应力变换, 为了得到均匀体缺陷的最简多极描述, 必须将方程(20)代入(19).

非均匀性和非均匀体缺陷可同样处理, 这包括缺陷中微弹性常数 C_{iklm} 和 D_{iklm} 不同于基体之 C_{iklm}^* 和 D_{iklm}^* , 且在物体中如没有其它应变场时不存在表面点之位移; 还有, 具有永久和诱导单极的缺陷情况, 这也适用于点缺陷的情形.

理论上, 这些缺陷的应力和其它特性的推导是重要的, 因为它们对固体的宏观性质有

强烈影响(高纯物质可能例外),它们总是存在于固体中,其形式为沉淀,溶质原子,……。类似地,位错也影响固体的宏观性质,并且它还帮助我们理解塑性变形过程,参见如[19]。最近,已经证明:裂纹以及热缺陷也可用类似方法进行模拟^[20],所有这些缺陷是内应力的源泉,可用多极描述来模拟。

如果还有一个附加的应变源 A ,则可导出多极相互作用能,且人们在方程(10)和(16)中须加上相互作用力和力偶。

我们若问:在固体力学中多极展开的好处是什么?很明显,它给出处理缺陷的统一方法。一旦单极被给定,例如(19)和(20),人们能立即得到位移,相互作用能,相互作用力等等。自然,由于结果系以积分形式给出,在得到数量结果之前还有许多工作要做。又缺陷间的相互作用性质也可用有理的方法处理^[21]。Miller 和 Heald^[22]曾用上述的多极展开来计算面心立方金属中空穴周围的晶格畸变。已经证明,在一级近似内,空穴所关联的松弛体积能用弹性常数表达。得到的数值位移场与连续介质弹性相比差别为 15%。

连续的非局部方法还可用来得到应力场在靠近奇点处的较好近似。计入长程连续介质相互作用(非局部弹性)的理论之一已由 Eringen 作出^[23]。对于多极描述,可以看到:这一理论通过引入非局部体载荷^[13]:

$$\begin{aligned} F_k(x) &= \int \alpha(x-x'') f_k(x'') dV'' \\ L_k(x) &= \int \alpha(x-x'') l_k(x'') dV'' \end{aligned} \quad (21)$$

化为经典局部介质的情况。对于单极,方程(21)变为

$$\begin{aligned} F_i(x) &= -P_{ij}^F(x') \alpha_j(x-x') \\ L_i(x) &= -P_{ij}^L(x') \alpha_j(x-x') - \varepsilon_{ipq} P_{qp}^F(x') \alpha(x-x') \end{aligned} \quad (22)$$

其中 f_k 和 l_k 为局部体载荷。 $\alpha(x')$ 是具有有界支撑 B 的 x' 的连续函数,在 B 中 $\alpha > 0$, 表征着非局部相互作用,且依赖于距离 $|x-x'|$ 。在 B 的边界 ∂B 上及其外部, $\alpha = 0$ 且满足正则条件

$$\int \alpha(|x-x'|) dV(x') = 1 \quad (23)$$

方程(22)中的结果说明:在非局部微极弹性中单极的效应能够用非奇异体载荷来表征。对经典非局部弹性来说这也是正确的^[24]。因此,非局部应力的性质之一是不具有奇性,从而有可能去解决一些尚未解决的弹性问题,例如,膨胀中心的相互作用。如已经指出的那样,也有非局部的其它一些定义,参见例如 Bullough, Norgett 和 Webb^[25]。

在流体力学中,人们的兴趣是决定位移和应力场。下面我们更多地评述 Liao 和 Krueger^[26]一文关于绕不同尺寸球体缓慢粘流的多极展开计算的若干结果。研究粒子在流体中的缓慢粘性运动已经有很长的历史了,这包括 Stokes 关于阻力的经典工作,例如见[27]。二粒子问题是不易处理的,但 Stimson 和 Jefferey^[28]用无穷和数给出了以相同速度运动的两个不等球上的阻力。Cooley 和 O'Neil^[29]给出了在不同分离下沿自己中心线运动的各种不同尺寸球体阻力的数值结果。Youngren 和 Acrivos^[30]利用线积分方程作出了粒子表面上小 Stokes 分布的一个较普遍的格式。他们利用这一方法计算椭球体和 Benzene 状体的旋转摩擦系数^[31]以及计算粘性流中一个气泡的形状^[32]。为了计算,

