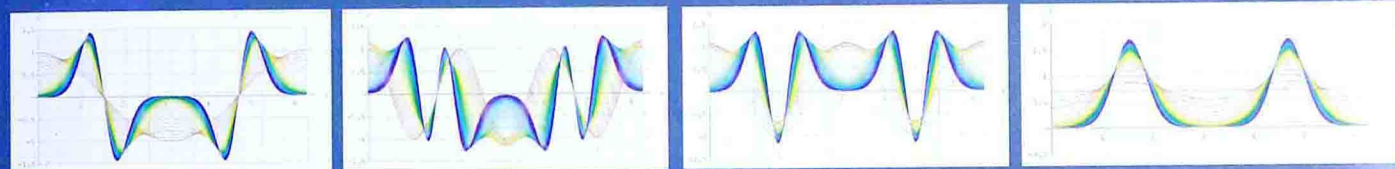


马蒂厄函数

理论基础及应用



M A D I E H A N S H U L I L U N J I C H U J I Y I N G Y O N G

熊天信 著

 科学出版社

马蒂厄函数理论基础及应用

熊天信 著

科学出版社

北 京

内 容 简 介

本书首先系统地阐述了求解马蒂厄方程的理论和方法,对马蒂厄函数进行了合理的分类,详细地讨论了各类马蒂厄函数的基本特性以及它们之间的关系。其次,本书讲解了计算马蒂厄函数的数值的方法,编写了计算马蒂厄函数的程序,给出了马蒂厄函数及其一阶导数的图像和数值计算数表,详述了利用马蒂厄函数的级数展开其他函数的方法。最后本书列举了马蒂厄函数的一些应用实例。本书内容力求系统简明,使读者能全面掌握马蒂厄函数,书末附有4篇相关附录。

本书可供从事数学、物理学、电磁场与微波技术等专业的学者和其他相关工程技术人员参考,也可作为学习马蒂厄函数的教材。

图书在版编目(CIP)数据

马蒂厄函数理论基础及应用 / 熊天信著. —北京: 科学出版社, 2014.7

ISBN 978-7-03-041376-5

I. ①马… II. ①熊… III. ①马蒂厄函数—研究
IV. ①O174.63

中国版本图书馆CIP数据核字(2014)第150533号

责任编辑: 张展 罗莉 / 封面设计: 墨创文化

责任校对: 邓利娜 / 责任印制: 余少力

科学出版社出版

北京东黄城根北街16号

邮政编码: 100717

<http://www.sciencep.com>

成都创新包装印刷厂印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2014年7月第 一 版 开本: 787×1092 1/16

2014年7月第一次印刷 印张: 16

字数: 360千字

定价: 69.00元

前 言

自法国数学家、天文学家马蒂厄(E. L. Mathieu, 1835~1890 年)于 1868 年在分析椭圆形膜的的运动时提出马蒂厄函数以来,它在物理学、电磁场与微波技术和其他工程技术中便得到了广泛的应用,但由于其复杂性,特别是它的数值计算方法和程序实现的复杂性,使许多学者难以掌握。这使我萌生了通过对现有关于马蒂厄函数的文献进行梳理,写一本专著系统地介绍马蒂厄函数的想法。现今这一工作终于完成,了却了我多年来的一个心愿。

