

21世纪高等职业教育规划教材
高职高专机械类专业通用技术平台精品课程教材

工程力学

第 三 版

主 编 戴克良
副主编 戴月红 臧薇 于明



上海交通大学出版社
SHANGHAI JIAO TONG UNIVERSITY PRESS

21 世纪高等职业教育规划教材

高职高专机械类专业通用技术平台精品课程教材

工 程 力 学

(第三版)

主 编 戴克良

副主编 戴月红 臧 薇 于 明

上海交通大学出版社

内 容 提 要

本书根据高等职业教育的特色和“必需、够用”的原则,在参考大量文献的基础上对教材内容作了精心的选择和编排。全书共分三篇。第一篇为静力学,介绍了静力学的基础知识、平面力系、空间力系等;第二篇为材料力学,介绍了拉伸和压缩、剪切、扭转、弯曲、组合变形、压杆稳定、交变应力等;第三篇为运动学和动力学,介绍了点的运动、刚体的平面运动、动量定理、动量矩定理和动能定理等。

本书可作为高职高专机械、建筑、化工、纺织、地质和水利等专业教材,也可供相关工程技术人员参考。

图书在版编目(CIP)数据

工程力学/戴克良主编. —3 版. —上海:上海交通大学出版社,2013

ISBN 978-7-313-02117-5

I. ①工… II. ①戴… III. ①工程力学—高等职业教育—教材 IV. ①TB12

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2012)第 281169 号

工程力学(第三版)

戴克良 主编

上海交通大学出版社出版发行

(上海市番禺路 951 号 邮政编码 200030)

电话: 64071208 出版人: 韩建民

常熟市梅李印刷有限公司印刷 全国新华书店经销

开本: 787 mm×1092 mm 1/16 印张: 17.75 字数: 436 千字

2004 年 12 月第 1 版 2013 年 1 月第 3 版 2013 年 1 月第 19 次印刷

ISBN 978-7-313-02117-5/TB 定价: 37.00 元

版权所有 侵权必究

告读者:如发现本书有印装质量问题请与印刷厂质量科联系
联系电话: 0512-52661481



前言

Preface

本书是为高等职业教育工程力学课程编写的教材。

在编写本书时,编者本着高等职业教育的特色和“必需、够用”的原则,在参考大量教材的基础上,对教材内容作了精心的选择和编排。减少不必要的数理论证和数学推导,进一步突出了实用性。通过慎重考虑,将第二版的内容进行了部分调整。全部教学内容分为三篇:第一篇 静力学;第二篇 材料力学;第三篇 运动学和动力学。通过以上内容的教学,力图为学生掌握物体的受力分析,掌握构件的强度、刚度、稳定问题,掌握基本的机械运动规律,提供必要的工程力学理论及计算方法。

本书由戴克良任主编,戴月红、臧薇和于明任副主编。第1、2、3章由于明编写,第4、5、9章由臧薇编写,第6、7、8、10章由戴月红编写,第11、12、13、14、15、16、17章由戴克良编写。马贵飞主审。

本书可作为高职高专机械、建筑、化工、纺织、地质和水利等专业教材,也可供相关工程技术人员参考。

由于编者水平有限,加之编写时间仓促,书中存在的缺点和错误,恳请广大教师、读者批评指正。

编者

2012年6月

0.1 工程力学的内容

本书所论之“工程力学”包括以下三个方面内容：

1. 静力学

研究物体处于特殊的运动状态——平衡状态时受力的规律。

2. 材料力学

研究物体在外力作用下的变形规律。外力会使物体产生变形,进而产生内部力,当内部力超过限度会引起各种失效,材料力学就是研究怎样合理地避免失效。

3. 运动学和动力学

研究物体处于各种运动状态时的运动规律和受力规律。

在工程设计中这三部分内容都会遇到。在设计机械的零、部件和工程结构的构件时,首先遇到的问题是确定的工作载荷下,它们将各受到什么力?我们可以运用静力学知识对处于平衡状态或近似平衡状态的零、部件和构件进行受力分析,并根据平衡条件求出这些力。其次是在不同力的作用下,它们将会发生怎样的变形?这些变形对它们正常工作会产生什么影响?我们可以应用材料力学知识合理地设计出零、构件的形状和尺寸等。此外,我们还要根据运动学、动力学知识考虑零、构件在工作中受到附加载荷时(比如开启时和突然停止时),运动状态会产生的变化,这些变化对零、构件产生的影响等。

