理工社®

[ 2015 · 张宇考研数学系列丛书 ]

张宇

# 考研数学题源探析

# 经典1000题

（数学二）

CLASSIC

1000
EXERCISES
ON MATHS

Mr. Zhang

张宇 ◎ 主编

北京理工大学出版社
BEIJING INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

理工社®

张宇

CLASSIC

# 考研数学题源探析
# 经典1000题

（数学二）

张宇 主编

北京理工大学出版社
BEIJING INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

**图书在版编目（CIP）数据**

张宇考研数学题源探析经典1000题. 数学二／张宇主编. —北京：北京理工大学出版社，2014.4

ISBN 978-7-5640-9130-9

Ⅰ. ①张… Ⅱ. ①张… Ⅲ. ①高等数学－研究生－入学考试－题解 Ⅳ. ①O13－44

中国版本图书馆CIP数据核字（2014）第081660号

出版发行／北京理工大学出版社有限责任公司
社 址／北京市海淀区中关村南大街5号
邮 编／100081
电 话／（010）68914775（总编室）
82562903（教材售后服务热线）
68948351（其他图书服务热线）
网 址／http：//www. bitpress. com. cn
经 销／全国各地新华书店
印 刷／三河市文阁印刷有限公司
开 本／787毫米×1092毫米 1/16
印 张／19.5
字 数／475千字
版 次／2014年5月第1版 2014年5月第1次印刷
定 价／40.00元

责任编辑／张慧峰
文案编辑／张慧峰
责任校对／周瑞红
责任印制／边心超

# 巩固所学　见多识广

——与读者谈谈做数学题的学问

本书是一本考研数学习题集.看完教材,学完知识,就要做题.做题有学问吗？请读者认真阅读这个前言,尤其是下面的“五”.

## 一、题海战术？

曾经有文化媒体的记者问我:你是否同意“题海战术”？我对此问题感到两难.其一,如果我说同意,便会遭到批判——现在都讲素质教育,你怎么还让学生陷于题海之中？只会做题,搞得呆头呆脑;其二,如果我说不同意,那便违背了我的真实想法——不做题,怎么能够把书本上的数学知识内化为自己的本领？面对两难,如何作答？

我与读者讲,当你和别人针锋相对时,不要与其争辩甚至争吵,争来争去,最终谁也说服不了谁.怎么办？提高自己回答问题的“档次”,将他尖锐的问题化解掉——于是,我当时回答:你这个问题本身就有问题,莫说让考研的学生做几个月的数学题,就是让他们做整整一年的数学题,也不能叫题“海”,最多就是个题“河”,其实基本上就是个题“沟”,所以,实事求是地说,我们应该叫“题沟战术”,记者朋友听后大笑.这个回答,既能够低调处理问题,避免争论,也能够道出我的观点:几百道、上千道题目,算不上题海.事实上,我们不用形成题目的汪洋大海,只需**有针对性地、高质量地填满一个题目的小水沟**,就足以应对考研数学了.

这本《张宇考研数学题源探析经典1000题》就是为了实现上面这个切合实际的目标而编写的.

## 二、考研数学好题的标准

本书命制或者挑选的题目坚持的标准是“好题”.什么是考研数学的好题？我以为要具备以下三点:

(1)**经典性**　所谓经典性是指试题能够恰当、精准地考查考研数学的重要知识点和基本思想方法;

(2)**针对性**　所谓针对性是指试题能够与考研无缝接轨,与考研出题的风格、特点和难度达到高度一致;

(3)**预测性**　所谓预测性是指试题能够对即将到来的考研有预测性.我们承认做题的目的是为了巩固和加强对知识点的认识和理解、学会解题,但同时,如果能够起到预测未来方向的作用,则会锦上添花.

## 三、考研数学题源探析

根据以上三点，本书精心命制和整合了大约1000道考研数学复习的题目，其主要来源是：

(1)**与考研数学命题密切相关的重要资料**.这里包括考研数学命题前的全国征题、部分考研命题的备考题(所谓考研数学B卷考题)、命题人退下来以后命制的题目、某些全国大学数学教学基地的考试题库等，**这些题一般会是综合了多个知识点的题，有一定的难度和区分度.**

(2)**前苏联、全国、各省市大学生数学竞赛试题的改编题**.对经典的大学数学竞赛题如何进行改编，使其适合考研的风格和特点，这既是对未来考题的预测(因为这些竞赛题中有很多题目是"潜在的考试题")，也是本书的一大特色.**试题改编是颇费一番周折的，本书中一些重要题目后的"注"，看似题外之话、弦外之音，但是字斟句酌、涵义深刻，请读者仔细品味，必会有所收获.当然，基于竞赛基础，这些题一般也会是综合题，难度高、区分度大.**

