



21

21世纪大学课程辅导丛书

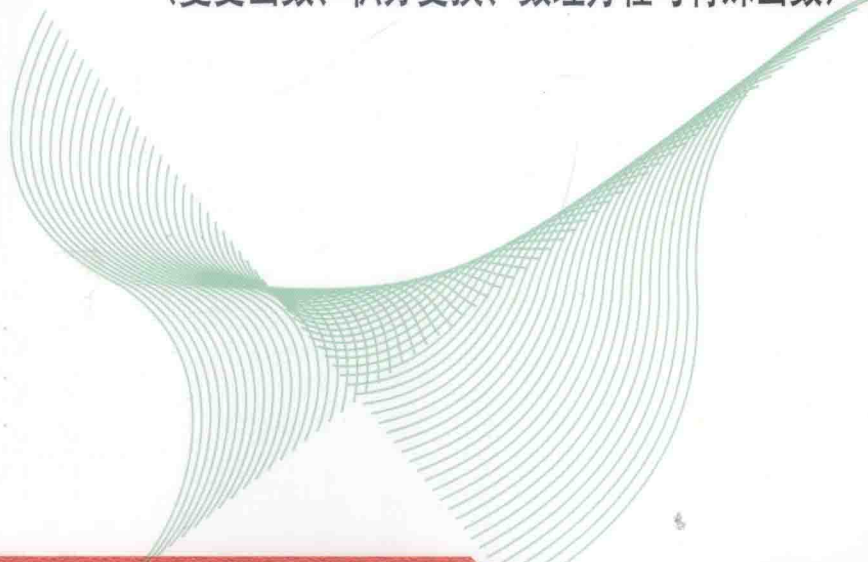
数学物理方法

学习指导 典型题解

(复变函数、积分变换、数理方程与特殊函数)

新版

李惜雯



西安交通大学出版社
XI'AN JIAOTONG UNIVERSITY PRESS



21

21世纪大学课程辅导丛书

数学物理方法

学习指导—典型题解

(复变函数、积分变换、数理方程与特殊函数)

新版

李惜雯



西安交通大学出版社
XI'AN JIAOTONG UNIVERSITY PRESS

内容提要

本书是根据理工科数学物理方法的教学大纲要求进行编写的,包含复变函数、积分变换、数学物理方程与特殊函数三部分内容。全书共分9章,收集了200道(大)题。

每章、节均有基本要求、内容提要及例题解析三部分;每道例题后带有注释,对所用知识及解题思路进行分析和讨论;并在每章最后给出一定量练习题及答案。

本书可作为理工科各专业学生学习数学物理方法课程,及机类、化工、材料、结构工程等专业硕士研究生学习应用数学基础课程的参考书,也可供从事本类课程教学的中青年教师参考。

图书在版编目(CIP)数据

数学物理方法学习指导典型题解:复变函数、积分变换、数理方程与特殊函数/李惜雯编著. —新版. —西安:西安交通大学出版社,2008.11

(21世纪大学课程辅导丛书)

ISBN 978-7-5605-1464-2

I. 数… II. 李… III. 数学物理方法-高等学校-解题
IV. O411.1-44

中国版本图书馆CIP数据核字(2008)第161601号

书 名 数学物理方法学习指导典型题解
编 著 李惜雯
责任编辑 叶涛

出版发行 西安交通大学出版社
(西安市兴庆南路10号 邮政编码710049)

网 址 <http://www.xjtpress.com>
电 话 (029)82668357 82667874(发行中心)
(029)82668315 82669096(总编办)

传 真 (029)82668280
印 刷 陕西元盛印务有限公司

开 本 787mm×1092mm 1/16 印张 16.125 字数 385千字
版次印次 2008年11月新版 2008年11月第1次印刷
书 号 ISBN 978-7-5605-1464-2/O·179
定 价 22.00元

读者购书、书店添货,如发现印装质量问题,请与本社发行中心联系、调换。

订购热线:(029)82665248 (029)82665249

投稿热线:(029)82664954

读者信箱:jdlgy@yahoo.cn

版权所有 侵权必究



丛书总序

“21世纪大学课程辅导丛书”第一版出版已有十年时间,几经再版,深受广大读者的喜爱。为了满足读者朋友的需要,也为了适应高等教育改革的形势和新的教学要求,我们组织作者对本丛书进行了修订,以全新的面貌奉献给大家。

我们出版这套丛书的目的就是为普通高等学校理工类专业的大学生提供一流的学习资源,使大家共享一流教师的教学经验和教学成果,更好地学习、掌握基础课和专业基础课知识,为今后的学习和深造打下良好的基础。

西安交通大学是国内仅有的几所具有百年历史的高等学府,是首批进入国家“211工程”建设的七所大学之一,1999年被国家确定为中西部地区惟一所以建设世界知名高水平大学为目标的学校。西安交大历来重视本科生教学,1996年成为全国首家本科教学评估为优秀的大学。学校拥有国家级、省部级、校级教学名师数十名,具有丰富的、一流的教学资源。