本书分为 5 章。第 1 章介绍了直角坐标系与一般正交曲线坐标系之间的变换关系,根据坐标变换,由标量波动方程,得到在椭圆坐标系中标量波动方程的两个横向方程,即马蒂厄方程。将这两个方程分别命名为角向马蒂厄方程和径向马蒂厄方程,相应的解称为角向马蒂厄函数和径向马蒂厄函数。第 2 章首先介绍了希尔方程的弗洛凯解,对其解的函数特性进行了讨论,在此基础上,得到角向马蒂厄函数,并讨论了角向马蒂厄函数的正交性、归一化方法和数值计算方法,编写了计算角向马蒂厄函数的 Fortran 程序并对其进行数值计算。其次,通过数值计算,绘出了部分角向马蒂厄函数的函数图像和它们的一阶导数的函数图像,给出了一些马蒂厄函数的数值计算结果。最后讨论了马蒂厄方程的稳定解区域和非稳定解区域。第 3 章介绍了径向马蒂厄函数,还讨论了角向马蒂厄函数和径向马蒂厄函数的关系,得到了利用贝塞尔函数的级数展开径向马蒂厄函数和角向马蒂厄函数的各种形式,以及它们的一阶导数形式,讨论了径向马蒂厄函数的收敛性并得出在大自变量时径向马蒂厄函数的渐近形式。该章编写了计算径向马蒂厄函数的 Fortran 程序,通过程序计算,给出了一些径向马蒂厄函数的函数图像和数值计算结果,这些结果和相关文献高度统一,反映出计算程序的正确性和可靠性。第 4 章介绍了马蒂厄函数及其乘积的积分表示方法,给出了用贝塞尔函数的级数展开马蒂厄函数的关系式及其证明过程。同时,推导出了一些马蒂厄函数之间、其他函数与马蒂厄函数之间的关系式,讨论了将其他函数展开成马蒂厄函数级数的方法,并证明了其他一些函数用马蒂厄函数的级数展开的具体形式。第 5 章介绍了马蒂厄函数的一些典型应用实例,这些实例可帮助读者进一步理解和应用马蒂厄函数,其结果也可供相关科技人员参考。

本书系统地论述了马蒂厄函数基础理论和应用,对广大学者学习和应用马蒂厄函数有重要的参考价值。本书注重内容的系统性和相对完整性,以使读者更易理解和掌握马蒂厄函数。对初学者来说,本书也可作为学习马蒂厄函数的教材。

由于条件所限,收集到的参考文献可能会有一些遗漏,加之作者水平所限,致使书中难免有不当和不足之处,恳请广大读者、专家学者批评指正!

作 者

2014 年 3 月

目 录

第 1 章 马蒂厄方程	1
1.1 正交曲线坐标系	1
1.1.1 正交曲线坐标系的定义和坐标系之间的变换关系	1
1.1.2 正交曲线坐标系中标量函数的梯度	3
1.1.3 正交曲线坐标系中矢量函数的散度	4
1.1.4 正交曲线坐标系中矢量函数的旋度	5
1.2 马蒂厄方程	6
1.2.1 椭圆柱坐标系	6
1.2.2 角向马蒂厄方程与径向马蒂厄方程	8
第 2 章 角向马蒂厄函数	10
2.1 角向马蒂厄方程的解	11
2.1.1 解的一般性质——基本解	11
2.1.2 弗洛凯解	13
2.1.3 角向马蒂厄方程的周期解	16
2.2 整数阶角向马蒂厄函数	18
2.2.1 $q=0$ 时角向马蒂厄方程的解	18
2.2.2 $q>0$ 时角向马蒂厄方程的解——整数阶角向马蒂厄函数	19
2.3 马蒂厄函数的数值计算	23
2.3.1 概述	23
2.3.2 角向马蒂厄函数傅里叶级数展开系数的递推关系	25
2.3.3 角向马蒂厄方程的特征值的计算	28
2.3.4 特征值 a_m 和 b_m 的特征曲线	43
2.4 角向整数阶马蒂厄函数的正交归一化关系	47
2.5 角向马蒂厄函数图像	49
2.6 角向马蒂厄函数数表	61
2.7 角向马蒂厄方程的非周期解	72
2.7.1 周期解与非周期解的关系	72
2.7.2 非周期角向马蒂厄函数的定义	73
2.7.3 非周期角向马蒂厄函数的归一化	73
2.8 负参数角向马蒂厄函数	79
2.8.1 负参数角向马蒂厄方程的周期解	79
2.8.2 负参数非周期角向马蒂厄函数	81

