弹性地基结构

上册

黎紹敏 編著

哈尔滨建筑工程学院
一九八五年三月

第一章　弹性地基梁的计算理论

§1．绪　论

1801年富斯提出每单位长度地基梁的压力与地基沉陷成正比，这个假设只适用于等宽度的地基梁。1867年文克勒提出每单位面积上所受的压力与地基沉陷成正比。即 $\gamma = Kby$

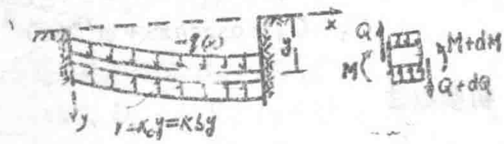


图1—1

式中　γ是地基底面任意一点的压力（kg/cm^2），y是该任意一点的沉陷值（cm），b是该任意一点梁的宽度（cm），K是地基系数（kg/cm^3）

这个假设可用于变宽度的地基梁和板的计算。

§2．等断面弹性地基梁计算的基本方程

$$\frac{d^2M}{dx^2} = q(x) + Kby, \qquad \frac{d^4M}{dx^4} = q''(x) + Kby''$$

因　$y'' = -\dfrac{M}{EJ}$，　得　$\dfrac{d^4M}{dx^4} + \dfrac{Kb}{EJ}M = q''(x)$

式中$q(x)$假设向上、

令　$k = \sqrt[4]{\dfrac{Kb}{4EJ}}$，　得　$\dfrac{d^4M}{dx^4} + 4k^4M = q''(x)$　（1—1）

若为均布荷载，$q''(x) = 0$，则　$\dfrac{d^4M}{dx^4} + 4k^4M = 0$　（1—2）

（1—2）的解为

$$M = A_1e^{kx}\cos kx + A_2e^{kx}\sin kx + A_3e^{-kx}\cos kx + A_4e^{-kx}\sin kx \qquad (1—3)$$

已知　$chkx = \dfrac{1}{2}(e^{kx} + e^{-kx})$，　$shkx = \dfrac{1}{2}(e^{kx} - e^{-kx})$，

并引入　$z = kx$，于是（1—3）式为

$$M = C_1\sin z\,shz + C_2\sin z\,chz + C_3\cos z\,shz + C_4\cos z\,chz \qquad (1—4)$$

若非均布荷载$q''(x) \neq 0$，（1—1）的全解为

$$M = C_1\sin z\,shz + C_2\sin z\,chz + C_3\cos z\,shz + C_4\cos z\,chz + \varphi(x) \qquad (1—5)$$

式中　$$\varphi(x) = \frac{q''}{4k^4} - \frac{q^{VI}}{16k^8} + \frac{q^{X}}{64k^{12}} \cdots + \frac{(-1)^{n-1}q^{[2+4(n-1)]}}{(4k^4)^n} + \frac{(-1)^n q^{[2+4n]}}{(4k^4)^{n+1}} \qquad (1—6)$$

($n=0$, 1, $n\cdots$)将(1—5)依次微分得：

$$Q=\frac{dM}{dx}=k[(C_2-C_3)\sin z\,\text{sh}z+(C_1-C_4)\sin z\,\text{ch}z+(C_1+C_4)\cos z\,\text{sh}z+ +(C_2+C_3)\cos z\,\text{ch}z]+\varphi'(x) \quad (1—7)$$

$$q+Kby=2k^2[-C_4\sin z\,\text{sh}z-C_3\sin z\,\text{ch}z+C_2\cos z\,\text{sh}z+C_1\cos z\,\text{ch}z] +\varphi''(x) \quad (1—8)$$

$$q'+Kby'=2k^3[-(C_2+C_3)\sin z\,\text{sh}z-(C_1+C_4)\sin z\,\text{ch}z+(C_1-C_4)\cos z\,\text{sh}z+ +(C_2-C_3)\cos z\,\text{ch}z]+\varphi'''(x) \quad (1—9)$$

§3. 初参数法

第Ⅰ段 $0\leqslant x\leqslant a$，当$x=0$，

$M=M_0$，$Q=Q_0$，

$q+Kby=q_0+Kby_0$，

$q'+Kby'=q_0'+Kby_0'$

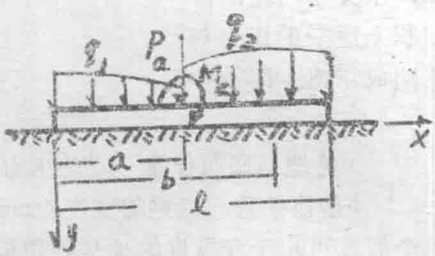


图1—2

因 $x=0$，$z=kx=0$，则 $\cos z\,\text{ch}z=1$，其余均为零，由(1—5)～(1—9)得 $M_0=C_4+\varphi(0)$，$Q_0=k(C_2+C_3)+\varphi'(0)$

$$q_0+Kby_0=2k^2C_1+\varphi''(0),\quad q_0'+Kby_0'=2k^3(C_2-C_3)+\varphi'''(0)$$

解上四式得 $C_1=\dfrac{q_0+Kby_0}{2k^2}-\dfrac{\varphi''(0)}{2k^2}$

$$C_2=\frac{Q_0}{2k}+\frac{q_0'+Kby_0'}{4k^3}-\frac{\varphi'(0)}{2k}-\frac{\varphi'''(0)}{4k^3},$$

$$C_3=\frac{Q_0}{2k}-\frac{q_0'+Kby_0'}{4k^3}-\frac{\varphi'(0)}{2k}+\frac{\varphi'''(0)}{4k^3},\quad C_4=M_0-\varphi(0),$$

将求得的C_1，C_2，C_3和C_4代入(1—5)～(1—9)并引入

$$\left.\begin{aligned}&S_0=\frac{q_0+Kby_0}{k^2},\quad N_0=\frac{q_0'+Kby_0'}{k^3},\quad A_z=\cos z\,\text{ch}z,\\&B_z=\frac{\sin z\,\text{ch}z+\cos z\,\text{sh}z}{2},\quad C_z=\frac{\sin z\,\text{sh}z}{2},\quad D_z=\frac{\sin z\,\text{ch}z-\cos z\,\text{sh}z}{4}\end{aligned}\right\}\quad (1—10)$$