本丛书由西安交通大学长期在教学一线主讲的教授、副教授主编,他们具有丰富的基础课、专业基础课教学和辅导经验。丛书作者们在长期的教学实践中,深深了解学生在学习基础课、专业基础课时的难点和困惑点之所在,对如何使学生更有效地学习、掌握课程的基本知识和解题技巧进行了深入的探索和研究,并将成果体现于书中。

本丛书以普通高等学校的学生为主要对象,不拘泥于某一本教材,而是将有特色和使用量较大的各种版本的教材加以归纳总结,取其精华,自成一体。书中对课程的基本内容、研究对象、教学要求、学习方法、解题思路等进行了全面、系统的总结和提炼,按基本知识点、重点与难点、典型题解析、自我检测题等环节进行编排;书后附录了自我检测题参考答案和近年来一些院校的期末考试题、考研试题及相应题解。本丛书的指导思想是帮助学生理清学习思路,总结并掌握各章节的要点;通过各类精选题的剖析、求解和示范,分析解题思路,示范解题过程,总结方法要略,展示题型变化;达到扩展知识视野,启迪创新思维,促进能力提高的目的。

本丛书既可以单独使用,也可以与其他教材配合使用;既可以作为课程学习时的同步自学辅导教材,也可以作为考研复习时的主要参考资料。

我们衷心希望本丛书成为您大学基础课和专业基础课学习阶段的良师益友,帮助您克服困难,进入大学学习的自由王国;也希望在考研冲刺时本丛书能助您一臂之力,使您一举成功!

在学习使用过程中,您如果发现书中有不妥之处或有好的建议,敬请批评指正并反馈给我们,我们一定会进一步改进自己的工作,力争使您满意。

真诚感谢您使用西安交大版图书。

西安交大出版社网址: <http://press.xjtu.edu.cn/>

理工医事业部网址: <http://lgny.xjtupress.com/>

理工医事业部信箱: jdlgy@yahoo.cn

西安交通大学出版社

2008年6月

前 言

数学物理方法是大部分理工科专业的必修课程,课程目的在于培养学生运用数学方法分析、解决物理问题的能力。由此决定的本课程特点为:第一,涉及到的数学知识广泛;第二,涉及到的物理概念多;第三,计算较繁。除此之外,一般来说,本课程计划内学时不含习题课。因此,多数学生在学习本课程时感到较微积分等数学课困难。为了帮助学生掌握本课程的基本内容,掌握用数学方法分析、解决物理问题的基本方法,作者根据自己多年的教学经验,精心挑选了200道(大)题,并全部亲自推导演算,分析讨论,编成本书。本书力图突出数学概念和物理意义,突出解题思路的分析和知识的内在联系与灵活运用。

在每章、节的前面提出本章、节的基本要求和主要内容,并对每个例题给出注释,对解题的方法与思路进行分析、讨论,以加深读者对知识的深入理解。

本书共分9章,第1~4章为复变函数部分,与其内容体系大体一致的教材是西安交通大学编写的《复变函数》;第5章为积分变换部分,第6~9章为数理方程与特殊函数部分,与其内容体系大体一致的教材为原南京工学院编写的《积分变换》、《数学物理方程与特殊函数》。但为了例题编写的方便、集中,本书在内容的组织上作了适当的调整与增减。

为了方便读者,本书在每章编入了一定量的练习题,并附有答案或提示。

由于时间仓促,编写中定有不少错误与不足,敬请读者批评指正。

在本书的编写过程中得到西安交通大学出版社的大力支持,在此致以谢意!

编 者

2008年9月于西安交通大学

目 录

第 1 章 复数与复变函数

| | |
|---------------------------|------|
| 1.1 复数的表示与代数运算 | (1) |
| 1.1.1 基本要求 | (1) |
| 1.1.2 内容提要 | (1) |
| 1.1.3 例题解析 | (2) |
| 1.2 复平面的点集与点列、复数项级数 | (10) |
| 1.2.1 基本要求 | (10) |
| 1.2.2 内容提要 | (10) |
| 1.2.3 例题解析 | (11) |
| 1.3 复变函数 | (16) |
| 1.3.1 基本要求 | (16) |
| 1.3.2 内容提要 | (16) |
| 1.3.3 例题解析 | (17) |
| 1.4 初等函数 | (28) |
| 1.4.1 基本要求 | (28) |
| 1.4.2 内容提要 | (28) |
| 1.4.3 例题解析 | (30) |
| 1.5 保角映射 | (33) |
| 1.5.1 基本要求 | (33) |
| 1.5.2 内容提要 | (33) |
| 1.5.3 例题解析 | (34) |
| 1.6 第 1 章练习题 | (47) |

第 2 章 复变函数的积分

| | |
|-----------------------------------|------|
| 2.1 复变函数积分概念与 Cauchy 积分定理 | (49) |
| 2.1.1 基本要求 | (49) |
| 2.1.2 内容提要 | (49) |
| 2.1.3 例题解析 | (50) |
| 2.2 Cauchy 积分公式及解析函数的任意阶可导性 | (59) |
| 2.2.1 基本要求 | (59) |
| 2.2.2 内容提要 | (59) |
| 2.2.3 例题解析 | (60) |
| 2.3 第 2 章练习题 | (67) |