具体的工程设计还必须综合运用各类专业知识,但它们都以工程力学为基础来分析和解决的。工程力学是以数学为工具的,通常我们将实际力学问题抽象为力学模型,根据其上的力学量的数量关系建立方程,由已知的量求出未知的量。

0.2 工程力学的研究对象和模型

1. 研究对象是受力物体

本课程的研究对象:机器的零、部件或工程结构的构件等受力物体。在具体研究受力物体的不同方面问题时要将其抽象为不同模型:刚体和变形体。

2. 刚体

当研究受力物体处于平衡状态和其他运动状态时的受力规律、运动规律时(静力学、运动学和动力学),力在受力物体上产生的微小变形忽略不计,这时受力物体被抽象为刚体。

3. 变形体

当研究受力物体在外力作用下的变形规律(材料力学)时,微小变形必须考虑,这时的受力物体为变形体。

0.3 学习方法

- (1) 理解公理、定律。
- (2) 记住定理、公式的结论,并能用定理、公式解决问题。
- (3) 学完一课、一个章节、一个分支、全部内容后及时总结。
- (4) 课前预习、上课听讲(记录提纲)、课后复习作业,作业按格式要求做。



Contents

绪论	1
第1篇 静力学	
引言	1
第1章 静力学的基本概念和基本方法	2
1.1 静力学的基本概念	2
1.2 静力学的基本方法——受力分析	10
小结	13
习题	13
第2章 平面力系	15
2.1 平面汇交力系及其合成和平衡条件	15
2.2 平面力偶系及其合成和平衡条件	22
2.3 平面一般力系及其合成和平衡条件	29
2.4 刚体系统的平衡问题	35
2.5 考虑摩擦时的平衡问题	37
小结	42
习题	43
第3章 空间力系	50
3.1 空间汇交力系的合成	50
3.2 空间力偶系的合成	51
3.3 空间一般力系的合成	53
3.4 空间一般力系的平衡条件及其应用	57
3.5 重心和形心	59
小结	61
习题	61

第2篇

材料力学

引言

65

第4章	轴向拉伸、压缩	68
4.1	轴向拉伸和压缩的概念	68
4.2	拉、压杆的内力 截面法	69
4.3	拉压杆横截面上的正应力	72
4.4	材料在拉伸与压缩时的力学性能	74
4.5	拉、压杆的失效、安全系数和强度计算	78
4.6	拉、压杆的变形	81
	小结	84
	习题	86
第5章	剪切	90
5.1	剪切和挤压的工程实例	90
5.2	剪切和挤压的实用计算	90
5.3	剪切胡克定律	94
	小结	95
	习题	95
第6章	圆轴扭转	99
6.1	扭转的概念	99
6.2	圆轴扭转时的内力	100
6.3	圆轴扭转时的应力	102
6.4	圆轴扭转时的强度计算	105
6.5	圆轴扭转时的变形及刚度计算	107
	小结	110
	习题	111
第7章	弯曲	114
7.1	基本概念	114
7.2	梁弯曲时的内力—剪力和弯矩	116
7.3	剪力图和弯矩图	117
7.4	纯弯梁横截面上的正应力	121
7.5	惯性矩和抗弯截面模量	124
7.6	梁弯曲时的强度计算	126
7.7	梁的弯曲变形和刚度计算	129
7.8	简单静不定梁	134
7.9	提高梁的弯曲强度和刚度的措施	135

小结	136
习题	138
第 8 章 组合变形	143
8.1 组合变形的概念	143
8.2 应力状态	144
8.3 平面应力状态分析	145
8.4 空间应力状态分析	148
8.5 强度理论	149
8.6 组合变形的强度计算	151
小结	156
习题	158
第 9 章 压杆稳定	160
9.1 压杆稳定的基本概念	160
9.2 压杆临界力的计算	161
9.3 临界应力与柔度 三类不同的压杆	163
9.4 压杆稳定安全校核	165
9.5 提高压杆承载能力的措施	167
小结	168
习题	169
第 10 章 动载荷与交变应力	172
10.1 基本概念	172
10.2 交变应力的循环特征和类型	173
10.3 材料的疲劳极限及其测定	175
10.4 影响构件疲劳极限的因素	177
10.5 对称循环下构件的疲劳强度计算	177
10.6 提高构件疲劳强度的措施	178
小结	178
习题	179
第 3 篇 运动学和动力学	
引言	181
第 11 章 点的运动	183
11.1 用矢径法描述点的运动	183
11.2 用直角坐标法描述点的运动	184