(3)**作者在一线教学中编写和积累的经典题目**.这里，有些题目考查的是非常重要的基础知识，有些题目考查的是学生易错的、易混淆的知识，还有些题目，本应是在课堂上讲授给学生的，但是无奈于课堂时间有限，很多精彩的好题没有机会在课上详细解释，也将此选编到本书中，供学生课后巩固所学、增长见识之用.同时也给没有上我的课程的读者提供一个有价值的习题资料.**这里的题目除了有一定难度的综合题外，还有些简单题，难度不高，但对学生的区分是明显的.**

## 四、本书的重大改动说明

本书各位作者曾经分别参与考研数学命题与阅卷、考研数学大纲的编写与修订、高等教育出版社《全国硕士研究生入学统一考试数学考试大纲解析》的编写、高等教育出版社《考研数学历年真题解析》的编写和审定、部分重点高校(如清华大学、中国人民大学、北京理工大学、浙江大学等)相关教材的编写和审定等，这些工作对于本书的形成具有重要意义.

本书最初的版本中，收录了1987年到1999年的考研真题，这部分内容现在已经放到《张宇考研数学真题大全解》那本书里去了，这样更加合理.于是，读者看到的这本书，事实上是做了**重大改动**的：删去的真题原本占了书中题目的大部分篇幅，**现在补充进来的题目占到全部题目的70%左右，可以说把作者"压箱底的宝贝"基本都拿出来了.**

在北京理工大学出版社的大力支持下，作者将这本书奉献给读者，供考研究生的读者和有志于提高大学数学学习水平的读者们参考.

## 五、本书使用说明

首先，我非常希望读者懂得做习题集的科学的态度.做习题集有两个目的：一是巩固所学，二是见多识广.所谓巩固所学，读者很容易明白，就是在已经读教材、读例题后，通过演算同例题类似的习题这种重复性劳动，加强对所学知识的认识，加深对所用方法的理解.但是，所谓见多识广，有些读者好像不会正确应对.数学题的形式，浩瀚无垠，千变万化，即使在一定的范围内(当然我们这里就是指的在考研大纲的范围内)，想要做到无所不能，也绝非易事.所以，适当地

演算一些从未见过的难题、新题，不仅可以查漏补缺，更能够增长见识，提高解题能力和数学素养，这是做习题集的重要目的. 听者有心，这本习题集中的题目，希望读者不管一开始会与不会，都要好好努力去做，然后结合答案搞清搞透，最终达到巩固所学、见多识广的目的.

接下来，有一个技术问题需要告诉读者. 作为一本习题集，可以采用**“知识分类、先易后难”的原则**来进行题目安排，大部分习题集也确实是这样安排的. 所谓知识分类，是指把考查同一知识点的题目集中在一起，比如从第 1 题到第 10 题，考查知识点甲，从第 10 题到第 20 题，考查知识点乙，以此类推. 所谓先易后难，是指按照从简单到复杂、从考查单一知识到考查综合能力的顺序来安排题目，比如考查知识点甲的第 1 题到第 10 题，一般是第 1 题最好做，越往后越难，到了第 10 题，难度最大. 听起来，这个原则很科学.

然而，本书不采用上述原则. 为什么？第一，“知识分类”会使得这部分题目对读者有明显的提示——你既然知道这一部分都是考知识点甲的，那便很容易找到问题的突破口，题目的难度会大大降低——试想，考研数学的试卷上会告诉你这个题目是考查知识点甲的吗？第二，“先易后难”好像符合人们思考、训练的习惯，但是，这也恰恰不符合考研数学命题的题目安排顺序——考研数学试卷上有两个变化无常：一是高等数学、线性代数、概率论与数理统计放在一张卷子上考，二是题目难度顺序有时难，有时易，难度可以说是“波浪式”的——所以，习题集如果按照“先易后难”的传统习惯，显然与考研数学命题与应考的实际背道而驰.

综上所述，从考研实战的角度出发，为了使考生能够在平时的训练中就逐渐适应考研数学试卷的风格，作者依据**“知识相对混编、难易变化无常”的原则**来进行题目安排：第一，出几个考知识点甲的题目，突然就换到几个考知识点乙、知识点丙的题目，然后还可能再跳回考知识点甲的题目，不出现明显的提示；第二，也许最开始的题目就很难，中间有简单题，再往后做题又会碰到难题，难度“此起彼伏”. 作者用心良苦，希望考生保持实战演练的状态，这样才能更好地使用好本书，发挥它的最大作用.