第 3 章 解析函数的幂级数表示

| | |
|----------------------|------|
| 3.1 Taylor 级数 | (69) |
| 3.1.1 基本要求 | (69) |
| 3.1.2 内容提要 | (69) |
| 3.1.3 例题解析 | (70) |
| 3.2 Laurent 级数 | (78) |
| 3.2.1 基本要求 | (78) |
| 3.2.2 内容提要 | (78) |
| 3.2.3 例题解析 | (79) |
| 3.3 第 3 章练习题 | (87) |

第 4 章 留数定理及其应用

| | |
|------------------------|-------|
| 4.1 单值函数孤立奇点及其分类 | (89) |
| 4.1.1 基本要求 | (89) |
| 4.1.2 内容提要 | (89) |
| 4.1.3 例题解析 | (89) |
| 4.2 留数及留数定理 | (95) |
| 4.2.1 基本要求 | (95) |
| 4.2.2 内容提要 | (95) |
| 4.2.3 例题解析 | (97) |
| 4.3 第 4 章练习题 | (108) |

第 5 章 Fourier 变换与 Laplace 变换

| | |
|----------------------------------|-------|
| 5.1 Fourier 积分与 Fourier 变换 | (110) |
| 5.1.1 基本要求 | (110) |
| 5.1.2 内容提要 | (110) |
| 5.1.3 例题解析 | (112) |
| 5.2 Laplace 变换 | (128) |
| 5.2.1 基本要求 | (128) |
| 5.2.2 内容提要 | (128) |
| 5.2.3 例题解析 | (129) |
| 5.3 第 5 章练习题 | (141) |

第 6 章 数学物理方程定解问题

| | |
|---------------------|-------|
| 6.1 泛定方程与定解条件 | (142) |
| 6.1.1 基本要求 | (142) |
| 6.1.2 内容提要 | (142) |
| 6.1.3 例题解析 | (143) |

| | |
|---------------------------------|-------|
| 6.2 第6章练习题 | (153) |
| 第7章 分离变量法(Fourier 级数法) | |
| 7.1 齐次边界与齐次方程 | (155) |
| 7.1.1 基本要求 | (155) |
| 7.1.2 内容提要 | (155) |
| 7.1.3 例题解析 | (156) |
| 7.2 齐次边界与非齐次方程 | (173) |
| 7.2.1 基本要求 | (173) |
| 7.2.2 内容提要 | (173) |
| 7.2.3 例题解析 | (174) |
| 7.3 非齐次边界条件的处理 | (186) |
| 7.3.1 基本要求 | (186) |
| 7.3.2 内容提要 | (186) |
| 7.3.3 例题解析 | (186) |
| 7.4 第7章练习题 | (195) |
| 第8章 贝赛尔函数与勒让德多项式 | |
| 8.1 贝赛尔函数 | (198) |
| 8.1.1 基本要求 | (198) |
| 8.1.2 内容提要 | (198) |
| 8.1.3 例题解析 | (199) |
| 8.2 勒让德多项式 | (215) |
| 8.2.1 基本要求 | (215) |
| 8.2.2 内容提要 | (215) |
| 8.2.3 例题解析 | (216) |
| 8.3 第8章练习题 | (227) |
| 第9章 定解问题的其它解法 | |
| 9.1 行波法与积分变换法 | (229) |
| 9.1.1 基本要求 | (229) |
| 9.1.2 内容提要 | (229) |
| 9.1.3 例题解析 | (230) |
| 9.2 Laplace 方程的 Green 函数法 | (237) |
| 9.2.1 基本要求 | (237) |
| 9.2.2 内容提要 | (237) |
| 9.2.3 例题解析 | (238) |
| 9.3 第9章练习题 | (246) |

第 1 章 复数与复变函数

1.1 复数的表示与代数运算

1.1.1 基本要求

1. 掌握复数与复平面点的一一对应概念,认识复数的无序性.
2. 掌握复数的三种表示形式及模与辐角概念、共轭复数概念.
3. 掌握复球面与无穷远点的概念.
4. 熟练掌握复数的代数运算、共轭运算及其几何意义.

1.1.2 内容提要

1. 平面点 (x, y) 与复数 $x + iy = z$ 一一对应. 无穷远点记作 ∞ .

2. 复数的三种表示

代数式 $z = x + iy$

指数式 $z = \rho e^{i\theta}$

三角式 $z = \rho(\cos \theta + i \sin \theta)$

$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$ 称为 z 的模, 记作 $|z|$, θ 称为 z 的辐角, 记作 $\text{Arg } z$, 将满足 $-\pi < \theta_0 \leq \pi$ (或 $0 \leq \theta_0 < 2\pi$) 的 θ 值称为 $\text{Arg } z$ 的主值, 记为 $\arg z$. 0 与 ∞ 无辐角. $|z| = 0 \Leftrightarrow z = 0$. $|z| = +\infty \Leftrightarrow z = \infty$.