得：

$$M_1=[M_0-\varphi(0)]A_z+\frac{[Q_0-\varphi'(0)]}{k}B_z+\left[S_0-\frac{\varphi''(0)}{k^2}\right]C_z+ +\left[N_0-\frac{\varphi'''(0)}{k^3}\right]D_z+\varphi(x) \quad (1—11)$$

$$Q_1=-4k[M_0-\varphi(0)]D_z+[Q_0-\varphi'(0)]A_z+\left[kS_0-\frac{\varphi''(0)}{k}\right]B_z+ \left[kN_0-\frac{\varphi'''(0)}{k^2}\right]C_z+\varphi'(x) \quad (1—12)$$

$$q_1+Kby_1=-4k^2[M_0-\varphi(0)]C_z-4k[Q_0-\varphi'(0)]D_z+[k^2S_0-\varphi''(0)]A_z$$
$$+\left[k^2N_0-\frac{\varphi'''(0)}{k}\right]B_z+\varphi''(x) \qquad (1-13)$$

$$q_1'+Kby_1'=-4k^3[M_0-\varphi(0)]B_z-4k^2[Q_0-\varphi'(0)]C_z-4k[k^2S_0-$$
$$-\varphi''(0)]D_z+[k^3N_0-\varphi'''(0)]A_z+\varphi'''(x) \qquad (1-14)$$

若为线性变化的分布荷载，则$q''(x)=0$，$\varphi(x)=0$，得：

$$M_1=M_0A_z+\frac{Q_0}{k}B_z+S_0C_z+N_0D_z \qquad (1-15)$$

$$Q_1=-4kM_0D_z+Q_0A_z+kS_0B_z+kN_0C_z \qquad (1-16)$$
$$q_1+Kby_1=-4k^2M_0C_z-4kQ_0D_z+k^2S_0A_z+k^2N_0B_z \qquad (1-17)$$
$$q_1'+Kby_1'=-4k^3M_0B_z-4k^2Q_0C_z-4k^3S_0D_z+k^3N_0A_z \qquad (1-18)$$

第Ⅱ段　$a\leqslant x\leqslant b$，令　$kx=z$，$ka=\alpha$，由（1—11）～（1—14）得

$$M_2=M_1+[\triangle M_a-\triangle\varphi(a)]A_{z-a}+\frac{\triangle Q_a-\triangle\varphi'(a)}{k}B_{z-a}+$$
$$+\frac{\triangle q_a-\triangle\varphi''(a)}{k^2}C_{z-a}+\frac{\triangle q_a'-\triangle\varphi'''(a)}{k^3}D_{z-a}+\triangle\varphi(x)$$
$$(1-19)$$

$$Q_2=Q_1-4k[\triangle M_a-\triangle\varphi(a)]D_{z-a}+[\triangle Q_a-\triangle\varphi'(a)]A_{z-a}+$$
$$+\frac{\triangle q_a-\triangle\varphi''(a)}{k}B_{z-a}+\frac{\triangle q_a'-\triangle\varphi'''(a)}{k^3}C_{z-a}+\triangle\varphi'(x)$$
$$(1-20)$$

$$q_2+Kby_2=q_1+Kby_1-4k^2[\triangle M_a-\triangle\varphi(a)]C_{z-a}-4k[\triangle Q_a-\triangle\varphi'(a)]D_{z-a}$$
$$+[\triangle q_a-\triangle\varphi''(a)]A_{z-a}+\frac{\triangle q_a'-\triangle\varphi'''(a)}{k}B_{z-a}+\triangle\varphi''(x)$$
$$(1-21)$$

$$q_2'+Kby_2'=q_1'+Kby_1'-4k^3[\triangle M_a-\triangle\varphi(a)]B_{z-a}-4k^2[\triangle Q_a-\triangle\varphi'(a)]C_{z-}$$
$$-4k[\triangle q_a-\triangle\varphi''(a)]D_{z-a}+[\triangle q_a'-\triangle\varphi'''(a)]A_{z-a}$$
$$+\triangle\varphi'''(x) \qquad (1-22)$$

若为连续不断的分布荷载，$\triangle\varphi(x)=0$，得

$$M_2=M_1+\triangle M_aA_{z-a}+\frac{\triangle Q_a}{k}B_{z-a}+\frac{\triangle q_a}{k^2}C_{z-a}+\frac{\triangle q_a'}{k^3}D_{z-a} \qquad (1-23)$$

$$Q_2=Q_1-4k\triangle M_aD_{z-a}+\triangle Q_aA_{z-a}+\frac{\triangle q_a}{k}B_{z-a}+\frac{\triangle q_a'}{k^2}C_{z-a} \qquad (1-24)$$

$$q_2+Kby_2=q_1+Kby_1-4k^2\triangle M_aC_{z-a}-4k\triangle Q_aD_{z-a}+\triangle q_aA_{z-a}$$
$$+\frac{\triangle q_a'}{k}B_{z-a} \qquad (1-25)$$

$$q_2'+Kby_2'=q_1'+Kby_1'-4k^3\triangle M_aB_{z-a}-4k^2\triangle Q_aC_{z-a}-4k\triangle q_aD_{z-a}$$
$$+\triangle q_a'A_{z-a} \qquad (1-26)$$

§4. 分布力偶作用下弹性地基梁的计算

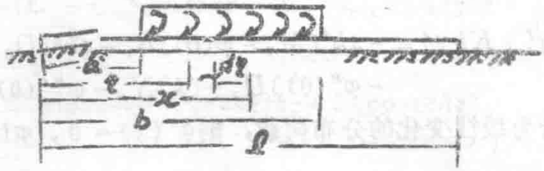
第Ⅰ段 $0\leqslant x\leqslant a$,

当$x=0$，$M_0=Q_0=0$，

$y'_0\neq 0$，$y_0\neq 0$，

则 $N_0\neq 0$，$S_0\neq 0$，

由（1—15)～(1—18）得



图(1—3)