对于习题集的使用，我建议读者：把题目的演算过程写到草稿纸上去，把做题后看着答案详解做的标注写到笔记本上去，总之，不要在题目上做任何标记——这样做的目的很明确——如果此题你第一次做的时候不会做或者做错了，当你下次再做这个题目时，在没有任何提示的情况下，你能保证自己一定会做吗？“干干净净”的习题集，事实上是对读者提出了高标准、严要求，希望读者把习题全部做完一遍后，第二遍就能够查漏补缺、扫清死角.

感谢从命题组中退下来的老专家们，他们功底深厚、德高望重，给予了作者诸多帮助，为本书增色不少. 感谢家人们，他们中的大多数并不懂书中的内容，可是他们懂得它对我和学生的意义.

张宇

2014 年 5 月 于北京

# Contents 目录

## 第一篇　高等数学

## 第二篇　线性代数

# 第一篇

# 高等数学

# 第 1 章　函数、极限与连续

**一、选择题（在目前的考研中，选择题是 4 分 / 题，下列每小题给出的四个选项中，只有一项符合题目要求，把所选选项前的字母填在题后的括号里.）**

**1.1** 下列四个命题中正确的是　(　　)

(A) 若 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) \leqslant \lim\limits_{x\to x_0} g(x)$，则存在正数 $\delta$，当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时，有 $f(x) \leqslant g(x)$

(B) 若存在正数 $\delta$，当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时，有 $f(x) < g(x)$，且 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$ 及 $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = B$，则 $A < B$

(C) 若存在正数 $\delta$，当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时，有 $f(x) \leqslant g(x)$，则 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) \leqslant \lim\limits_{x\to x_0} g(x)$

(D) 若 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) < \lim\limits_{x\to x_0} g(x)$，则存在正数 $\delta$，当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时，有 $f(x) < g(x)$

**1.2.** 设 $f(x)$ 是偶函数，$\varphi(x)$ 是奇函数，则下列函数(假设都有意义)中，是奇函数的是　(　　)

(A) $f(\varphi(x))$　(B) $f(f(x))$　(C) $\varphi(f(x))$　(D) $\varphi(\varphi(x))$

**1.3.** 设 $f(x) = \sin(\cos x)$，$\varphi(x) = \cos(\sin x)$，则在区间 $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ 内　(　　)

(A) $f(x)$ 是增函数，$\varphi(x)$ 是减函数　(B) $f(x)$，$\varphi(x)$ 都是减函数

(C) $f(x)$ 是减函数，$\varphi(x)$ 是增函数　(D) $f(x)$，$\varphi(x)$ 都是增函数

**1.4.** 设在区间 $(-\infty, +\infty)$ 内 $f(x) > 0$，且当 $k$ 为大于 0 的常数时有 $f(x+k) = \dfrac{1}{f(x)}$，则在区间 $(-\infty, +\infty)$ 内函数 $f(x)$ 是　(　　)

(A) 奇函数　(B) 偶函数　(C) 周期函数　(D) 单调函数

**1.5.** 设 $f(x) = \begin{cases} x^2, & x \leqslant 0, \\ x^2 + x, & x > 0 \end{cases}$ 则 $f(-x)$ 等于　(　　)

(A) $f(-x) = \begin{cases} -x^2, & x \leqslant 0, \\ -(x^2 + x), & x > 0 \end{cases}$　(B) $f(-x) = \begin{cases} -(x^2 + x), & x < 0, \\ -x^2, & x \geqslant 0 \end{cases}$

(C) $f(-x) = \begin{cases} x^2, & x \leqslant 0, \\ x^2 - x, & x > 0 \end{cases}$　(D) $f(-x) = \begin{cases} x^2 - x, & x < 0, \\ x^2, & x \geqslant 0 \end{cases}$

**1.6.** 设 $f(x) = u(x) + v(x)$，$g(x) = u(x) - v(x)$，并设 $\lim\limits_{x\to x_0} u(x)$ 与 $\lim\limits_{x\to x_0} v(x)$ 都不存在，下列论断正确的是　(　　)

(A) 若 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 不存在，则 $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)$ 必存在　(B) 若 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 不存在，则 $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)$ 必不存在

(C) 若 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 存在，则 $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)$ 必不存在　(D) 若 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 存在，则 $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)$ 必存在