2.9 分数阶角向马蒂厄函数	81
2.10 马蒂厄方程的稳定解与非稳定解	84
第3章 径向马蒂厄函数	86
3.1 径向马蒂厄函数的分类概述	86
3.2 第一类径向马蒂厄函数	87
3.2.1 函数 $J_{em}(\xi, q)$ 和 $Jo_m(\xi, q)$ 的形式	87
3.2.2 非周期径向马蒂厄函数 $Fe_m(\xi, q)$ 和 $Ge_m(\xi, q)$	94
3.2.3 函数 $J_{em}(\xi, q)$ 和 $Jo_m(\xi, q)$ 的导数	95
3.2.4 函数 $J_{em}(\xi, q)$ 和 $Jo_m(\xi, q)$ 及其导数曲线	96
3.2.5 第一类径向马蒂厄函数及其导数数表	102
3.3 第二类径向马蒂厄函数	111
3.3.1 函数 $Ne_m(\xi, q)$ 和 $No_m(\xi, q)$ 的形式	111
3.3.2 函数 $Ne_m(\xi, q)$ 和 $No_m(\xi, q)$ 的导数	115
3.3.3 函数 $Ne_m(\xi, q)$ 和 $No_m(\xi, q)$ 及其导数曲线	116
3.3.4 第二类径向马蒂厄函数及其导数数表	124
3.4 第一类变形贝塞尔型径向马蒂厄函数	139
3.4.1 函数 $I_{em}(\xi, -q)$ 和 $Io_m(\xi, -q)$ 的形式	139
3.4.2 函数 $I_{em}(\xi, q)$ 和 $Io_m(\xi, q)$ 的导数	141
3.4.3 函数 $I_{em}(\xi, q)$ 和 $Io_m(\xi, q)$ 曲线	143
3.5 第二类变形贝塞尔型径向马蒂厄函数	146
3.5.1 函数 $Ke_m(\xi, -q)$ 和 $Ko_m(\xi, -q)$ 的形式	146
3.5.2 函数 $Ke_m(\xi, q)$ 和 $Ko_m(\xi, q)$ 的导数	148
3.5.3 径向马蒂厄函数之间的恒等关系	150
3.5.4 函数 $Ke_m(\xi, q)$ 和 $Ko_m(\xi, q)$ 曲线	150
3.6 马蒂厄-汉克尔函数	154
3.7 用贝塞尔函数级数展开的角向马蒂厄函数	155
3.8 马蒂厄函数的收敛性	158
3.9 径向马蒂厄函数的渐近式	161
3.9.1 贝塞尔函数型的径向马蒂厄函数的渐近式	161
3.9.2 变形贝塞尔函数型的径向马蒂厄函数的渐近式	163
第4章 马蒂厄函数的积分表示及其相互关系	164
4.1 角向马蒂厄函数的核	164
4.2 角向马蒂厄函数的贝塞尔函数级数展开	166
4.3 角向马蒂厄函数的积分关系	170
4.4 径向马蒂厄函数的积分关系	171
4.4.1 贝塞尔型径向马蒂厄函数的积分关系	171
4.4.2 变形贝塞尔型径向马蒂厄函数的积分关系	173
4.5 用贝塞尔函数和三角函数表示的核	175
4.6 用贝塞尔函数乘积展开的马蒂厄函数	177

4.7	马蒂厄函数乘积的积分表示和级数展开	181
4.8	用马蒂厄函数的级数展开其他函数	184
第5章	马蒂厄函数的应用	188
5.1	椭圆形薄膜振动	188
5.2	四极杆质量分析器的基本原理	192
5.2.1	四极杆质量分析器中马蒂厄方程的推导	193
5.2.2	离子运动轨迹与稳定性图	195
5.3	椭圆波导	198
5.3.1	椭圆波导中的电磁场	198
5.3.2	椭圆波导中的本征模	200
5.3.3	椭圆波导的截止波长和截止频率	205
5.4	椭圆谐振腔	209
5.4.1	椭圆谐振腔中的电磁场	209
5.4.2	椭圆谐振腔中 TM_{010} 模和 TE_{111} 模的工作特性	212
5.5	椭圆形理想导体柱面对平面电磁波的散射	217
参考文献		223
附录 A	马蒂厄函数符号对照表	229
附录 B	贝塞尔函数	230
附录 C	马蒂厄方程的特征值	239
附录 D	角向马蒂厄函数的高阶级数展开	246