$M_1=S_0C_z+N_0D_z$,

$Q_1=kS_0B_z+kN_0C_z$,

$q_1+Kby_1=k^2S_0A_z+k^2N_0B_z$, $q'_1+Kby'_1=-4k^3S_0D_z+k^3N_0A_z$

第Ⅱ段 $a\leqslant x\leqslant b$，由（1—23）～（1—26）得

$$M_2=M_1+\int_a^x md\eta\cdot A_{k(x-\eta)},\quad Q_2=Q_1+\int_a^x -4kmd\eta\cdot D_{k(x-\eta)},$$

$$q_2+Kby_2=q_1+Kby_1+\int_a^x -4k^2md\eta\cdot C_{k(x-\eta)}$$

$$q'_2+Kby'_2=q'_1+Kby'_1+\int_a^x -4k^3md\eta\cdot B_{k(x-\eta)}$$

若令 $k(x-\eta)=\xi$, $-kd\eta=d\xi$, $\therefore\ d\eta=-\dfrac{d\xi}{k}$，于是得

$$M_2=M_1-\frac{m}{k}\int_a^x A_\xi d\xi,\quad Q_2=Q_1+4m\int_a^x D_\xi d\xi$$

$$q_2+Kby_2=q_1+Kby_1+4km\int_a^x C_\xi d\xi,\quad q'_2+Kby'_2=q'_1+Kby'_1+4k^2m\int_a^x B_\xi d\xi$$

因 $\int_a^x A_\xi d\xi=B_\xi\Big|_a^x=B_{k(x-\eta)}\Big|_a^x=B_{k(x-x)}-B_{k(x-a)}=-B_{k(x-a)}$,

$$\int_a^x D_\xi d\xi=-\frac{A_\xi}{4}\Big|_a^x=-\frac{1}{4}A_{k(x-\eta)}\Big|_a^x=-\frac{1}{4}[A_{k(x-x)}-A_{k(x-a)}]=\frac{-1+A_\xi(x-a)}{4}$$

$$\int_a^x C_\xi d\xi=D_\xi\Big|_a^x=D_{k(x-\eta)}\Big|_a^x=D_{k(x-x)}-D_{k(x-a)}=-D_{k(x-a)},$$

$$\int_a^x B_\xi d\xi=C_\xi\Big|_a^x=C_{k(x-\eta)}\Big|_a^x=C_{k(x-x)}-C_{k(x-a)}=-C_{k(x-a)}$$

代入得最后结果：令 $z=kx$，$\alpha=ka$

$$M_2=M_1+\frac{m}{k}B_{z-\alpha}\tag{1—27}$$

$$Q_2=Q_1+m(A_{z-\alpha}-1)\tag{1—28}$$

$$q_2+Kby_2=q_1+Kby_1-4kmD_{z-\alpha}\tag{1—29}$$

$$q'_2+Kby'_2=q'_1+Kby'_1-4k^2mC_{z-\alpha}\tag{1—30}$$

第Ⅲ段 $b\leqslant x\leqslant l$ 令 $\beta=kb$ 得

$$M_3=M_1+\frac{m}{k}B_{z-\alpha}-\frac{m}{k}B_{z-\beta}\tag{1—31}$$

$$Q_3 = Q_1 + m(A_{z-\alpha} - 1) - m(A_{z-\beta} - 1) \qquad (1-32)$$

$$O + Kby_3 = q_1 + Kby_1 - 4kmD_{z-\alpha} + 4kmD_{z-\beta} \qquad (1-33)$$

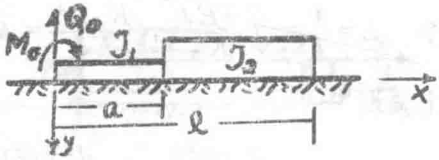
$$O + Kby'_3 = q'_1 + Kby'_1 - 4k^2mC_{z-\alpha} + 4k^2mC_{z-\beta} \qquad (1-34)$$

§5. 弹性地基梁断面阶梯形改变时的计算

承受线性变化的分布荷载

令 $k_1 = \sqrt[4]{\dfrac{Kb}{4EJ_1}}$,

$k_2 = \sqrt[4]{\dfrac{Kb}{4EJ_2}}$



图(1—4)

当 $0 \leqslant x \leqslant a$, 由(1—15)～(1—18)得

$$M_1 = M_0A_z + \frac{Q_0}{k_1}B_z + S_0C_z + N_0D_z \qquad (1-35)$$

$$Q_1 = -4k_1M_0D_z + Q_0A_z + k_1S_0B_z + k_1N_0C_z \qquad (1-36)$$

$$q_1 + Kby_1 = -4k_1^2M_0C_z - 4k_1Q_0D_z + k_1^2S_0A_z + k_1^2N_0B_z \qquad (1-37)$$

$$q'_1 + Kby'_1 = -4k_1^3M_0B_z - 4k_1^2Q_0C_z - 4k_1^3S_0D_z + k_1^3N_0A_z \qquad (1-38)$$

式中 $z = k_1x$, 当$x = a$, $z = ma$代入上式得 M_a, Q_a, y_a和y'_a

当 $a \leqslant x \leqslant l$, 得

$$M_2 = M_aA_z + \frac{Q_a}{k_2}B_z + S_aC_z + N_aD_z \qquad (1-39)$$

$$Q_2 = -4k_2M_aD_z + Q_aA_z + k_2S_aB_z + k_2N_aC_z \qquad (1-40)$$

$$q_2 + Kby_2 = -4k_2^2M_aC_z - 4k_2Q_aD_z + k_2^2S_aA_z + k_2^2N_aB_z \qquad (1-41)$$

$$q'_2 + Kby'_2 = -4k_2^3M_aB_z - 4k_2^2Q_aC_z - 4k_2^3S_aD_z + k_2^3N_aA_z \qquad (1-42)$$

式中 $k_2x = z$, $S_a = \dfrac{q_{(a+dx)} + Kby_a}{k_2^2}$, $N_a = \dfrac{q'_{(a+dx)} + Kby'_a}{k_2^3}$,