当取 $-\pi < \arg z \leq \pi$ 时, 有关系

$$\arg z = \begin{cases} \arctan \frac{y}{x} & x > 0 \\ \frac{\pi}{2} & x = 0 \text{ 且 } y > 0 \\ -\frac{\pi}{2} & x = 0 \text{ 且 } y < 0 \\ \pi + \arctan \frac{y}{x} & x < 0 \text{ 且 } y \geq 0 \\ -\pi + \arctan \frac{y}{x} & x < 0 \text{ 且 } y < 0 \end{cases}$$

3. 代数运算规则

1) $(x_1 + iy_1) \pm (x_2 + iy_2) = (x_1 \pm x_2) + i(y_1 \pm y_2)$

2) $(x_1 + iy_1)(x_2 + iy_2) = (x_1x_2 - y_1y_2) + i(x_1y_2 + x_2y_1)$

或 $z_1z_2 = \rho_1\rho_2[\cos(\theta_1 + \theta_2) + i \sin(\theta_1 + \theta_2)] = \rho_1\rho_2 e^{i(\theta_1 + \theta_2)}$

$$3) \frac{x_1 + i y_1}{x_2 + i y_2} = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2} + i \frac{x_2 y_1 - x_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2}$$

$$\text{或 } \frac{z_1}{z_2} = \frac{\rho_1}{\rho_2} [\cos(\theta_1 - \theta_2) + i \sin(\theta_1 - \theta_2)] = \frac{\rho_1}{\rho_2} e^{i(\theta_1 - \theta_2)} \quad (|z_2| \neq 0)$$

$$4) z^n = \rho^n (\cos n\theta + i \sin n\theta) = \rho^n e^{i n\theta}$$

特别地, $\rho = 1$ 时有 De Moivre 公式

$$(\cos \theta + i \sin \theta)^n = \cos n\theta + i \sin n\theta$$

$$5) \sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{\rho} e^{i\theta} = \sqrt[n]{\rho} \left(\cos \frac{\theta + 2k\pi}{n} + i \sin \frac{\theta + 2k\pi}{n} \right) \quad (k = 0, 1, 2, \dots, n-1)$$

4. 距离不等式

$$1) |z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$$

$$2) |z_1 - z_2| \geq ||z_1| - |z_2||$$

5. 共轭复数性质

$$1) \overline{z_1 \pm z_2} = \bar{z}_1 \pm \bar{z}_2 \quad 4) \overline{(\bar{z})} = z$$

$$2) \overline{z_1 z_2} = \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2 \quad 5) z \bar{z} = |z|^2$$

$$3) \overline{\left(\frac{z_1}{z_2} \right)} = \frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2} \quad 6) z + \bar{z} = 2\operatorname{Re}(z)$$

$$z - \bar{z} = 2i \operatorname{Im}(z)$$

1.1.3 例题解析

1-1 给出 $z_0 = -1 + i\sqrt{3}$ 的三角式与指数式表示.

解 这里给出的是 z_0 的代数式表示. 为求得其他两种表示式, 首先应求出其模与辐角.

$$\therefore |z_0| = \sqrt{(-1)^2 + (\sqrt{3})^2} = 2$$

$$\arg z_0 = \pi + \arctan\left(\frac{\sqrt{3}}{-1}\right) = \frac{2}{3}\pi$$

$$\therefore z_0 = 2\left(\cos \frac{2}{3}\pi + i \sin \frac{2}{3}\pi\right) \quad (\text{三角式表示})$$

$$z_0 = 2e^{i\frac{2}{3}\pi} \quad (\text{指数式表示})$$

注 本题的关键在于求出所给复数的模与辐角, 并且注意点位于第二象限. 故

$$\arg z_0 = \pi + \arctan \frac{y_0}{x_0}.$$

1-2 给出复数 $z_0 = \frac{2i}{-1+i}$ 的代数式. 三角式及指数式表示.

解 化简原式, 得到 z_0 的代数式表示

$$z_0 = \frac{2i}{-1+i} = \frac{2i(-1-i)}{(-1+i)(-1-i)} = 1 - i \quad (\text{代数式表示})$$

$$\therefore |z_0| = \sqrt{1^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}, \quad \arg z_0 = \arctan\left(\frac{-1}{1}\right) = -\frac{\pi}{4}$$

$$\therefore z_0 = \sqrt{2} \left[\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i \sin\left(-\frac{\pi}{4}\right) \right] \quad (\text{三角式表示})$$

$$z_0 = \sqrt{2} e^{-i\frac{\pi}{4}} \quad (\text{指数式表示})$$

注 本题的关键在于简化原表达式,同时注意点位于第四象限.故 $\arg z_0 = \arctan \frac{y_0}{x_0}$.

1-3 设 $z_0 \neq 0$,用 z_0 表示下列点:

- 1) z_0 关于原点的对称点.
- 2) z_0 关于实轴的对称点.
- 3) z_0 关于虚轴的对称点.