**1.7.** 两个无穷小比较的结果是　(　　)

(A) 同阶　(B) 高阶　(C) 低阶　(D) 不确定

**1.8.** 函数 $f(x) = x\sin x$　(　　)

(A) 在$(-\infty,+\infty)$内无界　　(B) 在$(-\infty,+\infty)$内有界

(C) 当$x\to\infty$时为无穷大　　(D) $x\to\infty$时极限存在

**1.9.** 当$x\to 0$时，$f(x)=e^x-\dfrac{1+ax}{1+bx}$为$x$的三阶无穷小，则$a,b$分别为　　(　　)

(A) $1,0$　　(B) $\dfrac{1}{2},0$　　(C) $\dfrac{1}{2},-\dfrac{1}{2}$　　(D) 以上都不对

**1.10.** 极限$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{e^{\sin\frac{1}{x}}-1}{\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{\alpha}-\left(1+\dfrac{1}{x}\right)}=A\neq 0$的充要条件是　　(　　)

(A) $\alpha>1$　　(B) $\alpha\neq 1$　　(C) $\alpha>0$　　(D) 与$\alpha$无关

**1.11.** 设当$x\to x_0$时，$f(x)$不是无穷大，则下述结论正确的是　　(　　)

(A) 设当$x\to x_0$时，$g(x)$是无穷小，则$f(x)g(x)$必是无穷小

(B) 设当$x\to x_0$时，$g(x)$不是无穷小，则$f(x)g(x)$必不是无穷小

(C) 设在$x=x_0$的某邻域$g(x)$无界，则当$x\to x_0$时，$f(x)g(x)$必是无穷大

(D) 设在$x=x_0$的某邻域$g(x)$有界，则当$x\to x_0$时，$f(x)g(x)$必不是无穷大

**1.12.** 设函数$f(x)$在点$x_0$的某邻域内有定义，且$f(x)$在点$x_0$处间断，则在点$x_0$处必定间断的函数为　　(　　)

(A) $f(x)\sin x$　　(B) $f(x)+\sin x$　　(C) $f^2(x)$　　(D) $|f(x)|$

**1.13.** 设当$x\to x_0$时，$\alpha(x),\beta(x)$都是无穷小($\beta(x)\neq 0$)，则当$x\to x_0$时，下列表达式中不一定为无穷小的是　　(　　)

(A) $\dfrac{\alpha(x)}{\beta^2(x)}$　　(B) $\alpha^2(x)+\beta^3(x)\cdot\cos\dfrac{1}{x}$

(C) $\ln[1+\alpha(x)\cdot\beta^2(x)]$　　(D) $|\alpha(x)|+|\beta(x)|$

**1.14.** 设当$x\to 0$时，$e^{\tan x}-e^x$与$x^n$是同阶无穷小，则$n$为　　(　　)

(A) 1　　(B) 2　　(C) 3　　(D) 4

**1.15.** 当$x\to 0$时，$f(x)=x-\sin ax$与$g(x)=x^2\ln(1-bx)$是等价无穷小，则　　(　　)

(A) $a=1,b=-\dfrac{1}{6}$　　(B) $a=1,b=\dfrac{1}{6}$　　(C) $a=-1,b=-\dfrac{1}{6}$　　(D) $a=-1,b=\dfrac{1}{6}$

**1.16.** 设当$x\to 0$时，$f(x)=ax^3+bx$与$g(x)=\int_0^{\sin x}(e^{x^2}-1)dx$等价，则　　(　　)

(A) $a=\dfrac{1}{3},b=1$　　(B) $a=3,b=0$　　(C) $a=\dfrac{1}{3},b=0$　　(D) $a=1,b=0$

**1.17.** 设当$x\to 0$时，$f(x)=\ln(1+x^2)-\ln(1+\sin^2 x)$是$x$的$n$阶无穷小，则正整数$n$等于　　(　　)

(A) 1　　(B) 2　　(C) 3　　(D) 4

**1.18.** 若$f(x)=\dfrac{\sqrt[3]{x}}{\lambda-e^{-kx}}$在$(-\infty,+\infty)$上连续，且$\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=0$，则　　(　　)

(A) $\lambda<0,k<0$　　(B) $\lambda<0,k>0$　　(C) $\lambda\geqslant 0,k<0$　　(D) $\lambda\leqslant 0,k>0$