积分方程化为表面应力 $t(x)$ 的一组线代数方程, 这里几何形状和流体在粒子表面上的速度是已给的. 他们指出, 这一方法的一个主要好处是代数方程的矩阵仅须求逆一次. 然而, 对每一几何上的变化, 矩阵必须求逆. 考虑到这一复杂性, Liao 和 Krueger^[36] 选取了配位法, 利用 O'Brien 的配位法^[33] 也得到一组线代数方程, 他将流函数展为球坐标中可分离解的截断级数. Gluckman, Pfeffer 和 Weinbaum^[34] 采用流函数的一个类似表式计算沿流体流动方向排列的两个或多个相等球体的阻力. 在配位方法中流函数近似为多叶扰动的截断级数. 通过添加高阶多极, 表式的精度系统地得到改进. 表式中的系数由在有限个点上满足边界条件得以决定, 即求出一个有限的线性方程组. 在 [26] 中这一方法被推广到不同样粒子的情况. 考虑沿 x 轴运动的两个球体, 利用流函数 ψ , 对轴对称情况沿 x 轴的流体速度分量 U_x 和径向分量 U_r 被给为

$$U_x = \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r}, \quad U_r = -\frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial x} \quad (24)$$

对于记为 S 和 L 的两球体, 一般解为

$$\psi = \psi^S + \psi^L \quad (25)$$

对于扁球坐标, 函数 ψ^S 具有形式^[34]:

$$\begin{aligned} & [D_{2,s} p_s + B_{2,s} H_2(p_s) + D_{4,s} H_4(p_s)] I_2(q_s) + [D_{3,s} \\ & + B_{3,s} H_3(p_s) + D_{5,s} H_5(p_s)] I_3(q_s) \\ & + \left[\sum_{n=4}^{\infty} (D_{n,s} H_{n-2}(p_s) + B_{n,s} H_n(p_s) + D_{n+s,s} H_{n+2}(p_s)) \right] I_n(q_s) \end{aligned} \quad (26)$$

函数 ψ^L 由类似的表式给出. 这里 $I_n(q)$ 和 $H_n(q)$ 分别是一、二阶 Gegenbauer 函数, 它们是一、二阶 Legendre 函数 (P_n 和 Q_n) 的线性组合. 对于每个粒子, p 和 q 之值是联系于以该粒子中心为原点的坐标系的. 现在我们考虑当速度都等于 U 时粒子上的阻力. 以下式定义 λ_j (其中 j 或为 S 或为 L)

$$F_j = 6\pi\mu U b_j \lambda_j \quad (27)$$

其中 μ 为流体粘性系数. 在 [31] 中我们得到

$$\lambda_j = 2D_{2,j}/3c_j b_j U \quad (28)$$

因此, 总阻力完全由展开式 (26) 中第一个系数 D_2 决定. 然而, D_2 只有在应用包含有所有其它 D 和 B 的边界条件后才能找到. 截断方法的基本假设是: 当着计入额外的多极时 D_2 不会明显地改变. 对于相同粒子链, 在 [34] 中发现仅计及 D_2 , B_2 , D_3 和 B_3 项就给出精确到 2.5% 的结果. 论文 [26] 集中讨论两个不同尺寸和形状的粒子问题的收敛性. 通过计算展弦比从 0.1 到 10, 相对体积 V 从 1 到 10^3 的粒子阻力和速度, 这一方法的限制被研究了. 对于大的相体体积来说, 多极展开的收敛性是相当慢的, 要求量级为 $4 \times V^{1/2}$ 项多极才行. 当多极数目增加时阻力的急剧起伏就被发现了.

现在我们已经说明了各种不同的力学多极, 并指出它是发源于电磁理论的. 这可能使人考虑在同样的基础上处理两方面的场. 假若人们考虑力学效应和电磁效应能简单迭加, 则已经导出的方法立即可应用于电磁力学多极. 特别, 这在电磁静力学中是合适的 (参见方程 (3), (4), (9)). 这一近似在广泛地应用着, 然而, 一个比较严格的处理则要求对电磁力学相互作用的一种理解. 在最简单的情况中, 可从相互作用能导出一种相互作用力, 然后进行方程 (20) 那一节中描述的步骤. 真实的图象是, Maxwell 方程和力学方程都

将经受改变, 并且本构律将更为复杂. 然而必须注意, 至今尚没有万能的可接受的理论被推导出来, 参见 Hsieh 的 [9], [35].