解 注意到复数 $z = x + iy$ 与平面点 (x, y) 的一一对应关系及平面点的对称点知识,设 $z_0 = x_0 + iy_0$. 由 (x_0, y_0) 关于原点的对称点为 $(-x_0, -y_0)$, 关于实轴的对称点为 $(x_0, -y_0)$, 关于虚轴的对称点为 $(-x_0, y_0)$, 得:

- 1) z_0 关于原点的对称点为 $-x_0 + i(-y_0) = -z_0$;
- 2) 关于实轴的对称点为 $x_0 + i(-y_0) = \bar{z}_0$;
- 3) 关于虚轴的对称点为 $-x_0 + iy_0 = -(x_0 - iy_0) = -\bar{z}_0$.

注 1. 本题应用复数与平面点的一一对应关系,将问题转化为初等数学已知知识;
2. 当 $z_0 = 0$ 时,上述各对应点为 z_0 本身.

1-4 设 $|b| < 1, |a| = 1$, 证明 $\left| \frac{a-b}{1-\bar{a}b} \right| = 1$.

证 证法一 $\because \left| \frac{a-b}{1-\bar{a}b} \right| = \frac{|a-b|}{|1-\bar{a}b|}$, 故只要证明 $|a-b| = |1-\bar{a}b|$ 即可.

$$\because |a-b|^2 = (a-b)(\bar{a}-\bar{b}) = |a|^2 + |b|^2 - \bar{a}b - \bar{b}a$$

由 $|a| = 1$, 得 $|a|^2 = 1$

$$\therefore |a-b|^2 = 1 + |b|^2 - \bar{a}b - \bar{b}a$$

$$\text{又 } |1-\bar{a}b|^2 = (1-\bar{a}b)(1-a\bar{b}) = 1 + |a|^2|b|^2 - \bar{a}b - a\bar{b} = 1 + |b|^2 - \bar{a}b - a\bar{b}$$

$\therefore |a-b|^2 = |1-\bar{a}b|^2$. 由模的非负性知 $|a-b| = |1-\bar{a}b|$. 且

$\because |a| = 1, |b| < 1$. 知 $a \neq b$. 从而 $|1-\bar{a}b| \neq 0$.

$$\therefore \left| \frac{a-b}{1-\bar{a}b} \right| = 1$$

证法二 $\because |a| = 1 \therefore \left| \frac{a-b}{1-\bar{a}b} \right| = \frac{|a-b|}{|a||1-\bar{a}b|} = \frac{|a-b|}{|a-a\bar{a}b|} = \frac{|a-b|}{|a-b|} = 1$

$\because |a| = 1, |b| < 1 \therefore a \neq b$. 即 $|a-b| \neq 0$.

故上述分式有意义.

证法三 $\because |a| = 1 \therefore a\bar{a} = 1$. 且 $|\bar{a}| = 1$. 则有

$$\frac{|a-b|}{|1-\bar{a}b|} = \frac{|a-b|}{|a\bar{a}-\bar{a}b|} = \frac{|a-b|}{|a| \cdot |a-b|} = \frac{|a-b|}{|a-b|} = 1$$

(同证法二, $|a-b| \neq 0$).

注 1. 证法一中用复数与其共轭之积表示模的方法是一基本的方法;

2. 证法二采用模之积等于积之模性质;
 3. 证法三将原式中的 1 用 $a\bar{a}$ 代换,再用积之模等于模之积性质;
 4. 虽证法一略繁于其它二方法,但具有一般性.

1-5 设 $|a| < 1, |b| < 1$, 证明: $\left| \frac{a-b}{1-\bar{a}b} \right| < 1$.

证 证法一 只要证 $|a-b| < |1-\bar{a}b|$ 即可.

$$\because |a-b|^2 = (a-b)(\bar{a}-\bar{b}) = |a|^2 + |b|^2 - \bar{a}b - \bar{b}a$$

$$|1-\bar{a}b|^2 = (1-\bar{a}b)(1-a\bar{b}) = 1 + |a|^2|b|^2 - \bar{a}b - \bar{b}a$$

$$\text{由 } |a| < 1, |b| < 1, \text{得 } (1-|b|^2)|a|^2 < 1-|b|^2$$

即 $|a|^2 + |b|^2 < 1 + |a|^2|b|^2$

$$\therefore |a-b|^2 < |1-\bar{a}b|^2 \quad \Rightarrow \quad \frac{|a-b|^2}{|1-\bar{a}b|^2} < 1$$

即 $\frac{|a-b|}{|1-\bar{a}b|} = \left| \frac{a-b}{1-\bar{a}b} \right| < 1$

证法二 只要证 $|1-\bar{a}b|^2 - |a-b|^2 > 0$ 即可.

$$\because |1-\bar{a}b|^2 - |a-b|^2 = (1+|a|^2|b|^2 - \bar{a}b - a\bar{b}) - (|a|^2 + |b|^2 - \bar{a}b - a\bar{b})$$

$$= 1 + |a|^2|b|^2 - |a|^2 - |b|^2 = (1-|a|^2)(1-|b|^2)$$

$$\text{由 } |a| < 1, |b| < 1. \text{得 } |a|^2 < 1, |b|^2 < 1$$

$$\therefore |1-\bar{a}b|^2 - |a-b|^2 > 0$$

注 1. 这两种证法采用了 1-4 题证法一的一般方法;

2. 由上述证明立即可推出, 当 $|a| < 1, |b| > 1$ (或 $|a| > 1, |b| < 1$) 时, 有

$$\left| \frac{a-b}{1-\bar{a}b} \right| > 1.$$

1-6 设 z_1, z_2, z_3 满足 $z_1 + z_2 + z_3 = 0$. 且 $|z_1| = |z_2| = |z_3| = 1$.