11.3	描述点的运动的自然法	186
	小结	190
	习题	191
第 12 章	刚体的基本运动	193
12.1	刚体的平行移动	193
12.2	刚体的定轴转动	194
12.3	定轴转动刚体内各点的速度和加速度	196
	小结	199
	习题	199
第 13 章	点的合成运动	202
13.1	点的合成运动的概念	202
13.2	点的速度合成定理	203
13.3	点的加速度合成定理	206
	小结	208
	习题	209
第 14 章	刚体的平面运动	212
14.1	刚体平面运动的概念	212
14.2	刚体平面运动的分解	213
14.3	平面运动刚体内各点速度的三种方法	214
14.4	平面运动刚体上点的加速度	216
	小结	218
	习题	219
第 15 章	质点动力学基础	222
15.1	动力学基本定律	222
15.2	质点的运动微分方程	223
	小结	227
	习题	227
第 16 章	动量定理和动量矩定理	230
16.1	动量和冲量	230
16.2	动量定理	231
16.3	动量矩	235
16.4	刚体绕定轴的转动微分方程	236
16.5	转动惯量	237
	小结	242

习题	243
第 17 章 动能定理	247
17.1 力的功	247
17.2 动能	250
17.3 动能定理	252
17.4 机械能守恒定律	253
小结	258
习题	259
习题答案	262
附录 常用型钢规格表	270
参考文献	272

第1章 函数、极限与连续



学习目标

1. 加深理解函数的概念.
2. 了解分段函数、复合函数的概念.
3. 掌握函数极限、无穷小、无穷大以及函数连续性的概念.
4. 熟练掌握函数极限的四则运算法则.
5. 会用两个重要极限求极限.
6. 会判断函数间断点的类型.
7. 会求连续函数和分段函数的极限.
8. 知道初等函数的连续性以及闭区间上连续函数的性质(介值定理、最大值和最小值定理).

§ 1.1 函数的概念

一、函数的概念

1. 区间和邻域

如果变量的变化是连续的,则常用区间来表示其变化范围.在数轴上来说,区间是指介于某两点之间的线段上点的全集.

设 a 和 b 都是实数,且 $a < b$,将数集

$\{x | a < x < b\}$ 称为开区间,记为 (a, b) ;

$\{x | a \leq x \leq b\}$ 称为闭区间,记为 $[a, b]$;

$\{x | a < x \leq b\}$ 称为左开右闭区间,记为 $(a, b]$;

$\{x | a \leq x < b\}$ 称为左闭右开区间,记为 $[a, b)$.

上述四个区间的长度都是有限的(区间长度为 $b - a$),统称为有限区间.

此外还有下列无限区间,引进记号 $+\infty$, $-\infty$ (读作正无穷大,负无穷大).

无限区间有: $(-\infty, +\infty) = \mathbf{R}$ (通常也表示为 $-\infty < x < +\infty$);

$$(a, +\infty) = \{x | x > a\}; [a, +\infty) = \{x | x \geq a\};$$

$$(-\infty, b) = \{x | x < b\}; (-\infty, b] = \{x | x \leq b\}.$$

如无特别声明,可用如下符号表示一些常用数集:

$\mathbf{R}$ ——实数集; $\mathbf{Q}$ ——有理数集; $\mathbf{Z}$ ——整数集; $\mathbf{N}$ ——自然数集.

定义 1-1 设 a 与 δ 是两个实数,且 $\delta > 0$ (通常 δ 是指很小的正数),集合

$\{x \mid |x-a| < \delta\}$ 称为点 a 的 δ 邻域, 记为 $U(a, \delta)$, a 称为该邻域的中心, δ 称为该邻域的半径, 即:

$$U(a, \delta) = \{x \mid a - \delta < x < a + \delta\}.$$

$U(a, \delta)$ 表示与点 a 距离小于 δ 的一切点 x 的全体.