若坐标原点固定不移动，则当$a \leqslant x \leqslant l$时的第二段中上式的$A_z$, B_z, C_z和D_z要用A_{z-a}, B_{z-a}, C_{z-a}和D_{z-a}代入，$z = k_2x$, $\alpha = k_2a$

§6 考虑切力影响的地基梁计算

在梁的横断面除弯矩外、一般还有切力作用，引起的剪切对梁的变形有时需考虑，因此总挠度为 $y(x) = y_1(x) + y_2(x)$ 式中$y_1(x)$为弯矩引起的挠度，$y_2(x)$为切力引起的挠度，将上式微分四次得 $\dfrac{d^4y(x)}{dx^4} = \dfrac{d^4y_1(x)}{dx^4} + \dfrac{d^4y_2(x)}{dx^4}$, (a)

由于纯弯矩引起的 $\dfrac{d^4y_1(x)}{dx^4} = -4k^4y(x) = -\dfrac{K_0}{EJ}y(x)$，而切力引起的曲率表达式为$\dfrac{d^4y_2(x)}{dx^4} = \dfrac{\alpha}{FG}\dfrac{d^2M}{dx^2} = \dfrac{\alpha K_0}{FG}y(x)$

代入（a）式得 $\frac{d^4y(x)}{dx^4}-\frac{aK_0}{FG}\frac{d^2y(x)}{dx^2}+\frac{K_0}{EJ}y(x)=0$

若引用相对横坐标 $\xi=\frac{x}{L}$，上式为 $\frac{d^4y(\xi)}{d\xi^4}-\frac{aK_0L^2}{FG}\cdot\frac{d^2y(\xi)}{d\xi^2}+\frac{K_0L^4}{EJ}y(\xi)=0$

令 $L=\frac{1}{k}=\sqrt[4]{\frac{4EJ}{K_0}}$，$\frac{K_0L^4}{EJ}=4$，$\frac{aK_0L^2}{FG}=4s$，$s=\frac{aK_0L^2}{4FG}$，

于是上式为

$$\frac{d^4y(\xi)}{d\xi^4}-4s\frac{d^2y(\xi)}{d\xi^2}+4y(\xi)=0 \qquad (1-43)$$

EJ和FG为梁的抗弯和抗剪刚度，α为横断面剪应力不均匀分布修正系数，对于园形$\alpha=1.22$，矩形$\alpha=1.2$

利用初参法得其解为：

$$y(\xi)=y(0)A_\xi+y'(0)B_\xi+y''(0)C_\xi+y'''(0)D_\xi \qquad (1-44)$$

函数

$$\left.\begin{aligned}
&A_\xi=chu\xi\cos v\xi-\frac{u^2-v^2}{2uv}shu\xi\sin v\xi;\quad C_\xi=\frac{1}{2uv}shu\xi\sin v\xi\\
&B_\xi=\frac{3v^2-u^2}{2v(u^2+v^2)}chu\xi\sin v\xi+\frac{3u^2-v^2}{2u(u^2+v^2)}shu\xi\cos v\xi;\\
&D_\xi=\frac{1}{2(u^2+v^2)}\left(\frac{chu\xi\sin v\xi}{v}-\frac{shu\xi\cos v\xi}{u}\right)
\end{aligned}\right\} \qquad (1-45)$$

式中初参数为：

$$y(0)=y_0;\ y'(0)=\triangle\varphi_0;\ y''(0)=\frac{L^2}{EJ}M_0;\ y'''(0)=\frac{L^3}{EJ}Q_0;\ u=\sqrt{1-G};$$

$$v=\sqrt{1+G} \qquad (1-46)$$

若$G=0$，即不考虑切力影响，则得$u=v=1$，（1—45）变成（1—10）

第二章　各种荷重作用下等断面地基梁

§1. 承受均布荷重

图(2—1)

解：利用边界条件：

当 $x=0$，$M_0=0$，$Q_0=0$，未知初参数为 y_0和y'_0，即

$$S_0=\frac{q_0+Kby_0}{k^2} \qquad (1)$$

$$N_0=\frac{q'_0+Kby'_0}{k^3} \qquad (2)$$

当$x=l$，$M_l=0$，$Q_l=0$，由（1—15）～（1—18）得

$$M=S_0C_z+N_0D_z, \quad Q=kS_0B_z+kN_0C_z$$

当$x=l$，$z=kl=\lambda$，得　$M_l=S_0C_\lambda+N_0D_\lambda=0$，

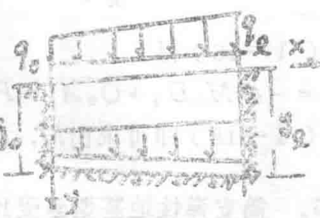
$Q_l=k(S_0B_\lambda+N_0C_\lambda)=0$，由上二式解得　$S_0=0$，$N_0=0$，

$\therefore$　$M=0$，$Q=0$，即梁不承受弯曲，均匀下降，由（1）和（2）得

$$y_0=\frac{q}{Kb}, \quad y'_0=0,$$

§2. 承受线性变化的分布荷重

令　$q=-(q_0+q'_0x)$



图(2—2)

解：当$x=0$，$M_0=0$，$Q_0=0$，

未知初参数　$y_0=?$　$y'_0=?$

即　　　$S_0=?$　$N_0=?$

利用　$x=l$，$M_l=0$，$Q_l=0$米求

由（1—15）～（1—18）得

$M_l=S_0C_\lambda+N_0D_\lambda=0$，

$Q_l=k(S_0B_\lambda+N_0C_\lambda)=0$，　$\lambda=kl$，

由上二式解得

$S_0=0$，$N_0=0$，$\therefore$　$M=0$，$Q=0$，梁不承受弯曲、由（1—17）式得 $q+Kby=0$，由此得

$$y=\frac{-q}{Kb}=\frac{q_0+q'_0x}{Kb}, \quad x=0, \quad y_0=\frac{q_0}{Kb}, \quad x=l, \quad y_l=\frac{q_0+q'_0l}{Kb}$$