**1.19.** 设$f(x)=\dfrac{1}{e^{\frac{x}{x-1}}-1}$，则　　(　　)

(A) $x=0,x=1$都是$f(x)$的第一类间断点

(B) $x=0,x=1$都是$f(x)$的第二类间断点

(C)$x=0$ 是 $f(x)$ 的第一类间断点，$x=1$ 是 $f(x)$ 的第二类间断点

(D)$x=0$ 是 $f(x)$ 的第二类间断点，$x=1$ 是 $f(x)$ 的第一类间断点

**1.20.** 设 $f(x)=\dfrac{\ln|x|}{|x-1|}\sin x$，则 $f(x)$ 有 (　　)

(A)1 个可去间断点，1 个跳跃间断点　　(B)1 个跳跃间断点，1 个无穷间断点

(C)2 个可去间断点　　(D)2 个无穷间断点

**1.21.** 设 $f(x)=\dfrac{x^2-x}{|x|(x^2-1)}$，则下列结论中错误的是 (　　)

(A)$x=-1,x=0,x=1$ 为 $f(x)$ 的间断点

(B)$x=-1$ 为无穷间断点

(C)$x=0$ 为可去间断点

(D)$x=1$ 为第一类间断点

**1.22.** 若 $f(x)$ 在 $(a,b)$ 内单调有界，则 $f(x)$ 在 $(a,b)$ 内间断点的类型只能是 (　　)

(A) 第一类间断点　　(B) 第二类间断点

(C) 既有第一类间断点也有第二类间断点　　(D) 结论不确定

**1.23.** 设 $f_1(x)=\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$，$f_2(x)=f_1[f_1(x)]$，$f_{k+1}(x)=f_1[f_k(x)]$，$k=1,2,\cdots$，则当 $n>1$ 时，$f_n(x)=$ (　　)

(A) $\dfrac{nx}{\sqrt{1+x^2}}$　　(B) $\dfrac{nx}{\sqrt{1+nx^2}}$　　(C) $\dfrac{x}{\sqrt{1+nx^2}}$　　(D) $\dfrac{x}{\sqrt{n+x^2}}$

**二、填空题(在目前的考研中，填空题是 4 分 / 题，请将答案填在题中的横线上.)**

**1.24.** 设 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)(x-5)}{(4x-1)^{\alpha}}=\beta>0$，则 $\alpha,\beta$ 的值为________.

**1.25.** 设 $f(x)$ 是奇函数，且对一切 $x$ 有 $f(x+2)=f(x)+f(2)$，又 $f(1)=a$，$a$ 为常数，$n$ 为整数，则 $f(n)=$________.

**1.26.** 对充分大的一切 $x$，给出以下 5 个函数：$100^x,\log_{10}x^{100},e^{10x},x^{10^{10}},e^{\frac{1}{100}x^2}$，则其中最大的是________.

**1.27.** $\lim\limits_{x\to0}x\cot 2x=$________.

**1.28.** $\lim\limits_{x\to0^+}x\ln x=$________.

**1.29.** $\lim\limits_{x\to0}(1+3x)^{\frac{2}{\sin x}}=$________.

**1.30.** $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\sqrt{3-x}-\sqrt{1+x}}{x^2+x-2}=$________.

**1.31.** $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x-\sin x}{(e^{x^2}-1)\ln(1-x)}=$________.

**1.32.** $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+1}{x-2}\right)^{2x-1}=$________.

**1.33.** 极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n+3\sqrt{n}}-\sqrt{n-\sqrt{n}}\right)=$________.

**1.34.** 若当 $x\to0$ 时，有 $\ln\dfrac{1-ax^2}{1+ax^2}\sim\dfrac{1}{10\,000}x^4+\sin^2(\sqrt{6}x)$，则 $a=$________.

**1.35.** 当 $x\to0$ 时，若有 $\ln\left(\cos\dfrac{2x}{3}\right)\sim Ax^k$，则 $A=$________，$k=$________.

**1.36.** 当 $x\to-1$ 时，无穷小 $\sqrt[3]{x}+1\sim A(x+1)^k$，则 $A=$________，$k=$________.

**1.37.** 当 $x \to \pi$ 时，若有 $\sqrt[4]{\sin\frac{x}{2}}-1 \sim A(x-\pi)^k$，则 $A=$ ________，$k=$ ________.

**1.38.** 若 $f(x)=\begin{cases} e^x(\sin x+\cos x), & x>0, \\ 2x+a, & x\leqslant 0 \end{cases}$ 是 $(-\infty,+\infty)$ 上的连续函数，则 $a=$ ________.

**1.39.** 已知数列 $F_n=\frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}\right]$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{F_n}{F_{n+1}}=$ ________.