第 1 章 马蒂厄方程

马蒂厄方程是以法国数学家、天文学家马蒂厄(É. L. Mathieu, 1835~1890 年)的名字命名的一个常微分方程,它是在椭圆柱坐标系中,利用分离变量法,由标量齐次亥姆霍兹方程得到的方程。为了深入理解马蒂厄方程,本章先介绍一般的正交曲线坐标系,并在此基础上推导出马蒂厄方程。

1.1 正交曲线坐标系

在参考系中,为了确定空间一点的位置,必须按规定方法选取一组有次序的数据,这组数据就叫“坐标”。在某一问题中规定坐标的方法,就是该问题所用的坐标系。坐标系的种类很多,常用的有:直角坐标系、球坐标系和圆柱坐标系。但是,由于上述坐标系边界的形状不能方便地解决某些问题,所以就要采用其他坐标系,例如:椭圆柱坐标系、抛物柱坐标系、长旋转椭球坐标系、扁旋转椭球坐标系、旋转抛物面坐标系、圆锥坐标系、椭球坐标系和抛物面坐标系等,这些坐标系都属于正交曲线坐标系。为对正交曲线坐标系有一个较全面的了解,下面先讨论它的定义,以及它与直角坐标系之间的变换关系,然后讨论标量函数在正交曲线坐标系中的梯度、矢量函数在正交曲线坐标系中的散度和旋度的表示方法。

1.1.1 正交曲线坐标系的定义和坐标系之间的变换关系

用 u_1 、 u_2 和 u_3 表示新坐标系的 3 个坐标轴,设 u_1 、 u_2 和 u_3 与直角坐标系中 x 、 y 和 z 的关系为

$$\begin{cases} u_1 = \phi_1(x, y, z) \\ u_2 = \phi_2(x, y, z) \\ u_3 = \phi_3(x, y, z) \end{cases} \quad (1.1.1)$$

我们假定 $u_i(x, y, z)$ ($i=1, 2, 3$) 在 xyz 空间的某个域 D 中有连续的一阶导数,并设在域 D 中的某点 $P_0(x_0, y_0, z_0)$ 处,下列条件成立

$$\frac{\partial(u_1, u_2, u_3)}{\partial(x, y, z)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial \phi_1}{\partial x} & \frac{\partial \phi_1}{\partial y} & \frac{\partial \phi_1}{\partial z} \\ \frac{\partial \phi_2}{\partial x} & \frac{\partial \phi_2}{\partial y} & \frac{\partial \phi_2}{\partial z} \\ \frac{\partial \phi_3}{\partial x} & \frac{\partial \phi_3}{\partial y} & \frac{\partial \phi_3}{\partial z} \end{vmatrix} \neq 0 \quad (1.1.2)$$

公式(1.1.2)式右端的行列式叫做函数 ϕ_1 、 ϕ_2 和 ϕ_3 的雅可比行列式。在域 D 中某点 P_0 处, (1.1.2)式成立能确保在该点的某邻域可以用坐标 u_1 、 u_2 和 u_3 来确定直角坐标系

中的每个点, 这意味着存在如下反函数, 且都是光滑的单值函数。

$$\begin{cases} x = x(u_1, u_2, u_3) \\ y = y(u_1, u_2, u_3) \\ z = z(u_1, u_2, u_3) \end{cases} \quad (1.1.3)$$

在上式中, u_1 、 u_2 和 u_3 分别表示一般的正交曲线坐标系的三个坐标轴, (u_1, u_2, u_3) 确定了一个坐标系, $u_i = u_i(x, y, z) (i = 1, 2, 3)$ 为常量的曲面称为坐标面, 若空间各处三个坐标面都是正交的(坐标面的法线正交), 则称这样的坐标系为正交曲线坐标系(orthogonal curvilinear coordinate system), 如图 1-1 所示。