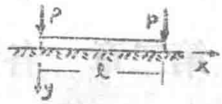
§3. 梁两端对称作用集中力

解：当$x=0$，$M_0=0$，$Q_0=-P$，

未知初参数为　$y_0=?$　$y'_0=?$

即 $S_0=?\ N_0=?$

利用 $x=\dfrac{l}{2}, Q_{l/2}=0, y'_{l/2}=0$来求，



或者利用$x=l$，$M_l=0$，$Q_l=P$来求，

由（1—16）得：当$x=l/2$，

图(2—3)

$$Q_{l/2}=-PA_z+kS_0B_z+kN_0C_z,$$

和 $$0+Kby'_{l/2}=4Pk^2C_z-4k^3S_0D_z+k^3N_0A_z$$

令 $z=\dfrac{kl}{2}=\dfrac{1}{2}\lambda$， $Q_{l/2}=-PA_{\frac{\lambda}{2}}+kS_0B_{\frac{\lambda}{2}}+kN_0C_{\frac{\lambda}{2}}=0$

$$Kby'_{l/2}=4Pk^2C_{\frac{\lambda}{2}}-4k^3S_0D_{\frac{\lambda}{2}}+k^3N_0A_{\frac{\lambda}{2}}=0$$

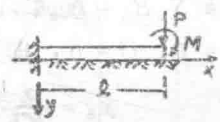
由上二式可以解得S_0和N_0，再将S_0和N_0代入（1—15）～（1—18）即可求出M，Q，y和y'图

§4. 一端完全固定、另一端自由并作用集中力和力偶

解：$x=0\ M_0=?\ Q_0=?$

由于 $y_0=0$，$y'_0=0$，∴ $S_0=0$，

$N_0=0$，



利用$x=l$，$M_l=-M$，$Q_l=P$来求

由（1—15），令 $z=kl=\lambda$代入得

$$M_l=M_0\cdot A_\lambda+\frac{Q_0}{k}B_\lambda=-M,$$

图(2—4)

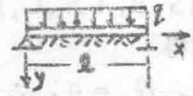
由（1—16）得

$Q_l=-4kM_0D_\lambda+Q_0A_\lambda=P$，解上二式求得$M_0$和$Q$，再将$M_0$和$Q_0$代入（1—15）～（1—18）即可求出$M$，$Q$，$y$和$y'$图，

§5. 简支弹性地基梁承受均布荷重

解：$x=0$，$M_0=0$，$y_0=0$，即 $S_0=\dfrac{-q}{k^2}$

未知初参数为 $Q_0=?\ y'_0=?$ 即$N_0=?$



利用$x=l$，$z=kl=\lambda$，$M_l=0$ 或 $y_l=0$，

$x=l/2$， $z=\dfrac{kl}{2}=\dfrac{\lambda}{2}$，$Q_{l/2}=0$， 或

图(2—5)

$y'_{l/2}=0$ 来求 由（1—15）和（1—16）得 $M_l=\dfrac{Q_0}{k}B_\lambda-\dfrac{q}{k^2}C_\lambda+N_0D_\lambda=0$ 和 $Q_{l/2}=Q_0A_{\frac{\lambda}{2}}-\dfrac{q}{k}B_{\frac{\lambda}{2}}+kN_0C_{\frac{\lambda}{2}}=0$，由上二式解得$Q_0$和$N_0$，再将$Q_0$和$N_0$代入（1—15）～（1—18）即可求出$M$，$Q$，$y$和$y'$图。

§6. 同时承受集中力和集中力偶作用

解：$x=0$，$M_0=0$，$Q_0=0$，

未知初参数 $y_0=?$ $y_0'=?$

即 $S_0=?$ $N_0=?$

利用当$x=l$，$M_l=0$和$Q_l=P$来求：

由（1—15）～（1—18）和（1—32）～（1—26）此处 $\triangle M=M$，$\triangle Q=-P$，

图(2—6)

I	II	III
$0\leqslant x\leqslant a$	$a\leqslant x\leqslant b$	$b\leqslant x\leqslant l$
$M_1=S_0C_z+N_0D_z$	$+MA_{z-\alpha}$	$-\frac{P}{k}B_{z-\beta}$
$Q_1=kS_0B_z+kN_0C_z$	$-4kMD_{z-\alpha}$	$-PA_{z-\beta}$

此处 $\alpha=ka$，$\beta=kb$，$x=l$，$z=mx=ml=\lambda$ 得

$$M_l=S_0C_\lambda+N_0D_\lambda+MA_{\lambda-\alpha}-\frac{P}{k}B_{\lambda-\beta}=0$$

$$Q_l=kS_0B_\lambda+kN_0C_\lambda-4kMD_{\lambda-\alpha}-PA_{\lambda-\beta}=P$$

由上二式解得S_0和N_0，再将S_0和N_0代入（1—23）～（1—26）即可求出M，Q，y和y'图。

§7. 两端完全固定、一端转动单位角度

解：$x=0$，$y_0=0$，$S_0=0$，

$$y_0'=1,\qquad N_0=\frac{Kb}{k^3}$$

未知初参数为 $M_0=?$ $Q_0=?$

利用 $x=l$，$y_l=0$，$y_l'=0$ 来求，由（1—17）～（1—18）得：

图(2—7)

$$Kby_l=-4k^2M_0C_\lambda-4kQ_0D_\lambda+k^2\frac{Kb}{k^3}B_\lambda=0$$

$$Kby_l'=-4k^3M_0B_\lambda-4kQ_0C_\lambda+k^3\frac{Kb}{k^3}A_\lambda=0$$

此处 $x=l$，$z=kx=kl=\lambda$

由上二式可解得M_0和Q_0，再代入（1—15）～（1—18）即可求出M，Q，y和y'图

§8. 计算举例

例（2—1）：如图（2—8）所示简支地基梁承受均布荷重，试求弯矩图、已知 $l=5m$，$b=60cm$，

$K=21kg/cm^3$，$J=24\cdot10^5$
cm^4，$E=2.1\cdot10^5kg/cm^2$

图(2—8)