**三、解答题（在目前的考研中，解答题包括计算题、应用题和证明题，平均 10 分／题.）**

**1.40.** 设 $f(x)=\begin{cases} 1, e^{-1}<x<1, \\ x, 1\leqslant x<e, \end{cases}$ $g(x)=e^x$，求 $f[g(x)]$.

**1.41.** 设 $f(x)=\begin{cases} x^2-1, & x\leqslant 0, \\ \ln x, & x>0, \end{cases}$ $g(x)=\begin{cases} 2e^x-1, & x\leqslant 0, \\ x^2-1, & x>0, \end{cases}$ 求 $f[g(x)]$.

**1.42.**（Ⅰ）求函数 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{1+(2x)^n+x^{2n}}$ 的表达式，$x\geqslant 0$.

（Ⅱ）讨论函数 $f(x)$ 的连续性.

**1.43.** 计算 $\lim\limits_{n\to\infty}(1+2^n+3^n)^{\frac{1}{n}}$.

**1.44.** 求极限：$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt[n]{1+\sin x}-1}{\tan x}$.

**1.45.** 求极限：$\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-e^{-x}}{\sin x}$.

**1.46.** 求极限：$\lim\limits_{x\to 0}\frac{(1-\cos x)\left(1-\cos\frac{x}{2}\right)}{\ln(1+x^4)}$.

**1.47.** 求极限：$\lim\limits_{x\to 0}(x+e^x)^{\frac{1}{x}}$.

**1.48.** 求极限：$\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{e^x+xe^x}{e^x-1}-\frac{1}{x}\right)$.

**1.49.** 求极限：设 $a\neq\frac{1}{2}$，计算 $\lim\limits_{n\to\infty}\ln\left(\frac{n-2na+1}{n(1-2a)}\right)^n$.

**1.50.** 求极限：$\lim\limits_{x\to 0}\frac{[\sin x-\sin(\sin x)]\sin x}{x^4}$.

**1.51.** 求极限：$\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{\tan x}-e^{\sin x}}{x\sin^2 x}$.

**1.52.** 求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+\tan x}-\sqrt{1+\sin x}}{x(1-\cos x)}$.

**1.53.** 求极限：$\lim\limits_{n\to+\infty}\left(n\tan\frac{1}{n}\right)^{n^2}$.

**1.54.** 求极限：$\lim\limits_{n\to\infty}\cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{4}\cdots\cos\frac{x}{2^n}$.

**1.55.** 求极限：$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^x$.

**1.56.** 求极限：$\lim\limits_{x\to 0}(\cos x)^{\cot^2 x}$.

**1.57.** 求极限：$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x+x^2\sin\frac{1}{x}}{(1+\cos x)\ln(1+x)}$.

**1.58.** 求极限：$\lim\limits_{n\to\infty}\left[n-n^2\ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right)\right]$.

**1.59.** 求极限：$\lim\limits_{x\to0}\left[\dfrac{a}{x}-\left(\dfrac{1}{x^2}-a^2\right)\ln(1+ax)\right](a\neq0)$.

**1.60.** 求极限：$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(x+a)^{x+a}(x+b)^{x+b}}{(x+a+b)^{2x+a+b}}$.

**1.61.** 求极限：$\lim\limits_{x\to0^+}x^{\frac{x}{1+\ln x}}$.

**1.62.** 求极限：$\lim\limits_{x\to0^+}(\cot x)^{\tan x}$.

**1.63.** 求极限：$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\int_0^{\sin^2x}\ln(1+t)\mathrm{d}t}{(\sqrt[3]{1+x^3}-1)\sin x}$.

**1.64.** 求极限：$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\int_0^x\left[\int_0^{u^2}\arctan(1+t)\mathrm{d}t\right]\mathrm{d}u}{x(1-\cos x)}$.

**1.65.** 求极限：$\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{x^x-(\sin x)^x}{x^2\ln(1+x)}$.

**1.66.** 求极限：$\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{1}{\sin^2x}-\dfrac{\cos^2x}{x^2}\right)$.

**1.67.** 求极限：$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\cos x-\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}}{x^2[x+\ln(1-x)]}$.

**1.68.** 求极限：$\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{1-\sqrt{\cos x}}{x(1-\cos\sqrt{x})}$.

**1.69.** 求极限：$\lim\limits_{x\to+\infty}(x+\mathrm{e}^x)^{\frac{1}{x}}$.

**1.70.** 求极限：$\lim\limits_{x\to+\infty}(x+\sqrt{1+x^2})^{\frac{1}{x}}$.

**1.71.** 求极限：$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin x-x\cos x}{\sin^3x}$.

**1.72.** 求极限：$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\mathrm{e}^x}{\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{x^2}}$.