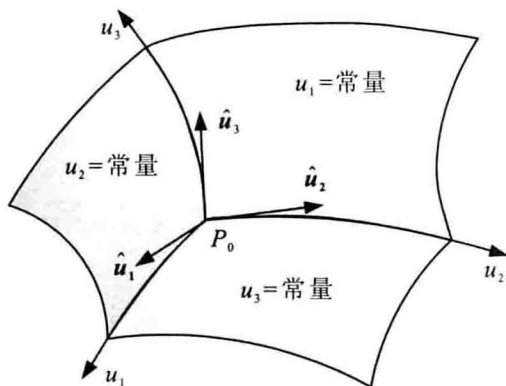


图 1-1 正交曲线坐标系

位置矢量 $\mathbf{r} = x\mathbf{e}_x + y\mathbf{e}_y + z\mathbf{e}_z$ (其中 $\mathbf{e}_x$ 、 $\mathbf{e}_y$ 和 $\mathbf{e}_z$ 分别为直角坐标系中沿 x 、 y 和 z 方向的单位矢量) 的全微分为

$$d\mathbf{r} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u_1} du_1 + \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u_2} du_2 + \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u_3} du_3 \quad (1.1.4)$$

其中,

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u_i} = \mathbf{e}_x \frac{\partial x}{\partial u_i} + \mathbf{e}_y \frac{\partial y}{\partial u_i} + \mathbf{e}_z \frac{\partial z}{\partial u_i}, i = 1, 2, 3 \quad (1.1.5)$$

$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u_i} du_i$ 表示只有坐标 u_i 变化时位置矢量 $\mathbf{r}$ 的微分量。用 $\hat{\mathbf{u}}_i$ 表示沿 $\frac{d\mathbf{r}}{du_i}$ 轴切线方向的单位矢量, 即正交曲线坐标系中的基矢, 则

$$\hat{\mathbf{u}}_i = \frac{1}{\left| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u_i} \right|} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u_i} = \frac{1}{h_i} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u_i} = \frac{1}{h_i} \left(\mathbf{e}_x \frac{\partial x}{\partial u_i} + \mathbf{e}_y \frac{\partial y}{\partial u_i} + \mathbf{e}_z \frac{\partial z}{\partial u_i} \right) \quad (1.1.6)$$

式中,

$$h_i = \left| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u_i} \right| = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial u_i} \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial u_i} \right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial u_i} \right)^2} \quad (1.1.7)$$

称为度规系数(scale factor)。利用(1.1.7)式, 可计算出正交曲线坐标系的度规系数, 从而得到两坐标系之间的变换关系。表 1-1 列出了一些正交曲线坐标系的度规系数。

在正交曲线坐标系中, 三基矢满足如下正交关系

$$\hat{\mathbf{u}}_i \cdot \hat{\mathbf{u}}_j = \delta_{ij} \quad (1.1.8)$$

式中,

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & (i = j) \\ 0, & (i \neq j) \end{cases}$$

表 1-1 常用坐标系的度规系数

坐标系	(u_1, u_2, u_3)	x	y	z	h_1	h_2	h_3
直角坐标系	(x, y, z)	x	y	z	1	1	1
圆柱坐标系	(r, θ, z)	$r \cos \theta$	$r \sin \theta$	z	1	r	1
球坐标系	(x, θ, φ)	$r \sin \theta \cos \varphi$	$r \sin \theta \sin \varphi$	$r \cos \theta$	1	r	$r \sin \theta$
椭圆柱坐标系	(ξ, η, z)	$h \cosh \xi \cos \eta$	$h \sinh \xi \sin \eta$	z	$h \sqrt{\frac{1}{2}(\cosh 2\xi - \cos 2\eta)}$	同左	1

且 $\dot{u}_1, \dot{u}_2$ 和 $\dot{u}_3$ 之间满足右手螺旋关系, 即有

$$\dot{u}_1 \times \dot{u}_2 = \dot{u}_3, \dot{u}_2 \times \dot{u}_3 = \dot{u}_1, \dot{u}_3 \times \dot{u}_1 = \dot{u}_2 \tag{1.1.9}$$