解：$k=\sqrt[4]{\dfrac{Kb}{4EJ}}=0.5\dfrac{1}{m}$

当 $x=0$，$M_0=0$，$y_0=0$，即

$S_c=\dfrac{-q}{k^2}$ 未知初参数为 y'_0（即N_0）和Q_0

利用 $x=l$，$z=kx=kl=\lambda$，$M_l=0$，和 $x=\dfrac{l}{2}$，$z=\dfrac{\lambda}{2}$，$Q_{l/2}=0$

由（1—15）得 $M_l=\dfrac{Q_c}{k}B_\lambda-\dfrac{q}{k^2}C_\lambda+N_0D_\lambda=0$ （1）

由（1—16）得 $Q_{l/2}=Q_0A_{\frac{\lambda}{2}}-\dfrac{q}{k}B_{\frac{\lambda}{2}}+kN_0C_{\frac{\lambda}{2}}=0$ （2）

A，B，C，D查函数表得

x	$z=kx$	A_x	B_x	C_x	D_x
5	2.5	−4.9128	−0.5885	1.81045	2.12925
2.5	1.25	0.5955	1.1486	0.7601	0.32175
1.25	0.625	0.9745	0.6200	0.1960	0.0400

由（1） $-\dfrac{Q_0}{0.5}\cdot0.5885-\dfrac{q}{0.25}\cdot1.81045+2.12925N_0=0$

由（2） $0.5955Q_0-\dfrac{q}{0.5}\cdot1.1486+0.7601\cdot0.5N_c=0$

由上二式解得 $Q_0=1.248q$，$N_0=4.096q$

将Q_0和N_0代入（1—15）得 $M_x=2.496qB_z-4qC_z+4.096qD_z$ （3）

式中 $z=kx$，当 $x=2.5$，$z=1.25$ 由（3）式得

$M_{2.5}=2.496q\cdot1.1486-4q\cdot0.7601+4.096q\cdot0.32175=1.13q$

当 $x=1.25$，$z=0.625$，由（3）式得

$M_{1.25}=2.496q\cdot0.62-4q\cdot0.196+4.096q\cdot0.04=0.92q$

例（2—2）：如图（2—9）所示跨度为12m的简支地基梁，承受均布荷重、已知 $b=60cm$，$K=21kg/cm^3$，$J=24\cdot10^5cm^4$，$E=2.1\cdot10^5kg/cm^2$，求弯矩图

解：$k=\sqrt[4]{\dfrac{Kb}{4EJ}}=0.5\dfrac{1}{m}$，$x=0$，$M_0=0$，$y_0=0$ 得 $S_c=\dfrac{-q}{k^2}=-4q$

未知初参数为 y'_0（即N_0）和Q_0，利用 $x=l$，$z=kx=kl=\lambda$，$M_l=0$ 和

$x=\frac{l}{2}$，$z=\frac{\lambda}{2}$，$Q_{l/2}=0$ 来求

由（1—15） $M_l=\frac{Q_0}{k}B_\lambda-\frac{q}{k^2}C_\lambda+N_{0\lambda}D=0$ （1）

由（1—16） $Q_{l/2}=Q_0A_{\frac{\lambda}{2}}-\frac{q}{k}B_{\frac{\lambda}{2}}+kN_0C_{\frac{\lambda}{2}}=0$ （2）

A，B，C，D查函数表得

x	z	A_x	B_x	C_x	D_x
12	6	193.6813	68.6578	-28.2116	-62.5106
6	3	9.9669	-4.2485	0.7069	2.8346
3	1.5	0.1664	1.2486	1.0620	0.5490

由（1） $2\cdot68.6578Q_0+4q\cdot28.2116-62.5106N_0=0$

由（2） $9.9669Q_0+2q\cdot4.2485+0.5\cdot0.7069N_0=0$

解上二式得 $Q_0=0.999q$，$N_0=3.99q$

将 Q_0，N_0代入（1—15），$z=kx$

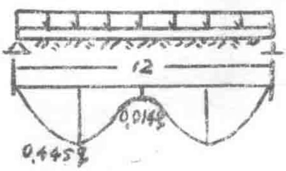
$M_x=1.998qB_z-4qC_z+3.99qD_z$

当 $x=6$，$z=3$，

$M_6=-1.998q\cdot4.2485-4q\cdot0.7069$
$+3.99q\cdot2.8346=0.014q$

当 $x=3$，$z=1.5$，

$M_3=1.998q\cdot1.2486-4q\cdot1.062$
$+3.99q\cdot0.549=0.445q$



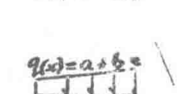
图（2—9）

习　　题

2—1：如图（2—10）所示地基梁，试求梁的位移、转角和内力方程式

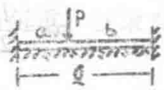
图（2—10）

2—2：如图（2—11）所示地基梁承受线性分布荷重$q(x)=a+bx$ 试求梁的位移和内力，



图（2—11）

2—3：如图（2—12）的地基梁试求固端弯矩和剪力

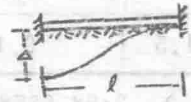


图(2—12)

2—4：如图（2—13）的地基梁、试求两端的反力

图(2—13)

2—5：如图（2—14）的地基梁，左端下沉△，求两端弯矩和剪力



图(2—14)

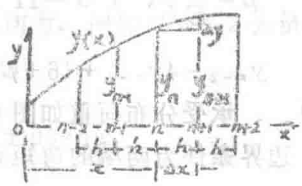
第三章　差分法计算弹性地基梁

§1．差分法的基本公式

该法对于弹性地基梁的数值计算非常方便、如图（3—1）示的曲线函数为$y(x)$，此时$y(x)$的一阶导数$\frac{dy}{dx}$和二阶导数$\frac{d^2y}{dx^2}$为

$$\frac{dy}{dx}=\lim_{\triangle x\to 0}\frac{\triangle y}{\triangle x},\quad \frac{d^2y}{dx^2}=\lim_{\triangle x\to 0}\frac{\triangle}{\triangle x}\left(\frac{\triangle y}{\triangle x}\right),$$