到此为止, 我们已经处理了具有一组或二组源的情况. 这些情况给出了数量结果, 因而有时视为“物理的”. 假若人们要处理具有多个组的情况, 则必须应用某些平均方法. 下面我们给出关于高分子悬浮和磁悬浮的某些结果, 细节可在 Felderhof^[36~37], Hsieh^[38], Hercynski 和 Pienkowska^[39], Hinch^[40] 的文章中找到.

一个单一高分子(悬浮, ……)系由大量段落组成, 且被视为一个复杂形状的弹性体. 段落间是由刚性键相联的, 它们不影响流动特性. 高分子沉入流体中, 后者满足定常不可压缩流(微观的)的线性 N. S. 方程

$$\nabla \cdot \underline{\underline{\sigma}}^m = 0, \quad \nabla \cdot \underline{\underline{v}} = 0 \quad (29)$$

其中微观流体应力张量 $\underline{\underline{\sigma}}^m$ 在分子内部恒为零, 而在流体中给出为

$$\underline{\underline{\sigma}}^m = \eta_0 (\nabla \cdot \underline{\underline{v}}) - p \underline{\underline{I}} \quad (30)$$

这里 $\underline{\underline{v}}(x)$ 是流速, $p(x)$ 是微观流体压力, η_0 是纯溶剂粘性. 选取一个坐标架, 使得高分子为静止的, 其质量中心在原点, 那是方便的. 宏观应力可通过在分子构形整体上预取应力张量的平均及在含大数目 N 个高分子的体积中取平均而得. 用尖括号表示最后的均值, 总平均应力可写为

$$\langle \underline{\underline{\sigma}} \rangle = \eta_0 \langle \nabla \cdot \underline{\underline{v}} \rangle - \langle p \rangle \underline{\underline{I}} - \rho_p \int F_p(x) \underline{\underline{x}}' dV' \quad (31)$$

其中 ρ_p 是高分子数密度. 方程 (31) 右端第 3 项对应于前面说过的力学多极.

平均 N. S. 方程

$$-\nabla \langle p \rangle + \eta_0 \nabla^2 \langle \underline{\underline{v}} \rangle = -\langle \underline{\underline{F}} \rangle, \quad \nabla \cdot \langle \underline{\underline{v}} \rangle = 0 \quad (32)$$

的解于是为

$$\langle \underline{\underline{v}}(x) \rangle = \underline{\underline{v}}^0(x) + \int \underline{\underline{T}}(x - x') \langle \underline{\underline{F}}(x') \rangle dV' \quad (33)$$

其中 $\underline{\underline{T}}$ 是 Oseen 张量

$$\underline{\underline{T}}(x) = \frac{1}{8\pi\eta_0} \left(\frac{\underline{\underline{I}}}{|x|} + \frac{x \underline{\underline{x}}}{|x|^3} \right) \quad (34)$$

且 $\underline{\underline{v}}^0(x)$ 是未扰动流的速度场, $\langle \underline{\underline{F}} \rangle$ 为计及高分子存在的多极力, 它作用在点 $x'_1, x'_2, \dots, x'_N$ 上,

$$\underline{\underline{F}}(x) = \sum_{k=1}^N \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \underline{\underline{f}}_k^n(x'_k) : \nabla^n \delta(x - x'_k), \quad (35)$$

其中 $\underline{\underline{f}}_k^n$ 是 n 阶多极力, 又记号 $:$ 表示某种短缩.