(1.1.6) 式就是一般正交曲线坐标系与直角坐标系之间的基矢变换关系, 其矩阵形式为

$$\begin{pmatrix} \dot{u}_1 \\ \dot{u}_2 \\ \dot{u}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{h_1} \frac{\partial x}{\partial u_1} & \frac{1}{h_1} \frac{\partial y}{\partial u_1} & \frac{1}{h_1} \frac{\partial z}{\partial u_1} \\ \frac{1}{h_2} \frac{\partial x}{\partial u_2} & \frac{1}{h_2} \frac{\partial y}{\partial u_2} & \frac{1}{h_2} \frac{\partial z}{\partial u_2} \\ \frac{1}{h_3} \frac{\partial x}{\partial u_3} & \frac{1}{h_3} \frac{\partial y}{\partial u_3} & \frac{1}{h_3} \frac{\partial z}{\partial u_3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{e}_x \\ \dot{e}_y \\ \dot{e}_z \end{pmatrix} \tag{1.1.10}$$

易知, (1.1.10) 式是正交矩阵, 其逆变换为

$$\begin{pmatrix} \dot{e}_x \\ \dot{e}_y \\ \dot{e}_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{h_1} \frac{\partial x}{\partial u_1} & \frac{1}{h_2} \frac{\partial x}{\partial u_2} & \frac{1}{h_3} \frac{\partial x}{\partial u_3} \\ \frac{1}{h_1} \frac{\partial y}{\partial u_1} & \frac{1}{h_2} \frac{\partial y}{\partial u_2} & \frac{1}{h_3} \frac{\partial y}{\partial u_3} \\ \frac{1}{h_1} \frac{\partial z}{\partial u_1} & \frac{1}{h_2} \frac{\partial z}{\partial u_2} & \frac{1}{h_3} \frac{\partial z}{\partial u_3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{u}_1 \\ \dot{u}_2 \\ \dot{u}_3 \end{pmatrix} \tag{1.1.11}$$

1.1.2 正交曲线坐标系中标量函数的梯度

在正交曲线坐标系中取两点, 使两坐标点具有相同的 u_2 和 u_3 , 而 u_1 相差 du_1 , 则此两点间的距离为^[1]

$$dl_1 = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2} = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial u_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial u_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial u_1}\right)^2} du_1 \tag{1.1.12}$$

上式也可改写成

$$dl_1 = h_1 du_1 \tag{1.1.13}$$

同理, 两坐标点具有相同的 u_3 和 u_1 , 而 u_2 相差 du_2 , 则两点间的距离为

$$dl_2 = h_2 du_2 \tag{1.1.14}$$

两坐标点具有相同的 u_1 和 u_2 , 而 u_3 相差 du_3 , 则两点间的距离为

$$dl_3 = h_3 du_3 \tag{1.1.15}$$

这样, 标量函数 $\Phi = \Phi(u_1, u_2, u_3)$ 的梯度 $\nabla \Phi$ 在 u_1 增长方向的分量为

$$(\nabla \Phi)_1 = \frac{\partial \Phi}{\partial l_1} = \frac{1}{h_1} \frac{\partial \Phi}{\partial u_1} \tag{1.1.16}$$

同理可得, 标量函数 $\Phi = \Phi(u_1, u_2, u_3)$ 的梯度 $\nabla \Phi$ 在 u_2 和 u_3 增长方向的分量分别为

$$(\nabla\Phi)_2 = \frac{\partial\Phi}{\partial l_2} = \frac{1}{h_2} \frac{\partial\Phi}{\partial u_2} \quad (1.1.17)$$

$$(\nabla\Phi)_3 = \frac{\partial\Phi}{\partial l_3} = \frac{1}{h_3} \frac{\partial\Phi}{\partial u_3} \quad (1.1.18)$$