同理, 称将邻域的中心 a 去掉所形成的区间 $(a - \delta, a) \cup (a, a + \delta)$ 为 a 的去心 δ 邻域 (或 a 的空心 δ 邻域), 记为 $\overset{\circ}{U}(a, \delta) = \{x \mid 0 < |x - a| < \delta\}$.

2. 函数

在研究某一事物的变化过程时, 往往同时遇到两个或多个变量, 这些变量不是彼此孤立的, 而是相互联系, 互相依赖, 遵循着一定的变化规律.

例如: 圆的面积. 圆面积 A 与它的半径 r 间的关系由公式 $A = \pi r^2$ 确定, 当 r 在区间 $(0, +\infty)$ 内任意取定一个数值时, 根据公式 $A = \pi r^2$ 就可以确定圆的面积 A 的相应数值.

定义 1-2 设有两个变量 x 和 y , D 是一个给定的数集, 若对于 D 中每一个数 x (即 $\forall x \in D$), 按照一定的对应法则 f 总有唯一确定的数值 y 与之对应, 则称 y 是 x 的函数, 记作: $y = f(x)$. x 称为自变量, y 称为因变量, 数集 D 和 $M = \{y \mid y = f(x), x \in D\}$ 分别称为函数的定义域和值域.

若当自变量 x 取某个确定的值 x_0 , 根据对应法则 f 能够得到一个确定的值 y_0 , y_0 称为函数 $y = f(x)$ 在 x_0 处的函数值, 记为 $y_0 = f(x_0)$ 或 $y_0 = y|_{x=x_0}$.

平面点集 $G = \{(x, y) \mid y = f(x), x \in D\}$ 称为函数 $y = f(x)$ 的图形.

根据函数的定义, 当函数的定义域和函数的对应法则确定以后, 这个函数就完全确定了. 因此, 通常把函数的定义域 D 和对应法则 f 叫做确定函数的两个要素. 只有当两个函数的定义域和对应法则完全相同时, 才认为这两个函数是完全相同的.

在实际问题中, 函数的定义域是根据问题的实际意义确定的. 例如, 圆面积中定义域为 $(0, +\infty)$.

在数学中, 有时不考虑函数的实际意义, 而抽象地研究用算式表达的函数. 约定函数的定义域就是自变量所能取的使算式有意义的一切实数值.

例如, 函数 $y = \frac{1}{\sqrt{3x - x^2}}$ 的定义域是开区间 $(0, 3)$, 函数 $y = \arcsin \frac{x}{4}$ 的定义域是闭区间 $[-4, 4]$.

二、函数的表示方法

根据问题的不同特点, 函数可以用表格法、图像法和解析法 (公式法) 来表示 (三种表示方法也可以混合使用). 在微积分学中, 函数还可以用以下方式来表示.

1. 隐函数

如果变量 x, y 之间的函数关系是由一个方程 $F(x, y) = 0$ 所确定的, 则称 y 是 x 的隐函数. 相应地, 如果因变量 y 都能用含有 x 的解析式明显表示, 则称之为显函数. 有些隐函数可以转化为显函数, 但也有些隐函数不可以化为显函数, 如方程 $e^y - e^x - xy = 1$ 所确定的隐函数就无法化为显函数, 但这并不影响我们研究它们的某些变化规律.

2. 分段函数

在自变量的不同的范围内用不同的解析式分段表示的函数叫分段函数.

分段函数求函数值时,应把自变量的值代入相应范围的表达式中去计算.

例 1-1-1 已知分段函数 $f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & x > 0 \\ 2 & x = 0 \\ 2x & x < 0 \end{cases}$ (如图 1-1),

求 $f[f(0)], f(-3)$.

解 $f[f(0)] = f(2) = 2^2 + 1 = 5; f(-3) = 2 \times (-3) = -6$.

其中 $x=0$ 称为分段函数的“分界点”.