在上式中，如果不取$\triangle x\to 0$，而取$\triangle x=h$的有限值、则



图（3—1）

$$\frac{dy}{dx}\approx\frac{1}{h}(y_{n+1}-y_n)，\text{或}\ \frac{1}{2h}(y_{n+1}-y_{n-1}) \tag{3—1}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}\approx\frac{1}{h}\left(\frac{y_{n+1}-y_n}{h}-\frac{y_n-y_{n-1}}{h}\right)=\frac{1}{h^2}(y_{n+1}-2y_n+y_{n-1}) \tag{3—2}$$

若令 $\frac{d^2y}{dx^2}=\alpha$，则 $\alpha_{n+1}=\frac{1}{h^2}(y_{n+2}-2y_{n+1}+y_n)$，

$\alpha_{n-1}=\frac{1}{h^2}(y_n-2y_{n-1}+y_{n-2})$，于是推得：

$$\frac{d^3y}{dx^3}=\frac{d\alpha}{dx}\approx\frac{1}{2h^3}(y_{n+2}-2y_{n+1}+2y_{n-1}-y_{n-2}) \tag{3—3}$$

$$\frac{d^4y}{dx^4}=\frac{d^2\alpha}{dx^2}\approx\frac{1}{h^2}(\alpha_{n+1}-2\alpha_n+\alpha_{n-1})=\frac{1}{h^4}(y_{n+2}-4y_{n+1}+6y_n-4y_{n-1}+y_{n-2}) \tag{3—4}$$

§2．差分法解弹性地基梁

已知 $\frac{d^2y}{dx^2}=-\frac{M(x)}{EJ}$，$\frac{d^3y}{dx^3}=-\frac{Q(x)}{EJ}$，$\frac{d^4y}{dx^4}=\frac{q(x)-K_0y}{EJ}$ （3—5）

式中 $K_0=Kb$，若为变断面地基梁，由（3—2）～（3—4）得

$$y_{n+1}-2y_n+y_{n-1}=-\frac{h^2M_n^{(x)}}{EJ_n} \tag{3—6}$$

$$y_{n+2}-2y_{n+1}+2y_{n-1}-y_{n-2}=-\frac{2h^3Q_n^{(x)}}{EJ_n} \tag{3—7}$$

$$y_{n+2}-4y_{n+1}+6y_n-4y_{n-1}+y_{n-2}=\frac{h^4[q_n(x)-K_{0n}y_n]}{EJ_n} \tag{3—8}$$

若为等断面：即$EJ=$常数，则上式为

$$M_n(x)=-\frac{EJ}{h^2}(y_{n+1}-2y_n+y_{n-1}) \quad (3-9)$$

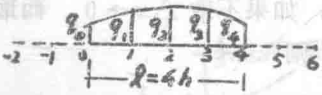
$$Q_n(x)=-\frac{EJ}{2h^3}(y_{n+2}-2y_{n+1}+2y_{n-1}-y_{n-2}) \quad (3-10)$$

$$y_{n+2}-4y_{n+1}+6y_n-4y_{n-1}+y_{n-2}=\frac{h^4}{EJ}(q_n(x)-K_{0n}y_n) \quad (3-11)$$

令 $\beta=\frac{h^4}{EJ}$，（3—11）式为

$$y_{n-2}-4y_{n-1}+(6+\beta K_{0n})y_n-4y_{n+1}+y_{n+2}=\beta q_n(x) \quad (3-12)$$

A。、承受分布荷重如图（3—2）、边界条件为两端的弯矩和切力为零



图（3—2）

即 $\frac{d^2y}{dx^2}=0$ 和 $\frac{d^3y}{dx^3}=0$

可用差分方程来表达这些条件如下：

左端0点：$\frac{1}{h^2}(y_{-1}-2y_0+y_1)=0$ 和 $\frac{1}{2h^3}(y_{-2}-2y_{-1}+2y_1-y_2)=0$

右端m点：$\frac{1}{h^2}(y_{m+1}-2y_m+y_{m-1})=0$ 和 $\frac{1}{2h^3}(y_{m+2}-2y_{m+1}+2y_{m-1}-y_{m-2})=0$

由此得：

$$\left.\begin{aligned} &y_{-1}=2y_0-y_1, \quad y_{-2}=4y_0-4y_1+y_2, \\ &y_{m+1}=2y_m-y_{m-1}, \quad y_{m+2}=4y_m-4y_{m-1}+y_{m-2} \end{aligned}\right\} \quad (3-13)$$

若将梁m等分，$h=\frac{l}{m}$，差分方程为：

$$\left.\begin{aligned}
n=0,\quad & (2+\beta K_{00})y_0-4y_1+2y_2=\beta q_0 \\
n=1,\quad & -2y_0+(5+\beta K_{01})y_1-4y_2+y_3=\beta q_1 \\
n=2,\quad & y_0-4y_1+(6+\beta K_{02})y_2-4y_3+y_4=\beta q_2 \\
n=3,\quad & y_1-4y_2+(6+\beta K_{03})y_3-4y_4+y_5=\beta q_3 \\
\cdots\quad & \cdots \\
n=m-2,\quad & y_{m-4}-4y_{m-3}+(6+\beta K_{0(m-2)})y_{m-2}-4y_{m-1}+y_m=\beta q_{m-2} \\
n=m-1,\quad & y_{m-3}-4y_{m-2}+(6+\beta K_{0(m-1)})y_{m-1}-2y_m=\beta q_{m-1} \\
n=m,\quad & 2y_{m-2}-4y_{m-1}+(2+\beta K_{0m})y_m=\beta q_m
\end{aligned}\right\} \quad (3-14)$$

例（3—1）：承受左端为零右端为q的三角形分布荷重的等断面地基梁，K_{0n}为常数，且 $l\sqrt[4]{\frac{K_{0n}}{EJ}}=4$。

解：令 $n=4$，$h=\frac{l}{4}$，则 $(4h)^4\frac{K_{0n}}{EJ}=4^4$，

$\frac{K_{3n}h^4}{EJ}=\beta K_{0n}=1$，$q_0=0$，$q_1=\frac{1}{4}q$，$q_2=\frac{2}{4}q$，$q_3=\frac{3}{4}q$，$q_4=q$，