(35) 的速度场为

$$\underline{\underline{v}}(x) = \underline{\underline{v}}^0(x) + \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=1}^N \frac{(-1)^n}{n!} \nabla^n \underline{\underline{T}}(x - x'_k) : \underline{\underline{f}}_k^n(x'_k) \quad (36)$$

局部速度定义为

$$\underline{\underline{v}}_{\text{局部}}(x) = \underline{\underline{v}}^0(x) + \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \sum_{n=0}^{\infty} \int_{\Delta - \varepsilon \underline{\underline{e}}(x)} \nabla^n \underline{\underline{T}}(x - x') : \left\langle \sum_{k=1}^N \underline{\underline{f}}_k^n(x'_k) \delta(x - x'_k) \right\rangle \quad (37)$$

$\underline{\underline{v}}_{\text{局部}}$ 和 $\langle \underline{\underline{v}} \rangle$ 之差能够算出, 且在无穷远处为零.

为了联系流场与多极展开式 (35) 的系数, 可考虑一个线性流场.

这一方法成功地应用于决定各种粘性常数, 还已证明对于刚性球, 结果与关于悬浮的有效粘性的 Einstein 公式相符.

四、结 束 语

在本文中, 多极矩场被用于描述各种材料的微观结构. 它是一个有力的边缘性的工具. 证明了: 用最低非零多极矩模拟微结构场将得出满意的结果, 以及通过增加高阶多极矩可改善表达式精度. 未来的趋向将是系统地研究此法相对于其它方法, 例如微结构的连续介质模型的界限.

参 考 文 献

- [1] O. Brulin and R. K. T. Hsieh (Eds.), *Continuum Models of Discrete Systems* 4, North Holland Pub. Co. (1981)
- [2] R. Burridge, S. Childress and G. Papanicolaou (Eds.), *Microscopic Properties of Disordered Media*, Springer Verlag (1981)
- [3] H. Haken (Ed.), *Proc. Int'l Symp. on Synergetics*, Springer Verlag (1981)
- [4] A. Kadic and D. Edelen, *A Gauge Theory of Dislocations and Disclinations*, North Holland Pub. Co. (1983)
- [5] J. L. Lions, *ZAMM*, **62** (1982) 251
- [6] C. Bardos, J. M. Lasry and M. Schatzman (Eds.), *Bifurcation and Nonlinear Eigenvalue Problems*, Springer Verlag (1980)
- [7] D. Rogula, *Homotopy in Continuum Physics in New Problems in Mechanics of Continua*, Eds. O. Brulin and R. K. T. Hsieh, SM Study No. 17, University of Waterloo Press (1983)
- [8] J. D. Jackson, *Classical Electrodynamics*, 2nd ed., John Wiley & Sons, Inc. (1975)
- [9] R. K. T. Hsieh, *Micropolarized and Magnetized Media in Mechanics of Micropolar Media*, Eds. O. Brulin and R. K. T. Hsieh, Int'l Center of Mechanical Sciences Courses, World Scientific Pub. Co. (1981) 187
- [10] C. P. Frahm, *J. Math. Phys.* **22** (1981) 484
- [11] V. Namias, *Am. J. Phys.* **4** (1979) 803
- [12] I. Kovács, *Physica* **94 B** (1978) 177
- [13] R. K. T. Hsieh, G. Vörös and I. Kovács, *Physica* **101 B** (1980) 201
- [14] E. Kröner, *Kontinuumstheorie der Versetzungen und Eigenspannungen*, Springer Verlag (1953)
- [15] R. Siems, *Phys. Stat. Sol.*, **30** (1968) 645
- [16] R. K. T. Hsieh, *Int. J. Engng. Sc.*, **20** (1982) 261
- [17] V. Volterra, *Ann. Ec. Norm.*, **24** (1907) 400
- [18] J. D. Eshelby, *Progr. Solid Mech.*, **2** (1961) 89
- [19] I. Kovács and L. Zsoldos, *Dislocation and Plastic Deformation*, Pergamon Press (1973)
- [20] S. A. Zhou and R. K. T. Hsieh, *Elastic Monopole Modelling of Defects in Thermoelastic Media*, to appear
- [21] Brulin, O. and Hsieh, R. K. T., *Polar Mechanical Interactions of Lattice Defects in New Problems in Mechanics of Continua*, Eds. O. Brulin and R. K. T. Hsieh, SM Study No 17, University of Waterloo Press (1983)
- [22] Miller, K. M. & Heald, P. T., *Phys. Stat. Sol.* **67**, 6 (1975) 569
- [23] Eringen, A. C., *Non Local Polar Theories in Continuum Physics*, Vol. 4 Part III, Ed. A. C. Eringen, Academic Press (1976) 205
- [24] Kovács, I and Vörös G., *Physica* **96 B** (1979) 111
- [25] Bullough, R., Norgett, M. J. & Webb, S., *J. Phys. F: Metal Phys.* **1** (1971) 345
- [26] Liao, W. & Krueger, D. A., *J. Fluid Mech.* **96**, 2 (1980) 223
- [27] Lamb, H., *Hydrodynamics*, Dover (1945)
- [28] Stimson, M. and Jefferey, O. B., *Proc. Roy. Soc.* **A111** (1926) 110
- [29] Cooley, M. D. A and O'Neil, N. E., *Proc. Camb. Phil. Soc.* **66** (1969) 407