几个常见的分段函数:

(1) 符号函数

$$y = \operatorname{sgn} x = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ 0 & x = 0 \\ -1 & x < 0 \end{cases}, D = (-\infty, +\infty), M = \{-1, 0, 1\} \text{ (如图 1-2).}$$

(2) 取整函数

$y = [x], x \in \mathbf{R}$ (如图 1-3), $[x]$ 表示不超过 x 的最大整数.

$$D = (-\infty, +\infty), M = \mathbf{Z} \text{ (其中 } \mathbf{Z} \text{ 表示整数集).}$$

例如, $[2.38] = 2, [-6.12] = -7, [1] = 1$.

(3) 绝对值函数

$$y = |x| = \begin{cases} x & x > 0 \\ 0 & x = 0 \\ -x & x < 0 \end{cases}, D = (-\infty, +\infty), M = [0, +\infty) \text{ (如图 1-4).}$$

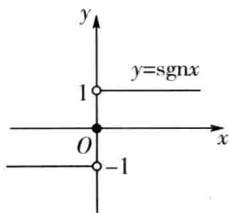


图 1-2

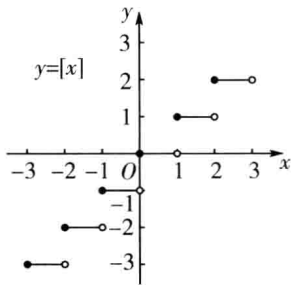


图 1-3

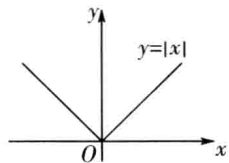


图 1-4

3. 由参数方程确定的函数

如果变量 x, y 之间的函数关系是由参数方程 $\begin{cases} x = f(t) \\ y = g(t) \end{cases}$ (t 是参数) 所确定的, 则称为由

参数方程确定的函数(简称参数式函数), 其中 t 称为参数.

三、函数的性质

1. 有界性

存在正数 $M > 0$, 若对 $\forall x \in D$, 总有 $|f(x)| \leq M$ 成立, 则称函数 $f(x)$ 在区间 D 内有界,

否则称为无界.

若函数 $f(x)$ 在其定义域内有界, 则称 $f(x)$ 为有界函数, 否则称为无界函数.

有界函数的图形必介于直线 $y=M$ 与 $y=-M$ 之间.

例如, 函数 $y=\cos x$ 是有界函数, 因为在其定义域 $(-\infty, +\infty)$ 内恒有 $|\cos x| \leq 1$.

函数 $y=\tan x$ 在 $\left[-\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}\right]$ 是有界函数, 但在 $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ 内是无界的.

注意

确定一个函数是有界的或无界的, 必须指出其相应的自变量的取值范围.

2. 单调性

若对于区间 (a, b) 内的任意两点 x_1 及 x_2 , 如果当 $x_1 < x_2$ 时, 总有 $f(x_1) < f(x_2)$, 则称函数 $f(x)$ 在 (a, b) 内单调增加; 当 $x_1 < x_2$ 时, 总有 $f(x_1) > f(x_2)$, 则称函数 $f(x)$ 在 (a, b) 内单调减少. 区间 (a, b) 称为单调区间.

从几何直观上看, 单调增函数是从左至右上升的, 单调减函数是从左至右下降的.

例如, $f(x)=x^2$ 在区间 $(-\infty, 0]$ 上是单调减少的, 在区间 $[0, +\infty)$ 上是单调增加的, 在区间 $(-\infty, +\infty)$ 内 $f(x)=x^2$ 不是单调的.

3. 奇偶性

设函数 $y=f(x)$ 的定义域 D 关于原点对称 (即如果 $x \in D$ 则必有一 $x \in D$), 若对于 $\forall x \in D$, 都有 $f(-x) = -f(x)$, 则称函数 $f(x)$ 在 D 上是奇函数; 若对于 $\forall x \in D$, 都有 $f(-x) = f(x)$, 则称函数 $f(x)$ 在 D 上是偶函数.

奇函数的图形关于原点对称, 偶函数的图形关于 y 轴对称.

例如, $y=x^3, y=\sin x$ 是奇函数; $y=|x|, y=\cos x$ 是偶函数; $y=\sqrt{x}+\sin x, y=\ln x+1$ 是非奇非偶函数.