由（3—14）得　$3y_0-4y_1+2y_2=0$，$-2y_0+6y_1-4y_2+y_3=\frac{1}{4}q\beta$

$$y_0-4y_1+7y_2-4y_3+y_4=\frac{2}{4}q\beta,\quad y_1-4y_2+6y_3-2y_4=\frac{3}{4}q\beta$$

$2y_2-4y_3+3y_4=q\beta$，解上面五个方程得

$y_0=0.007q\beta$，$y_1=0.245q\beta$，$y_2=0.493q\beta$，$y_3=0.751q\beta$，$y_4=1q\beta$。

再利用（3—9）～（3—10）求各等分点的弯矩和切力，例如以$n=2$为例计算

$$M_2=-qh^2(0.751-0.986+0.245)=-0.01qh^2$$

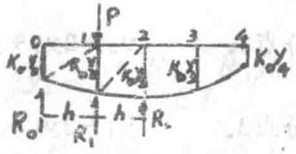
$$Q_2=-\frac{qh}{2}(1.00-1.502+0.490-0.007)=0.009qh$$

B．承受集中荷重如图（3—3）

已知　$\frac{d^2y}{dx^2}=-\frac{M}{EJ}$

其差分方程为

$$y_{n-1}-2y_n+y_{n+1}=-\frac{h^2}{EJ}M_n \qquad (3—15)$$



图（3—3）

地基的反力是分布的，可以假定各等分段的反力为线性分布、或抛物线分布、而各等分点的反力为K_0y_0，K_0y_1，K_0y_2，K_0y_3和K_0y_4，而后将分布反力转化成等效集中反力作用在等分点上，此处设地基系数K_0为常数，并假令各等分段的分布反力为直线、于是分段点0和1的等效集中反力为

$$R_0=\frac{1}{2}K_0y_0h\cdot\frac{2}{3}+\frac{1}{2}K_0y_1h\cdot\frac{1}{3}=\frac{K_0h}{6}(2y_0+y_1),$$

$$R_1=\frac{1}{2}K_0y_0h\cdot\frac{1}{3}+\left(\frac{1}{2}K_0y_1h\cdot\frac{2}{3}\right)\cdot2+\frac{1}{2}K_0y_2h\cdot\frac{1}{3}=\frac{K_0h}{6}(y_0+4y_1+y_2)$$

类推在n点的反力为　$R_n=\frac{K_0h}{6}(y_{n-1}+4y_n+y_{n+1})$　　(3—16)

若假定各等分段的反力分布为抛物线：

$$R_0=\frac{K_0h}{24}(7y_0+6y_1-y_2),\quad R_1=\frac{K_0h}{12}(y_0+10y_1+y_2)$$

类推得　$R_n=\frac{K_0h}{12}(y_{n-1}+10y_n+y_{n+1})$　　(3—17)

将分布反力变换成分点的集中反力后，就可求出各分点的M_n，代入（3—15）即得到用y表示的差分方程、

例（3—2）：在离梁左端$\frac{l}{4}$处作用集中力P。

解：假设$n=4$，$h=\frac{l}{4}$，并设各等分段的反力分布为抛物线，由（3—17）得各等分点的集中反力为：

$$R_0=\frac{K_0h}{24}(7y_0+6y_1-y_2),\qquad R_1=\frac{K_0h}{12}(y_0+10y_1+y_2),$$

$$R_2=\frac{K_0h}{12}(y_1+10y_2+y_3),\quad R_3=\frac{K_0h}{12}(y_2+10y_3+y_4),$$

$$R_4=\frac{K_0h}{24}(-y_2+6y_3+7y_4),$$

各等分点的弯矩为：

$M_1=R_0h$，$M_2=R_0\cdot 2h+R_1h-Ph=(2R_0+R_1-P)h$（左侧），

$M_2=R_4\cdot 2h+R_3h$（右侧），$M_3=R_4h$

将等分点弯矩代入（3—15）得差分方程：

分点1． $y_0-2y_1+y_2=-\frac{R_0h^3}{EJ}$

分点2． $y_1-2y_2+y_3=-\frac{(2R_0+R_1-P)h^3}{EJ}$ （左侧）

分点2． $y_1-2y_2+y_3=-\frac{(2R_4+R_3)h^3}{EJ}$ （右侧）

分点3． $y_2-2y_3+y_4=-\frac{R_4h^3}{EJ}$

利用$\sum y=0$，得$R_0+R_1+R_2+R_3+R_4=P$

将求得的R_0，$R_1\cdots R_4$代入上面方程，并令$\frac{h^4}{EJ}=\beta$得：

$$\left(1+\frac{7}{24}K_0\beta\right)y_0-\left(2-\frac{6}{24}K_0\beta\right)y_1+\left(1-\frac{1}{24}K_0\beta\right)y_2=0$$

$$\frac{16}{24}K_0\beta y_0+\left(1+\frac{32}{24}K_0\beta\right)y_1-2y_2+y_3=\frac{Ph^3}{EJ}$$

$$y_1-2y_2+\left(1+\frac{32}{24}K_0\beta\right)y_3+\frac{16}{24}K_0\beta y_4=0$$

$$\left(1-\frac{1}{24}K_0\beta\right)y_2-\left(2-\frac{6}{24}K_0\beta\right)y_3+\left(1+\frac{7}{24}K_0\beta\right)y_4=0$$

$$(9y_0+28y_1+22y_2+28y_3+9y_4)\frac{1}{24}K_0\beta=\frac{Ph^3}{EJ}$$

$K_0\beta=1$时，得 $1.292y_0-1.75y_1+0.958y_2=0$

$$0.667y_0+2.333y_1-2y_2+y_3=\frac{Ph^3}{EJ}$$

$y_1-2y_2+2.333y_3+0.667y_4=0$，$0.958y_2-1.75y_3+1.292y_4=0$