**1.73.** 设 $f(x)=x^2+ax+b$，证明：$|f(1)|$，$|f(3)|$，$|f(5)|$ 中至少有一个不小于 2.

**1.74.** 求 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}(1+\sqrt[n]{2}+\cdots+\sqrt[n]{n})$.

**1.75.** 求极限 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\mathrm{e}-\mathrm{e}^{\cos x}}{\sqrt[3]{1+x^2}-1}$.

**1.76.** 求极限 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1}{x^3}\left[\left(\dfrac{2+\cos x}{3}\right)^x-1\right]$.

**1.77.** 求极限 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln(\sin^2x+\mathrm{e}^x)-x}{\ln(x^2+\mathrm{e}^{2x})-2x}$.

**1.78.** 求极限 $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x-x^x}{1-x+\ln x}$.

**1.79.** 求极限 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos x\cdot\sqrt{\cos 2x}}{x^2}$.

**1.80.** 求极限 $\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{\ln(1+e^{\frac{2}{x}})}{\ln(1+e^{\frac{1}{x}})}$.

**1.81.** 求极限 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}$.

**1.82.** 求极限 $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{x+\sqrt{x}}-\sqrt{x-\sqrt{x}})$.

**1.83.** 求极限

$\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{a_1^x+a_2^x+\cdots+a_n^x}{n}\right)^{\frac{1}{x}}$，$a_i>0$，且 $a_i\neq1$，$i=1,2,\cdots,n$，$n\geqslant2$.

**1.84.** 求 $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sin\sqrt{x+1}-\sin\sqrt{x})$.

**1.85.** 求 $\lim\limits_{n\to\infty}n^2\left(\arctan\dfrac{a}{n}-\arctan\dfrac{a}{n+1}\right)$.

**1.86.** 设 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln\left(1+\dfrac{f(x)}{\sin x}\right)}{a^x-1}=A(a>0,a\neq1)$，求 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)}{x^2}$.

**1.87.** 已知 $\lim\limits_{x\to1}f(x)$ 存在，且 $f(x)=\dfrac{x-\arctan(x-1)-1}{(x-1)^3}+2x^2e^{x-1}\lim\limits_{x\to1}f(x)$，求 $f(x)$.

**1.88.** 设 $f(x)$ 是三次多项式，且有 $\lim\limits_{x\to2a}\dfrac{f(x)}{x-2a}=\lim\limits_{x\to4a}\dfrac{f(x)}{x-4a}=1(a\neq0)$，求 $\lim\limits_{x\to3a}\dfrac{f(x)}{x-3a}$.

**1.89.** 设 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin x}{e^x-a}(\cos x-b)=5$，求 $a,b$ 的值.

**1.90.** 设 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^\alpha}{n^\beta-(n-1)^\beta}=10$，试求 $\alpha,\beta$ 的值.

**1.91.** 确定常数 $a$ 和 $b$ 的值，使 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln(1-2x+3x^2)+ax+bx^2}{x^2}=4$.

**1.92.** 设函数 $f(x)=(1+x)^{\frac{1}{x}}(x>0)$，证明：存在常数 $A,B$，使得当 $x\to0^+$ 时，恒有 $f(x)=e+Ax+Bx^2+o(x^2)$，并求常数 $A,B$.

**1.93.** 计算 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{(1+x)^{\frac{1}{x}}-(1+2x)^{\frac{1}{2x}}}{\sin x}$.

**1.94.** 已知 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{(1+x)^{\frac{1}{x}}-(A+Bx+Cx^2)}{x^3}=D\neq0$. 求常数 $A,B,C,D$.

**1.95.** 求 $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\left(n^3-n^2+\dfrac{n}{2}\right)e^{\frac{1}{n}}-\sqrt{1+n^6}\right]$.

**1.96.** 数列 $\{x_n\}$ 通项 $x_n=\dfrac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\dfrac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\cdots+\dfrac{1}{\sqrt{n^2+n}}$，求 $\lim\limits_{n\to+\infty}x_n$.

**1.97.** 设 $a_1=2$，$a_{n+1}=\dfrac{1}{2}\left(a_n+\dfrac{1}{a_n}\right)(n=1,2,\cdots)$，证明：$\lim\limits_{n\to\infty}a_n$ 存在并求其极限值.