4. 周期性

设函数 $y=f(x)$ 在数集 D 上有定义, 若存在一不为零的数 T , 使得对于 $\forall x \in D$, 有 $x+T \in D$ 且 $f(x+T)=f(x)$ 恒成立, 则称函数 $y=f(x)$ 是周期函数, T 称为 $f(x)$ 的周期.

例如, 函数 $y=\tan x, y=\cot x$ 是以 π 为周期的周期函数, 函数 $y=x-[x]$ 是周期为 1 的周期函数.

若 T 为 $f(x)$ 的周期, 则根据定义, $2T, 3T, 4T, \dots$ 也是 $f(x)$ 的周期, 故周期函数有无穷多个周期, 而我们通常说的周期是指最小正周期 (基本周期).

周期函数在每一个周期 $(\epsilon+kT, \epsilon+(k+1)T)$ (ϵ 为任意数, k 为任意整数) 上, 都有相同的形状.

四、初等函数

1. 基本初等函数

定义 1-3 常数函数、幂函数、指数函数、对数函数、三角函数、反三角函数统称为基本初等函数 (见附录 1).

(1) 常数函数 $y=C$ (C 为常数);

(2) 幂函数 $y=x^\mu$ ($\mu \in \mathbf{R}$, 为常数);

- (3) 指数函数 $y=a^x (a>0, a\neq 1)$, $y=e^x (e=2.718281828495045\cdots)$;
 (4) 对数函数 $y=\log_a x (a>0, a\neq 1)$, $y=\log_e x=\ln x$ (称为自然对数函数);
 (5) 三角函数 $y=\sin x, y=\cos x, y=\tan x, y=\cot x, y=\sec x, y=\csc x$;
 (6) 反三角函数 $y=\arcsin x, y=\arccos x, y=\arctan x, y=\operatorname{arccot} x$.

2. 复合函数

函数 $y=\sin^2 x$ 不是基本初等函数,但可由基本初等函数 $y=u^2$ 和 $u=\sin x$ 组合而成,称这种组合为复合函数.实际上较复杂的函数都是由几个基本初等函数或简单函数复合而成的.

定义 1-4 设 y 是 u 的函数 $y=f(u)$, u 是 x 的函数 $u=g(x)$,若 $u=g(x)$ 的值域或其部分包含在 $y=f(u)$ 定义域中,则 y 通过中间变量 u 构成 x 的函数,称为 x 的复合函数,记为 $y=f[g(x)]$. 其中 x 是自变量, u 称为中间变量.

例 1-1-2 设 $f(x)=x^3-x, g(x)=\sin 2x$, 求 $f[g(x)], g[f(x)]$.

解 $f[g(x)]=[g(x)]^3-g(x)=\sin^3 2x-\sin 2x$;

$g[f(x)]=\sin [2f(x)]=\sin (2x^3-2x)$.

例 1-1-3 指出下列复合函数的复合过程:

- (1) $y=e^{\sin^2 x}$; (2) $y=\arccos \sqrt{\ln (x^2-1)}$; (3) $y=\tan^3 (1+x^2)$.

解 (1) $y=e^{\sin^2 x}$ 是由 $y=e^u$ (指数函数), $u=v^2$ (幂函数), $v=\sin x$ (三角函数) 复合而成.

(2) $y=\arccos \sqrt{\ln (x^2-1)}$ 是由 $y=\arccos u, u=\sqrt{v}, v=\ln w, w=x^2-1$ 复合而成.

(3) $y=\tan^3 (1+x^2)$ 是由 $y=u^3, u=\tan v, v=1+x^2$ 复合而成.

注意

不是任何两个函数都能够复合成一个复合函数的. 例如, $y=\arccos u$ 及 $u=3+x^2$ 就不能复合成一个复合函数. 因为对于 $u=3+x^2$ 的定义域 $(-\infty, +\infty)$ 内任何 x 值所对应的 u 值(都大于或等于 3), 都不能使 $y=\arccos u$ 有意义.

3. 反函数

定义 1-5 设函数 $y=f(x)$, 其定义域为 D , 值域为 M . 如果对于 $\forall y \in M$, 都可以从关系式 $y=f(x)$ 确定唯一的 $x(x \in D)$ 与之对应, 这样就确定了一个以 y 为自变量的函数, 称这个函数为 $y=f(x)$ 的反函数, 记为 $x=f^{-1}(y)$, 其定义域为 M , 值域为 D .