- [30] Youngren, G. K. and Acrivos, A., J. Fluid Mech. **69** (1975) 337
- [31] Youngren, G. K. and Acrivos, A., J. Chem. Phys. **63** (1975) 3846
- [32] Youngren, G. K. and Acrivos, A., J. Fluid Mech. **76** (1976) 433
- [33] O'Brien, V., A. I. Ch. E. J. **14** (1968) 870
- [34] Gluckman, M. J., Pfeffer, R. and Weinbaum, S., J. Fluid Mech. **50** (1971) 705
- [35] Hsieh, R. K. T., Multipolar Lattice Defects in Electromagnetic Elastic Continua in IUTAM-IUPAP Symp. Mechanical Behaviour of Electromagnetic Solid Continua, Ed. G. A. Maugin, North Holland Pub. Co. (1984) 315
- [36] Felderhof, B. U., Physica **82 A** (1976) 596
- [37] Felderhof, B. U., Physica **82 A** (1976) 611
- [38] Hsieh, R. K. T., J. Magnetism & Magnetic Materials (1983) **39** (1983) 1
- [39] Herczyński, R. & Piehowska, I., Ann. Rev. Fluid Mech. **12** (1980) 237
- [40] Hinch, E. J., J. Fluid Mech. **83** (1977) 695

MULTIPOLE MECHANICS OF MATERIALS WITH MICROSTRUCTURE

R. K. T. HSIEH

(The Royal Institute of Technology, Stockholm, Sweden)

Abstract

This expository paper presents some recent results on the mechanical multipole description which consists in approximating the influence of the microstructure of a material as those arising from fictitious body forces and couples of different multipole orders.

利用微波进行计算机辅助断层成像

朱龙龙 顾本立 韦 钰

(南京工学院)

提 要

本文叙述作者在传输型微波 CT 方面做的理论和实践工作,讨论了微波 CT 成象中各种因素(环境媒质、天线波束、目标性质等)对成象质量的影响,建立了实验装置,对简单模型采集了 CT 数据,运用所编程序获得了 CT 图象。本文的结果表明:传输型微波 CT 对低反差目标能得到合理的图象和分辨率,对高反差目标虽有严重伪象,但仍可获得有价值的信息。

一、概 述

计算机断层成象技术(Computerized Tomography)发展十分迅速, X-CT 在医疗上的巨大成功鼓励着人们积极探索利用其他射束和能量源进行断层成象,并将此新技术用于无损检测等其它领域^[1]。

不同介质或不同生理组织在微波频率下呈现不同的介电特性^[2],因而可以利用微波在传播时衰减系数、相位常数、色散特性及极化状态改变的差异来获得被测物的内部信息。目前,微波探测和 CT 成象已引起国内外的广泛兴趣^[3~10]。

X-CT 利用单一参量——生理组织对 X 射线的衰减系数(Hounsfield 数)来成象,而微波 CT 可以进行多参量的综合成象。一些软组织例如肝、脾,具有相近的 Hounsfield 数,故 X 射线很难把它们区分开,而这些软组织在微波频段的差异却较明显。X 射线对人体有累积性的辐射伤害,而微波则相对较为安全。因而,研究微波 CT 具有诱人的前景。