**1.98.** . 设 $a_1=1$，当 $n\geqslant1$ 时，$a_{n+1}=\sqrt{\dfrac{a_n}{1+a_n}}$，证明：数列 $\{a_n\}$ 收敛，并求其极限值.

**1.99.** 设 $a_1=0$，当 $n\geqslant1$ 时，$a_{n+1}=2-\cos a_n$，证明：数列 $\{a_n\}$ 收敛，并证明其极限值位于区间 $\left(\dfrac{\pi}{2},\dfrac{2\pi}{3}\right)$ 内.

**1.100.** 设 $a_1=1$，当 $n\geqslant1$ 时，$a_{n+1}=\dfrac{1}{1+a_n}$，证明：数列 $\{a_n\}$ 收敛，并求其极限值.

**1.101.** 设 $x_1=1, x_{n+1}=1+\dfrac{x_n}{1+x_n}(n=1,2,\cdots)$，求 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$.

**1.102.** 如果数列 $\{x_n\}$ 收敛，$\{y_n\}$ 发散，那么 $\{x_ny_n\}$ 是否一定发散？如果 $\{x_n\}$ 和 $\{y_n\}$ 都发散，那么 $\{x_ny_n\}$ 的敛散性又将如何？

**1.103.** 证明：若单调数列 $\{x_n\}$ 有一收敛的子数列，则数列 $\{x_n\}$ 必收敛.

**1.104.** 分段函数一定不是初等函数，若正确，试证之；若不正确，试说明它们之间的关系？

**1.105.** 求 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{\sin\dfrac{\pi}{n}}{n+1}+\dfrac{\sin\dfrac{2\pi}{n}}{n+\dfrac{1}{2}}+\cdots+\dfrac{\sin\pi}{n+\dfrac{1}{n}}\right)$.

**1.106.** 计算 $\lim\limits_{n\to\infty}\left[1-\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+\cdots+(-1)^{n-1}\dfrac{1}{n}\right]$.

**1.107.** 利用夹逼定理证明：$\lim\limits_{n\to\infty}n^2\left(\dfrac{k}{n}-\dfrac{1}{n+1}-\dfrac{1}{n+2}-\cdots-\dfrac{1}{n+k}\right)=\dfrac{k(k+1)}{2}$.

**1.108.** 设 $f(x)$ 在 $x=0$ 处二阶导数连续，且

$$\lim_{x\to0}\left(1+x+x^2+\frac{f(x)}{x}\right)^{\frac{1}{x}}=\mathrm{e}^3,$$

试求 $f(0), f'(0), f''(0)$ 以及极限 $\lim\limits_{x\to0}\left(1+\dfrac{f(x)}{x}\right)^{\frac{1}{x}}$.

**1.109.** 计算 $\sum\limits_{i=1}^{\infty}\sum\limits_{j=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{i+j}}{i+j}$.

**1.110.** 设 $a>0, x_1>0, x_{n+1}=\dfrac{1}{4}\left(3x_n+\dfrac{a}{x_n^3}\right), n=1,2,\cdots$，试求 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$.

**1.111.** 试讨论函数 $g(x)=\begin{cases}x^{\alpha}\sin\dfrac{1}{x}, & x>0,\\ \mathrm{e}^x+\beta, & x\leqslant0\end{cases}$ 在点 $x=0$ 处的连续性.

**1.112.** 求函数 $F(x)=\begin{cases}\dfrac{x(\pi+2x)}{2\cos x}, x\leqslant0,\\ \sin\dfrac{1}{x^2-1}, x>0\end{cases}$ 的间断点，并判断它们的类型.

**1.113.** 求函数 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x^{n+2}-x^{-n}}{x^n+x^{-n}}$ 的间断点并指出其类型.

**1.114.** 已知 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x^{2n-1}+ax^2+bx}{x^{2n}+1}$ 是连续函数，求 $a,b$ 的值.

**1.115.** 设 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}\arctan\dfrac{1}{1+x}}{x^2+\mathrm{e}^{nx}}$，求 $f(x)$ 的间断点并判定其类型.

**1.116.** 设函数 $f(x)$ 连续可导，且 $f(0)=0, F(x)=\int_0^x t^{n-1}f(x^n-t^n)\mathrm{d}t$，求 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{F(x)}{x^{2n}}$.

**1.117.** 设 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x^{n+1}+(x^2-1)\sin ax}{x^n+x^2-1}$，为了使 $f(x)$ 对一切 $x$ 都连续，求常数 $a$ 的最小正值.

**1.118.** 设 $f(x)=\begin{cases}\mathrm{e}^{\frac{1}{x-1}}, & x>0\\ \ln(1+x), & -1<x<0\end{cases}$，求 $f(x)$ 的间断点，并说明间断点的类型，如是可去间断点，则补充或改变定义使它连续.