证明: z_1, z_2, z_3 为内接于单位圆的正三角形三顶点.

证 由条件, z_1, z_2, z_3 均位于以 0 为心, 1 为半径的单位圆周上. 不失一般性, 可设 $z_1 = 1$,

$$z_2 = \cos \theta_2 + i \sin \theta_2, z_3 = \cos \theta_3 + i \sin \theta_3. \text{ 则为证结论, 只要证 } \theta_2 = \frac{2}{3}\pi, \theta_3 = -\frac{2}{3}\pi \text{ 即可.}$$

由 $z_1 + z_2 + z_3 = 0$ 得

$$1 + \cos \theta_2 + \cos \theta_3 = 0 \quad \textcircled{1}$$

$$\sin \theta_2 + \sin \theta_3 = 0 \quad \textcircled{2}$$

故得 $\sin \theta_2 = -\sin \theta_3 = \sin(-\theta_3) \quad \therefore \theta_3 = -\theta_2$ 代入①得

$$1 + \cos \theta_2 + \cos(-\theta_2) = 1 + 2\cos \theta_2 = 0$$

$$\therefore \cos \theta_2 = -\frac{1}{2} \quad \therefore \theta_2 = \frac{2}{3}\pi, \theta_3 = -\frac{2}{3}\pi$$

注 本题的关键在于对问题的恰当转化, 否则较为麻烦. 这里的假定不失一般性, 即一般情况下, 作旋转变换 $z' = ze^{-i\theta_1}$ (θ_1 为 z_1 的辐角) 可变为 $z_1 = 1$ 的情形.

1-7 设复数 z_1, z_2, z_3 满足等式 $\frac{z_2 - z_1}{z_3 - z_1} = \frac{z_1 - z_3}{z_2 - z_3}$. 证明

$$|z_2 - z_1| = |z_3 - z_1| = |z_2 - z_3|$$

证 令: $\frac{z_2 - z_1}{z_3 - z_1} = \frac{z_1 - z_3}{z_2 - z_3} = \alpha$. (可设 $\alpha \neq 0$, 否则有 $z_1 = z_2 = z_3$. 结论自然成立.) 只要证 $|\alpha| = 1$ 即可.

对原式取模有

$$|z_1 - z_3|^2 = |z_2 - z_1| |z_2 - z_3| \quad (1)$$

在原式两端同时减 1 并取模得

$$\frac{|z_2 - z_3|}{|z_3 - z_1|} = \frac{|z_1 - z_2|}{|z_2 - z_3|}$$

故有

$$|z_2 - z_3|^2 = |z_1 - z_2| |z_3 - z_1| \quad (2)$$

(1) \div (2) 得

$$\left| \frac{z_1 - z_3}{z_2 - z_3} \right|^2 = \left| \frac{z_2 - z_3}{z_3 - z_1} \right|$$

对比原式即得 $|\alpha|^2 = \frac{1}{|\alpha|} \therefore |\alpha|^3 = 1$, 于是 $|\alpha| = 1$. 由此得证.

注 此题结论说明若三复数满足所给比例等式, 则该三点为等边三角形顶点.

1-8 设 $z = x + iy$, 证明: $\frac{|x| + |y|}{\sqrt{2}} \leq |z| \leq |x| + |y|$.

证 由 $|z| = |x + iy| \leq |x| + |iy| = |x| + |y|$. 第二个不等式成立. 现证第一个不等式, 即要证 $\sqrt{2}|z| \geq |x| + |y|$.

$$\because |z|^2 = x^2 + y^2 = |x|^2 + |y|^2 \geq 2|x||y|$$

$$\therefore 2|z|^2 \geq |x|^2 + |y|^2 + 2|x||y| = (|x| + |y|)^2$$

于是得

$$\sqrt{2}|z| \geq |x| + |y|$$

注 1. 证明中用到三角不等式.

2. 第一个不等式的等号当且仅当 $x = y$ 时成立. 即 $z = x(1 + i)$ ($x \in \mathbf{R}$) 时等号成立;

第二个不等式的等号当且仅当 $xy = 0$ 时成立. 即 z 为一实数或纯虚数时成立;

3. 此不等式提供了一个对一般复数模的估计式.

1-9 由等式 $\frac{x + 1 + i(y - 3)}{5 + 3i} = 1 + i$ 确定实数 x, y 之值.

解 解法一 化简等式左端为代数式表示

$$\frac{[(x + 1) + i(y - 3)][5 - 3i]}{5^2 + 3^2} = \frac{5x + 3y - 4}{34} + i \frac{5y - 3x - 18}{34}$$

则由复数相等的概念可得方程组

$$\begin{cases} \frac{5x + 3y - 4}{34} = 1 \\ \frac{5y - 3x - 18}{34} = 1 \end{cases}$$

即

$$\begin{cases} 5x + 3y = 38 \\ -3x + 5y = 52 \end{cases}$$

解之得

$$\begin{cases} x = 1 \\ y = 11 \end{cases}$$

解法二 所给等式左端为两复数之商,由复数的四则运算可得等式

$$(x + 1) + i(y - 3) = (1 + i)(5 + 3i) = 2 + 8i$$

可得方程组

$$\begin{cases} x + 1 = 2 \\ y - 3 = 8 \end{cases} \quad \text{即得} \quad \begin{cases} x = 1 \\ y = 11 \end{cases}$$

注 解法二显然比解法一简便,这种方法既考虑到复数相等的概念,同时也利用了商为积的逆运算这一性质,而解法一仅用了复数相等的概念.

1-10 将下列坐标变换写成复数形式

$$1) \text{ 平移变换 } \begin{cases} x = x_1 + a_1 \\ y = y_1 + b_1 \end{cases} \quad 2) \text{ 旋转变换 } \begin{cases} x = x_1 \cos \theta - y_1 \sin \theta \\ y = x_1 \sin \theta + y_1 \cos \theta \end{cases}$$

解 令 $z = x + iy$, $z_1 = x_1 + iy_1$, $\alpha_1 = a_1 + ib_1$, 利用复数 $z = x + iy$ 与平面点 (x, y) 之间的一一对应关系可得

1) 平移变换的复数形式为

$$z = z_1 + \alpha_1$$

2) 旋转变换的复数形式为

$$\begin{aligned} z &= (x_1 \cos \theta - y_1 \sin \theta) + i(x_1 \sin \theta + y_1 \cos \theta) \\ &= (x_1 + iy_1) \cos \theta + (x_1 + iy_1) i \sin \theta \\ &= (x_1 + iy_1)(\cos \theta + i \sin \theta) = z_1 e^{i\theta} \end{aligned}$$

注 1. 由此题可见,平面上的平移变换与旋转变换公式在复数形式下是极简单的;

2. 由此结果可知,两复数和 $z_1 + \alpha$ 的几何意义是对 z_1 施行平移变换(沿点 α 决定的矢量方向平移 $|\alpha|$ 距离). 而一复数与任一个模为 1 的复数相乘,即等于对该复数对应的矢量施行旋转变换(旋转角度即为模为 1 复数的辐角 θ).

1-11 证明恒等式

$$1) |z_1 + z_2|^2 + |z_1 - z_2|^2 = 2(|z_1|^2 + |z_2|^2)$$

$$2) |z_1| + |z_2| = \left| \frac{z_1 + z_2}{2} - \sqrt{z_1 z_2} \right| + \left| \frac{z_1 + z_2}{2} + \sqrt{z_1 z_2} \right|$$

证 1) **证法一** 设 $z_1 = x_1 + iy_1$, $z_2 = x_2 + iy_2$

$$\text{则} \quad |z_1|^2 = x_1^2 + y_1^2, \quad |z_2|^2 = x_2^2 + y_2^2$$

$$|z_1 + z_2|^2 = (x_1 + x_2)^2 + (y_1 + y_2)^2$$

$$|z_1 - z_2|^2 = (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2$$

$$\therefore |z_1 + z_2|^2 + |z_1 - z_2|^2 = 2(x_1^2 + x_2^2 + y_1^2 + y_2^2) = 2(|z_1|^2 + |z_2|^2)$$

证法二

$$|z_1 + z_2|^2 = (z_1 + z_2)(\bar{z}_1 + \bar{z}_2) = |z_1|^2 + |z_2|^2 + \bar{z}_1 z_2 + \bar{z}_2 z_1$$

$$|z_1 - z_2|^2 = (z_1 - z_2)(\bar{z}_1 - \bar{z}_2) = |z_1|^2 + |z_2|^2 - \bar{z}_1 z_2 - \bar{z}_2 z_1$$

二式相加得

$$|z_1 + z_2|^2 + |z_1 - z_2|^2 = 2(|z_1|^2 + |z_2|^2)$$

$$2) \text{ 即要证 } |z_1 + z_2 - 2\sqrt{z_1 z_2}| + |z_1 + z_2 + 2\sqrt{z_1 z_2}| = 2(|z_1| + |z_2|)$$

$$\text{令 } \sqrt{z_1} = w_1, \sqrt{z_2} = w_2$$

$$\text{则 } |w_1|^2 = |z_1|, \quad |w_2|^2 = |z_2|$$

$$\text{于是 } |z_1 + z_2 - 2\sqrt{z_1 z_2}| = |w_1^2 + w_2^2 - 2w_1 w_2| = |(w_1 - w_2)^2| = |w_1 - w_2|^2$$

$$|z_1 + z_2 + 2\sqrt{z_1 z_2}| = |w_1^2 + w_2^2 + 2w_1 w_2| = |(w_1 + w_2)^2| = |w_1 + w_2|^2$$

故由 1) 即得

$$|z_1 + z_2 + 2\sqrt{z_1 z_2}| + |z_1 + z_2 - 2\sqrt{z_1 z_2}| = 2(|z_1| + |z_2|)$$

注 1. 恒等式 1) 有明显的几何意义: 它表明平行四边形两对角线平方和等于各边平方和。

2. 2) 为 1) 的直接推论. 1) 的证法二较证法一简单些. 证法一由模的定义出发. 证法二用了共轭复数性质.

1-12 已知某正三角形之两顶点 $z_1 = 1, z_2 = 2 + i$, 求另一顶点.

解 解法一 如图 1.1 所示. 为得到另一顶点 z_3 , 只要

将连接 z_1 与 z_2 的线段绕 z_1 点旋转 $\frac{1}{3}\pi$ (或 $-\frac{1}{3}\pi$) 即可. 注意连接 z_1 与 z_2 的向量为 $z_2 - z_1$, 故有

$$z_3 - z_1 = (z_2 - z_1)e^{\pm i\frac{1}{3}\pi}$$

$$\therefore z_3 = z_1 + (z_2 - z_1)e^{\pm i\frac{1}{3}\pi}$$

将 $z_1 = 1, z_2 = 2 + i$ 代入, 得

$$z_3 = \frac{3 \mp \sqrt{3}}{2} + i \frac{1 \pm \sqrt{3}}{2}$$

解法二 利用 1-7 题的结果, 如果 z_3 满足关系

$$\frac{z_2 - z_1}{z_3 - z_1} = \frac{z_1 - z_3}{z_2 - z_3}$$

则 z_3 即为所求. 将 z_1, z_2 值及 $z_3 = x + iy$ 代入, 得

$$\frac{1+i}{(x-1)+iy} = \frac{(1-x)-iy}{(2-x)+i(1-y)}$$

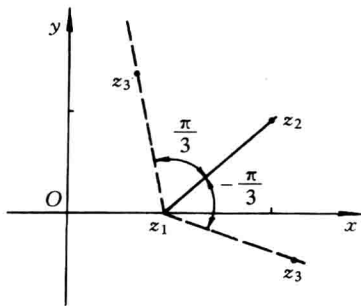


图 1.1

注意由 1-7 题知 $\left| \frac{1+i}{(x-1)+iy} \right| = \left| \frac{(1-x)-iy}{(2-x)+i(1-y)} \right| = 1$

$$\therefore \begin{cases} (x-1)^2 + y^2 = 2 \\ (1-x)^2 + y^2 = (2-x)^2 + (1-y)^2 \end{cases}$$

解之得 $x = \frac{3 \pm \sqrt{3}}{2}, y = \frac{1 \mp \sqrt{3}}{2}$

故 $z_3 = \frac{3 + \sqrt{3}}{2} + i \frac{1 - \sqrt{3}}{2}$ 和 $z_3 = \frac{3 - \sqrt{3}}{2} + i \frac{1 + \sqrt{3}}{2}$

均满足要求.

注 解法一利用复数的几何性质,为一基本方法.解法二利用 1-7 题的结论.

本题运用了给复数乘模为 1 的复数即等于将此复数对应的矢量旋转一角度的几何性质.

1-13 计算 $\sqrt{1+i}$.

解 解法一 令 $\sqrt{1+i} = x + iy$, 则 $(x + iy)^2 = 1 + i$. 由此得

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = 1 & (1) \\ 2xy = 1 & (2) \end{cases}$$

$$\therefore (x^2 + y^2)^2 = 2 \quad \because x^2 + y^2 \geq 0$$

故得 $x^2 + y^2 = \sqrt{2}$. 与(1)联立,并注意 $xy = \frac{1}{2} > 0$ (即实、虚部同号)得

$$x = \pm \sqrt{\frac{\sqrt{2} + 1}{2}} \quad y = \pm \sqrt{\frac{\sqrt{2} - 1}{2}}$$

$$\therefore \sqrt{1+i} = \pm \frac{1}{\sqrt{2}} (\sqrt{\sqrt{2} + 1} + i \sqrt{\sqrt{2} - 1})$$

解法二 由复数开方运算规则,有

$$\sqrt{1+i} = |1+i|^{1/2} \left[\cos \frac{\frac{\pi}{4} + 2k\pi}{2} + i \sin \frac{\frac{\pi}{4} + 2k\pi}{2} \right] \quad (k = 0, 1)$$

当 $k = 0$ 时得

$$\begin{aligned} \sqrt{1+i} &= \sqrt[4]{2} (\cos \frac{\pi}{8} + i \sin \frac{\pi}{8}) \\ &= \sqrt[4]{2} \left[\sqrt{\frac{1 + \cos \frac{\pi}{4}}{2}} + i \sqrt{\frac{1 - \cos \frac{\pi}{4}}{2}} \right] \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} (\sqrt{\sqrt{2} + 1} + i \sqrt{\sqrt{2} - 1}) \end{aligned}$$

当 $k = 1$ 时得

$$\begin{aligned} \sqrt{1+i} &= \sqrt[4]{2} \left[\cos \left(\pi + \frac{\pi}{8} \right) + i \sin \left(\pi + \frac{\pi}{8} \right) \right] \\ &= \sqrt[4]{2} (-\cos \frac{\pi}{8} - i \sin \frac{\pi}{8}) \end{aligned}$$