二、微波 CT 的基本原理

设被成象目的物内微波传播的波数 $k^* = \omega \sqrt{\epsilon^* \mu^*} = \beta + jf$, β 、 f 均为空间位置 x 、 y 及角频率 ω 之函数。成象原理见图 1, 发射天线和接收天线在某一方位角上对目的物进行平移扫描,发射信号 $F_s(\omega)$, 接收信号 $F_R(\omega)$, 设微波束沿直线传播且满足:

$$F_R(\omega) = F_s(\omega) \exp[-p(l, \phi, \omega) + j\psi(l, \phi, \omega)] \quad (1)$$

其中 ϕ 为 l 与 x 轴的夹角,

$$p(l, \phi, \omega) = \iint f(x, y, \omega) \delta(x \cos \phi + y \sin \phi - l) dx dy \quad (2)$$

$$\psi(l, \phi, \omega) = \iint \beta(x, y, \omega) \delta(x \cos \phi + y \sin \phi - l) dx dy \quad (3)$$

式中 δ 表示 δ 函数, $p(l, \phi, \omega)$ 为射线通过物体后幅值的变化, $\psi(l, \phi, \omega)$ 为相位的改变。在不同方位角下平移扫描可测得 n 个投影, 每个投影包括 m 个数据点, 然后运用重组理论进行处理, 就可得到所求 $f(x, y)$ 的二维无重迭分布。

在射束直线传播时, 常用的 CT 重组方法有卷积滤波-反投影法^[11]、迭代法^[12]、富里哀法^[13]等。其中卷积滤波-反投影法既有良好的重组精度, 所要求的计算机容量又小, 运用最为普遍。

在极坐标系 (R, ϕ) 中, 求 $f(x, y)$ 的两维富里哀变换:

$$v(R, \phi) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) \exp[-j2\pi R(x \cos \phi + y \sin \phi)] dx dy \quad (4)$$

$$f(x, y) = \int_0^{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} v(R, \phi) \exp[j2\pi R(x \cos \phi + y \sin \phi)] |R| dR d\phi \quad (5)$$

由坐标变换

$$l = x \cos \phi + y \sin \phi$$

$$t = -x \sin \phi + y \cos \phi$$

可得

$$\begin{aligned} v(R, \phi) &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dt \cdot \exp(-j2\pi Rl) dl \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} p(l, \phi) \exp(-j2\pi Rl) dl = P(R, \phi) \end{aligned} \quad (6)$$

$P(R, \phi)$ 是投影 $p(l, \phi)$ 的富里哀变换, 将式(6)代入(5):

$$f(x, y) = \int_0^{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} P(R, \phi) \exp[j2\pi R(x \cos \phi + y \sin \phi)] \cdot |R| \cdot dR d\phi \quad (7)$$

令 $w(R) = |R|$, 用卷积定理可得:

$$\begin{aligned} &\int_{-\infty}^{\infty} P(R, \phi) w(R) \exp[j2\pi R(x \cos \phi + y \sin \phi)] dR \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} p(l', \phi) k(x \cos \phi + y \sin \phi - l') dl' \end{aligned} \quad (8)$$

从而得

$$f(x, y) = \int_0^{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} p(l', \phi) k(x \cos \phi + y \sin \phi - l') dl' d\phi \quad (9)$$

函数 k 称为对投影 p 进行卷积的核函数。

(9) 式是卷积滤波-反投影 CT 重组的数学表达式, 实际重组时, 需把(9)式离散化及内插并在空间频域用一定的窗口函数进行低通滤波。不同 k 将得不同重组结果, $k=1$ 时, (9)式化成简单反投影的形式, 它在普通 B 型超声成象中采用, 如选取

$$k(l) = \int_{-\omega}^{\omega} |R| \exp(j2\pi Rl) dR \quad (10)$$

得到的核为:

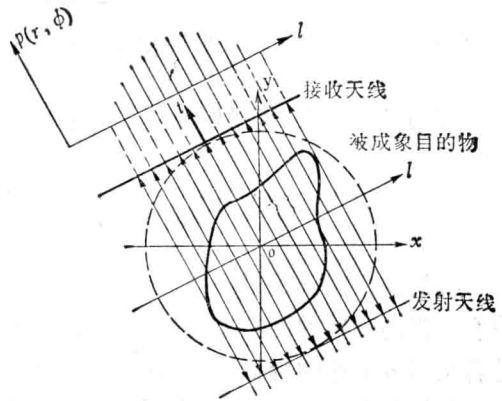


图1 传输 CT 原理示意图