习惯上用 x 表示自变量, y 表示因变量, 因此 $y=f(x)$ 的反函数可表示为 $y=f^{-1}(x)$.

性质 1-1 (1) 函数 $y=f(x)$ 的定义域是其反函数 $y=f^{-1}(x)$ 的值域, 其值域是反函数的定义域.

(2) 函数 $y=f(x)$ 与其反函数 $y=f^{-1}(x)$ 的单调性相同.

(3) 函数 $y=f(x)$ 的图像与其反函数 $y=f^{-1}(x)$ 的图像关于直线 $y=x$ 对称.

例 1-1-4 求 $y=2^x+1$ 的反函数.

解 由 $y=2^x+1$ 得 $\log_2(y-1)=x$, 所以 $x=\log_2(y-1)$, 互换字母 x, y 得所求反函数: $y=\log_2(x-1)$.

4. 初等函数

由常数和基本初等函数经过有限次的四则运算或有限次的函数复合所构成的, 并能用一个解析式表示的函数称为初等函数.

例如, 函数 $y = \cos^2(3x+1)$, $y = \sqrt{x^3+2}$, $y = \frac{\ln x + 2\tan x}{10^x - 1}$ 都是初等函数.

在微积分的运算中, 常把一个初等函数分解为基本初等函数或基本初等函数的四则运算形式, 因此我们应当学会如何分析初等函数的结构.

例 1-1-5 求下列函数的定义域:

$$(1) y = \sqrt{9-x^2} + \frac{1}{x-1}; \quad (2) y = \arccos \frac{x+1}{3} + \ln(3+x).$$

解 (1) 要使函数有意义, 应满足偶次根式的被开方式大于等于零和分母不为零, 即:

$$9-x^2 \geq 0,$$

且 $x-1 \neq 0$, 故 $\begin{cases} -3 \leq x \leq 3 \\ x \neq 1 \end{cases}$, 所求定义域为 $[-3, 1) \cup (1, 3]$;

(2) 要使函数有意义, 应满足反余弦函数符号内的式子绝对值小于等于 1 且对数函数符号内的式子为正, 即:

$$\begin{cases} -1 \leq \frac{x+1}{3} \leq 1 \\ 3+x > 0 \end{cases}, \text{ 所以 } \begin{cases} -4 \leq x \leq 2 \\ x > -3 \end{cases}, \text{ 即 } -3 < x \leq 2, \text{ 所求定义域为 } (-3, 2].$$

一般求函数的定义域时应考虑:

- (1) 代数式中分母不能为零;
- (2) 偶次根式内的表达式非负;
- (3) 对数运算中真数的表达式大于零;
- (4) 反三角函数 $y = \arcsin x$, $y = \arccos x$, 要满足 $|x| \leq 1$;
- (5) 两函数和(差)的定义域, 应是两函数定义域的公共部分;
- (6) 分段函数的定义域是各段定义域的并集等.

五、函数模型的建立

用数学方法解决实际问题时, 往往需要找出变量之间的函数关系, 建立函数关系, 或成为函数模型.

例 1-1-6 已知某种商品的成本函数与收入函数分别是 $C = 12 + 3q + q^2$, $R = 11q$, 试求该商品的盈亏平衡点, 并说明随产量 q 变化时的盈亏情况.

解 利润函数 $L(q) = R(q) - C(q) = 11q - 12 - 3q - q^2 = 8q - q^2 - 12 = -(q-2)(q-6)$.

由 $L(q) = 0$ 得盈亏平衡点有两个: $q_1 = 2$, $q_2 = 6$.

当 $q < 2$ 时, $L < 0$; 当 $2 < q < 6$ 时, $L > 0$; 而当 $q > 6$ 时, $L < 0$.

即当 $q < 2$ 时亏损, 当 $2 < q < 6$ 时盈利, 而当 $q > 6$ 时又转为亏损.



习题 1.1

1. 设函数 $f(x+2) = x^2 + 3x + 5$, 求 $f(x)$, $f(x-2)$.
2. 已知 $f(\sin x) = \cos 2x + 1$, 求 $f(\cos x)$.
3. 求下列函数的定义域: