应用技术型大学规划教材

高等数学

（上册）

代 鸿 党庆一 主 编
孔昭毅 陈爱敏 赵润峰 副主编

清华大学出版社

高等数学

（上册）

代　鸿　党庆一　主　编
孔昭毅　陈爱敏　赵润峰　副主编

清华大学出版社
北　京

内容简介

本书分为上、下两册. 上册内容包括：函数的极限与连续，导数与微分，微分中值定理与导数的应用，不定积分，定积分，定积分的应用共6章.

全书写作风格上弱化了定理证明，在例题及习题的选取上突出了应用性，强化了高等数学课程与后续专业课程的联系，便于教学和自学. 本书可作为普通高等学校(少学时)、独立学院、成教学院、民办学院本科非数学专业的教材. 由于本书还突出了高等数学在经济中的应用，因而经济类本科院校同样适用.

图书在版编目(CIP)数据

高等数学. 上册/代鸿，党庆一主编. --北京：清华大学出版社，2014
ISBN 978-7-302-35408-6

Ⅰ. ①高…　Ⅱ. ①代…　②党…　Ⅲ. ①高等数学—高等学校—教材　Ⅳ. ①O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2014)第 022922 号

责任编辑：陈　明
封面设计：傅瑞学
责任校对：赵丽敏
责任印制：王静怡

出版发行：清华大学出版社
　　网　　址：http://www.tup.com.cn，http://www.wqbook.com
　　地　　址：北京清华大学学研大厦 A 座　　**邮　　编**：100084
　　社 总 机：010-62770175　　**邮　　购**：010-62786544
　　投稿与读者服务：010-62776969，c-service@tup.tsinghua.edu.cn
　　质 量 反 馈：010-62772015，zhiliang@tup.tsinghua.edu.cn
印 刷 者：三河市君旺印装厂
装 订 者：三河市新茂装订有限公司
经　　销：全国新华书店
开　　本：170mm×230mm　　**印　　张**：17.5　　**字　　数**：363 千字
版　　次：2014 年 7 月第 1 版　　**印　　次**：2014 年 7 月第 1 次印刷
印　　数：1～3500
定　　价：29.00 元

产品编号：054631-01

前 言

高等数学课程是高等学校的一门重要基础课程，它提供了各专业后续学习所必需的大学数学知识，更是工程技术人员必须掌握的一门重要基础课程. 当今社会，数学的思想、理论与方法已被广泛地应用于自然科学、工程技术、企业管理甚至人文学科之中，“数学是高新技术的本质”这一说法，已被人们所接受.

为了适应高等教育的发展，根据国家教委对培养应用型本科人才的要求，重庆大学城市科技学院本着“以应用为目的，以必需够用为度”的原则，对课程内容体系进行了整体优化，强化了高等数学与专业课程的联系，使之更侧重于培养学生的应用能力，以适应培养应用型本科人才的培养目标. 学院组织了具有丰富教学经验的一线教师编写讲义并试用，这就是本书的雏形. 在汲取国内外各种版本同类教材优点的基础上，编者还将教学实践中积累的一些有益的经验融入了其中，并在教材中加入了一定数量的提高题，来满足部分考研学生的需要.

本书由代鸿和党庆一担任主编. 第 1 章由陈爱敏和代鸿共同编写；第 2 章由赵润峰编写；第 3 章由孔昭毅编写；第 4 章由代鸿编写；第 5 章、第 6 章由党庆一编写. 全书由重庆大学易正俊审定，何传江、王晓宏、李新、张心明等老师也给予了宝贵的意见，在此一并致谢.

由于编者水平有限，书中缺点和错误在所难免，恳请广大同行、读者批评指正.

编 者

2013 年 11 月

目 录

第1章　函数的极限与连续

高等数学是一门以函数作为主要研究对象，以极限方法为基本研究方法的学科.极限理论几乎贯穿了高等数学的整个内容.本章主要介绍函数、函数的极限与函数连续性的基本概念以及它们的一些性质.

1.1　函数

1.1.1　基本概念

1. 集合

集合是数学中的一个基本概念，讨论函数离不开集合.例如，一个教室里面的学生构成一个集合，全体有理数构成一个集合等.一般地，我们把具有某种特定性质的事物的总体称为**集合**(或简称**集**)，组成这个集合的事物称为该集合的**元素**(或简称**元**).对于任何集合的元素，不仅是确定的，而且还是无序、互异的.通常用大写拉丁字母 $A,B,\cdots$ 表示集合，用小写拉丁字母 $a,b,\cdots$ 表示集合中的元素.如果 a 是集合 A 中的元素，就说"元素 a 属于集合 A"，用符号"$a\in A$"来表示；如果 a 不是集合 A 中的元素，就说"元素 a 不属于集合 A"，用符号"$a\notin A$"来表示.

通常用两种方法来表示集合：一种是**列举法**，即把集合的全体元素一一列举出来.例如，自然数集可以用

$$\mathbf{N}=\{0,1,2,\cdots,n,\cdots\}$$

来表示，于是，$\mathbf{N}^+=\{1,2,\cdots,n,\cdots\}$ 表示的是正整数集.

另一种是**描述法**，即如果集合 M 是由具有某种特定性质 P 的元素 x 的全体所组成的，就可表示为

$$M=\{x\mid x\text{具有性质}P\}$$

例如，集合 A 是一元二次方程 $x^2-3x+2=0$ 的解集，就可用

$$A=\{x\mid x^2-3x+2=0\}$$

来表示.

习惯上，全体整数集记作 $\mathbf{Z}$，即

$$\mathbf{Z}=\{\cdots,-n,\cdots,-2,-1,0,1,2,\cdots,n,\cdots\}$$

有理数集记作 $\mathbf{Q}$，即

$$\mathbf{Q}=\left\{\frac{p}{q}\,\middle|\,p\in\mathbf{Z},q\in\mathbf{N}^{+}\text{ 且 }p,q\text{ 互质}\right\}$$

全体实数集用 $\mathbf{R}$ 来表示.

2. 区间和邻域

区间和邻域是高等数学中经常用到的两个数集，其中区间分为**有限区间**和**无限区间**，下面介绍它们的定义和记号.

（1）区间

① 有限区间

设 a,b 都是实数，且满足 $a<b$，则数集

$$\{x\mid a\leqslant x\leqslant b\}$$

称为闭区间，记作 $[a,b]$，即

$$[a,b]=\{x\mid a\leqslant x\leqslant b\}$$

其中 a 和 b 分别称为闭区间 $[a,b]$ 的左端点和右端点，这里 $a\in[a,b]$，$b\in[a,b]$.

类似地，数集

$$\{x\mid a<x<b\}$$

称为开区间，记作 (a,b)，即

$$(a,b)=\{x\mid a<x<b\}$$

其中 a 和 b 分别称为开区间 (a,b) 的左端点和右端点，这里 $a\notin(a,b)$，$b\notin(a,b)$.

同时把数集

$$\{x\mid a\leqslant x<b\},\quad \{x\mid a<x\leqslant b\}$$

称为半开半闭区间，分别记为

$$[a,b)=\{x\mid a\leqslant x<b\},\quad (a,b]=\{x\mid a<x\leqslant b\}$$

② 无限区间

为了叙述方便，引进记号 $+\infty$（称为正无穷大）及 $-\infty$（称为负无穷大）. $(a,+\infty)=\{x|a<x<+\infty\}$，$[a,+\infty)=\{x|a\leqslant x<+\infty\}$，$(-\infty,b)=\{x|-\infty<x<b\}$，$(-\infty,b]=\{x|-\infty<x\leqslant b\}$ 与 $(-\infty,+\infty)$ 都称为无限区间.

下面将区间 $[a,b]$，(a,b)，$[a,b)$，$(a,b]$，$(a,+\infty)$，$[a,+\infty)$，$(-\infty,b)$，$(-\infty,b]$ 分别在实数轴上表示出来（如图 1.1.1 所示）.

（2）邻域

邻域也是一个经常用到的概念. 以点 x_0 为中心的任何开区间称为**点 x_0 的邻域**，记作 $U(x_0)$.

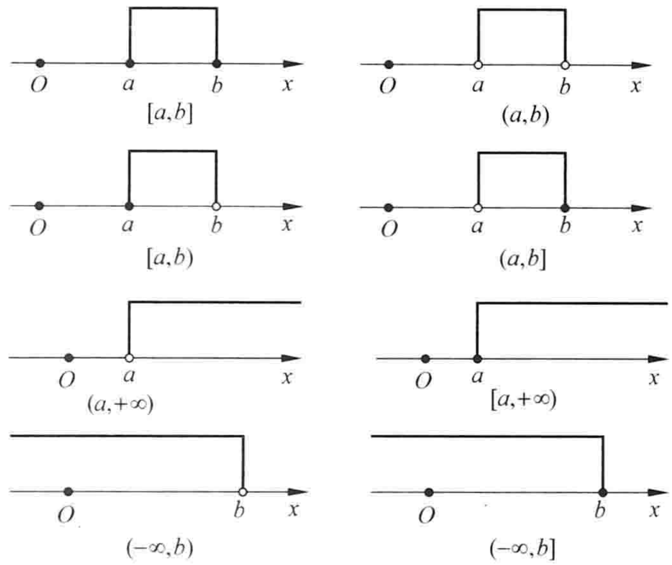

图 1.1.1

设任意的 $\delta>0$,则开区间 $(x_0-\delta,x_0+\delta)$ 称为**点 x_0 的 δ 邻域**,记作 $U(x_0,\delta)$,即

$$U(x_0,\delta)=\{x\,|\,x_0-\delta<x<x_0+\delta,\delta>0\}$$
$$=\{x\,|\,|x-x_0|<\delta,\delta>0\}$$

其中点 x_0 称为**邻域中心**,δ 称为**邻域半径**(如图 1.1.2 所示).

因为 $|x-x_0|$ 表示点 x 与点 x_0 之间的距离,所以 $U(x_0,\delta)$ 表示与点 x_0 之间的距离小于 δ 的一切点 x 的全体.

如果把点 x_0 的 δ 邻域的中心点 x_0 去掉,所得集合称为**点 x_0 的去心 δ 邻域**,记作 $\mathring{U}(x_0,\delta)$,即

$$\mathring{U}(x_0,\delta)=\{x\mid 0<|x-x_0|<\delta,\delta>0\}$$

如图 1.1.3 所示,这里 $|x-x_0|>0$ 表示 $x\neq x_0$.

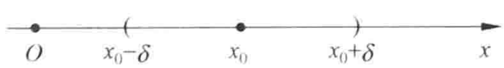

图 1.1.2

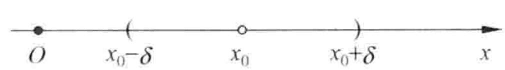

图 1.1.3

1.1.2 函 数

1. 函数的概念

在自然现象、经济活动或技术过程中,通常会遇到各种不同的变量,它们之间往往是相互依赖、相互制约的. 例如,在自由落体运动中,下降的距离 s 与时间 t 的依赖关系是 $s=\frac{1}{2}gt^2$(g 为重力加速度);又如中学讲到的三角函数 $y=\sin x$ 等,它们都给出了变量与变量之间的依赖关系. 将这些关系的共同特征抽象出来,就得到了函数的

概念.

定义 1.1.1 设 x,y 是两个变量，D 是一个给定的非空数集，若对于任意的 $x\in D$，变量 y 按照一定的对应法则总有唯一的数值与之对应，则称 y 是 x 的函数，记作

$$y=f(x)$$

非空数集 D 叫做函数 $f(x)$ 的**定义域**，记作 D_f，f 称为**对应法则**，其中 x 为**自变量**，y 为**因变量**.

对 $x_0\in D$，按照对应法则 f 所确定的数值 $f(x_0)$ 称为函数在 $x=x_0$ 处的**函数值**，所有函数值所组成的数集

$$f(D)=\{y \mid y=f(x),x\in D\}$$

称为函数的**值域**，记作 R_f.

需要指出的是，定义域、对应法则称为**函数的两要素**. 由上述定义可知，只要给出了函数的定义域 D_f 以及对应法则 f，函数的值域 R_f 也随之确定. 因此如果两个函数的定义域相同，对应法则相同，即使用不同的字母来表示自变量，它们也是同一函数；反之，如果两个函数的定义域或者对应法则不同，则它们不是同一函数. 也就是说，**两个函数相同的充分必要条件是其定义域与对应法则完全相同**.

例如，$y=|x|$ 与 $y=\sqrt{x^2}$ 是同一函数；函数 $y=x+1$ 与 $y=\dfrac{x^2-1}{x-1}$ 是两个不同的函数，因为两者的定义域不同；而 $f(x)=x+1$ 与 $g(t)=t+1$ 则是同一个函数.

定义域是函数的重要概念，在实际问题中，函数的定义域是根据问题的实际意义来确定的. 如圆面积 $S=\pi r^2$，根据问题的实际意义可知，定义域为 $(0,+\infty)$. 在数学中，通常将使得表达式有意义的一切实数所组成的集合作为该函数的定义域，称为函数的**自然定义域**.

例 1 求下列函数的定义域：

(1) $y=x^2+1$； (2) $y=\dfrac{1}{\ln(x-1)}$； (3) $y=\sqrt{x-1}+\arccos\dfrac{x}{2}$.

解 (1) 对于任意的 $x\in(-\infty,+\infty)$，函数 $y=x^2+1$ 都有意义，则定义域为 $(-\infty,+\infty)$.

(2) 要使 $\dfrac{1}{\ln(x-1)}$ 有意义，只需 $x-1>0$ 且 $\ln(x-1)\neq 0$，即 $x>1$ 且 $x\neq 2$，所以函数的定义域为 $(1,2)\cup(2,+\infty)$.

(3) 要使 $\sqrt{x-1}$ 有意义，只须 $x-1\geqslant 0$，即 $x\geqslant 1$，要使 $\arccos\dfrac{x}{2}$ 有意义，只须 $-1\leqslant\dfrac{x}{2}\leqslant 1$，即 $-2\leqslant x\leqslant 2$，所以函数的定义域为 $[1,2]$.

2. 函数的表示法

函数常用的表示法有解析法（或公式法）、表格法和图像法. 这些方法在中学大家

已经熟悉了,下面举几个函数的例子.

例 2 对任意实数 x,记$[x]$为不超过 x 的最大整数,如$[\sqrt{3}]=1$,$[-3.2]=-4$,$[3.2]=3$,$[0]=0$ 等,称 $f(x)=[x]$为**取整函数**(如图 1.1.4 所示).

例 3 符号函数 $y=\operatorname{sgn} x=\begin{cases}-1, & x<0 \\ 0, & x=0 \\ 1, & x>0\end{cases}$ 的定义域为 $D=(-\infty,+\infty)$,值域为 $f(D)=\{-1,0,1\}$(如图 1.1.5 所示).

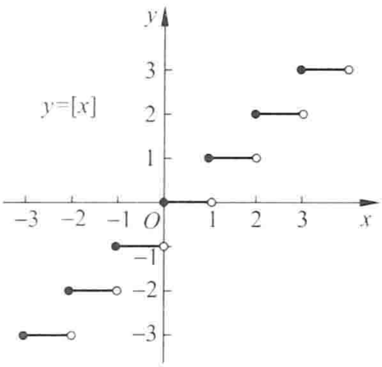

图 1.1.4

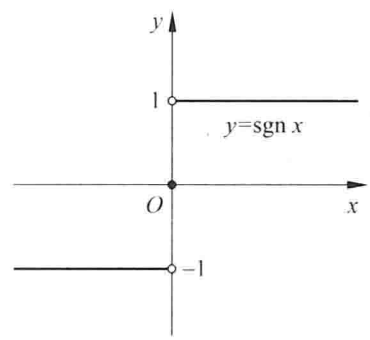

图 1.1.5

例 4 $y=|x|=\begin{cases}x, & x\geqslant 0 \\ -x, & x<0\end{cases}$,定义域为$(-\infty,+\infty)$,值域为$[0,+\infty)$,其图形关于 y 轴对称,这是绝对值函数(如图 1.1.6 所示).

在例 3 和例 4 中我们可以看到,有时一个函数要用几个式子表示,这种在自变量的不同变化范围内,对应法则用不同式子来表示的函数,称为**分段函数**.

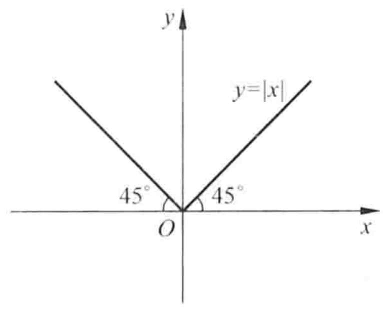

图 1.1.6

3. 反函数

定义 1.1.2 设函数 $y=f(x)$的定义域为 D,值域为 $f(D)$,若对任意的 $y\in f(D)$,存在唯一的 $x\in D$,使得 $f(x)=y$,则得到一个以 y 为自变量,x 为因变量的新函数 $x=\varphi(y)$,此函数称为函数 $y=f(x)$的反函数,记作

$$x=f^{-1}(y)$$

其定义域为 $f(D)$,值域为 D.

习惯上常用 x 表示自变量,y 表示因变量,因此,我们将函数 $y=f(x)$的反函数 $x=f^{-1}(y)$改写成 $y=f^{-1}(x)$,同时也称 $y=f^{-1}(x)$为函数 $y=f(x)$的反函数. 相对于反函数,原来的函数 $y=f(x)(x\in D)$称为**直接函数**. 互为反函数的图像关于直线

$y=x$ 对称(如图 1.1.7 所示). 例如 $y=\mathrm{e}^x$,有反函数 $x=\ln y$,记为 $y=\ln x$.

4. 复合函数

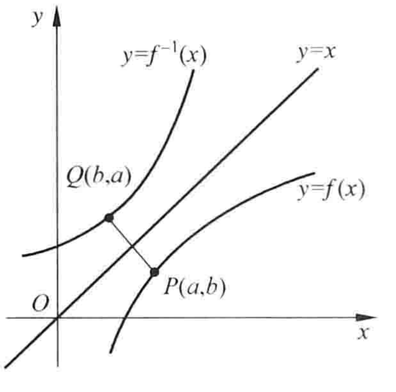

图 1.1.7

定义 1.1.3 设函数 $y=f(u)$的定义域为 D_f,函数 $u=g(x)$在 D 上有定义,且$g(D)\subset D_f$,则函数

$$y=f[g(x)],\quad x\in D$$

称为由函数 $u=g(x)$和函数 $y=f(u)$构成的**复合函数**,它的定义域为 D,变量 u 称为**中间变量**,函数 g 与 f 构成的复合函数通常记为 $f\circ g$,即$(f\circ g)(x)=f[g(x)]$,$x\in D$.

注 函数 g 与 f 构成复合函数 $f\circ g$ 的条件是:函数 g 在 D 上的值域 $g(D)$必须包含在 f 的定义域 D_f 内,即 $g(D)\subset D_f$,否则不能构成复合函数.

例如,$y=\arcsin u$ 及 $u=3+x^2$ 就不能构成一个函数,因为 $y=\arcsin u$ 的定义域为$[-1,1]$,而 $u=3+x^2$ 的值域为$[3,+\infty)\not\subset[-1,1]$. 两个以上的函数也可经过复合构成一个函数,例如,$y=u^2$,$u=\sin v$,$v=\dfrac{x}{2}$构成复合函数 $y=\sin^2\dfrac{x}{2}$,其中 u,v 都是中间变量. 另外,我们还可以将复合函数"拆分"为若干个简单函数. 例如,$y=\tan^2\sqrt{\mathrm{e}^x}$是由 4 个简单函数 $y=u^2$,$u=\tan v$,$v=\sqrt{w}$,$w=\mathrm{e}^x$ 所构成的复合函数.

5. 隐函数

如果变量 x 和 y 满足方程 $F(x,y)=0$,在一定的条件下,当 x 在某区间 I 内任意取定一个值时,相应地总有满足该方程的唯一的 y 值存在,则称方程 $F(x,y)=0$ 在区间 I 内确定了一个函数,这个函数称为**隐函数**. 如方程 $\mathrm{e}^x+y\sin x-1=0$ 就确定了变量 y 与变量 x 之间的函数关系,它是一个隐函数.

注 通常把形如 $y=f(x)$的函数称为**显函数**,有些隐函数可以通过一定的运算转化为显函数,如 $\mathrm{e}^x+y\sin x-1=0$ 可化为显函数 $y=\dfrac{1-\mathrm{e}^x}{\sin x}$;但有些隐函数却不可能化为显函数,如 $\cos(x+y)=\mathrm{e}^y$. 在以后的学习中会经常遇到隐函数,多数情况下不要求化成显函数.

6. 参数式函数

由参数方程$\begin{cases}x=\varphi(t)\\y=\psi(t)\end{cases}$$(\alpha\leqslant t\leqslant\beta)$来表示变量 x 与 y 之间依赖关系的函数,称为由**参数方程所确定的函数**,简称为**参数式函数**.

例如,由参数方程$\begin{cases}x=\cos t\\y=\sin t\end{cases}$$(0\leqslant t\leqslant\pi)$,可以确定函数 $y=\sqrt{1-x^2}$,$x\in[-1,1]$.

7. 函数的特性

（1）有界性

设函数 $y=f(x)$，$x\in I$，若存在 M_1，使任意给定的 $x\in I$，有

$$f(x)\leqslant M_1$$

则称函数 $y=f(x)$ 在区间 I 上有**上界**，而 M_1 称为函数 $y=f(x)$ 的一个上界；若存在 M_2，使任意给定的 $x\in I$，有

$$f(x)\geqslant M_2$$

则称函数 $y=f(x)$ 在区间 I 上有**下界**，而 M_2 称为函数 $y=f(x)$ 的一个下界；若存在 $M>0$，使任意给定的 $x\in I$，有

$$|f(x)|\leqslant M$$

则称函数 $y=f(x)$ 在区间 I 上**有界**. 如果不存在这样的 M，则称函数 $y=f(x)$ 在区间 I 上**无界**.

注 1 函数的有界性与区间有关. 例如 $y=\dfrac{1}{x}$ 在 $(0,1)$ 上无界，在 $(1,2)$ 上有界.

注 2 若 $y=f(x)$ 在区间 I 上有界，容易知道界不是唯一的. 如果 $|f(x)|\leqslant M$，则比 M 大的所有数都可以作为函数 $f(x)$ 的界.

注 3 容易证明，函数 $f(x)$ 在区间 I 上有界的充分必要条件是它在区间 I 上既有上界又有下界.

为简便叙述，引入一些符号. 用“$\forall$”表示“任意给定的”或“每一个”，用“$\exists$”表示“存在”或“能找到”. 例如，“任意给定的 $x\in I$”可写成“$\forall x\in I$”，“存在 $M>0$”可写成“$\exists M>0$”.

（2）单调性

设函数 $y=f(x)$，$x\in I$，若 $\forall x_1,x_2\in I$ 且 $x_1<x_2$，有

$$f(x_1)<f(x_2)$$

则称函数 $y=f(x)$ 在区间 I 上是**单调增加**的；若 $\forall x_1,x_2\in I$ 且 $x_1<x_2$，有

$$f(x_1)>f(x_2)$$

则称函数 $y=f(x)$ 在区间 I 上是**单调减少**的.

注 单调性与区间有关，如 $y=x^2$ 在 $(-1,1)$ 上无单调性，但在 $(0,1)$ 上是单调增加的，在 $(-1,0)$ 上是单调减少的.

（3）奇偶性

设函数 $y=f(x)$，$x\in I$，区间 I 关于原点对称，即对于 $\forall x\in I$，有 $-x\in I$. 若对于 $\forall x\in I$，有

$$f(-x)=-f(x)$$

则称函数 $f(x)$ 为**奇函数**；若对于 $\forall x\in I$，有