即正交曲线坐标系中标量函数的梯度为

$$\nabla\Phi = \dot{u}_1 \frac{1}{h_1} \frac{\partial\Phi}{\partial u_1} + \dot{u}_2 \frac{1}{h_2} \frac{\partial\Phi}{\partial u_2} + \dot{u}_3 \frac{1}{h_3} \frac{\partial\Phi}{\partial u_3} = \sum_i^3 \dot{u}_i \frac{1}{h_i} \frac{\partial\Phi}{\partial u_i} \quad (1.1.19)$$

正交曲线坐标系中 ∇ 算符为

$$\nabla = \dot{u}_1 \frac{1}{h_1} \frac{\partial}{\partial u_1} + \dot{u}_2 \frac{1}{h_2} \frac{\partial}{\partial u_2} + \dot{u}_3 \frac{1}{h_3} \frac{\partial}{\partial u_3} = \sum_i^3 \dot{u}_i \frac{1}{h_i} \frac{\partial}{\partial u_i} \quad (1.1.20)$$

1.1.3 正交曲线坐标系中矢量函数的散度

本节讨论在正交曲线坐标系下, 如何求一个矢量函数 $\mathbf{A}(u_1, u_2, u_3) = A_1(u_1, u_2, u_3)\dot{u}_1 + A_2(u_1, u_2, u_3)\dot{u}_2 + A_3(u_1, u_2, u_3)\dot{u}_3$ 的散度。

取体积元 ΔV 为区间 $(u_1 - \frac{1}{2}\Delta u_1, u_1 + \frac{1}{2}\Delta u_1)$ 、 $(u_2 - \frac{1}{2}\Delta u_2, u_2 + \frac{1}{2}\Delta u_2)$ 和 $(u_3 - \frac{1}{2}\Delta u_3, u_3 + \frac{1}{2}\Delta u_3)$ 之间的区域, 体积元体积为 $\Delta V = \Delta l_1 \Delta l_2 \Delta l_3 = h_1 h_2 h_3 \Delta u_1 \Delta u_2 \Delta u_3$, 如图 1-2 所示。矢量 $\mathbf{A}(u_1, u_2, u_3)$ 穿过包围体积元 ΔV 的闭合曲面的通量为

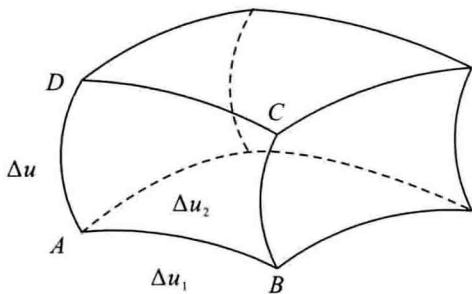


图 1-2 矢量函数的体积元 ΔV

$$\begin{aligned} \oint_S \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} &= \iint_{u_1 + \frac{1}{2}\Delta u_1} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} + \iint_{u_1 - \frac{1}{2}\Delta u_1} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} + \iint_{u_2 + \frac{1}{2}\Delta u_2} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} \\ &+ \iint_{u_2 - \frac{1}{2}\Delta u_2} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} + \iint_{u_3 + \frac{1}{2}\Delta u_3} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} + \iint_{u_3 - \frac{1}{2}\Delta u_3} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} \end{aligned} \quad (1.1.21)$$

其中,

$$\begin{aligned} \iint_{u_1 + \frac{1}{2}\Delta u_1} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} &= \iint_{u_1 + \frac{1}{2}\Delta u_1} \mathbf{A} \cdot \dot{u}_1 h_2 h_3 du_2 du_3 \\ &= A_1\left(u_1 + \frac{1}{2}\Delta u_1, u_2, u_3\right) h_2\left(u_1 + \frac{1}{2}\Delta u_1, u_2, u_3\right) \\ &\quad \times h_3\left(u_1 + \frac{1}{2}\Delta u_1, u_2, u_3\right) \Delta u_2 \Delta u_3 \end{aligned} \quad (1.1.22)$$

将 $A_1 h_2 h_3$ 作泰勒级数展开, 并忽略展开式中的高次项, 得

$$\iint_{u_1 + \frac{1}{2}\Delta u_1} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} = \left[h_2 h_3 A_1 + \frac{1}{2} \frac{\partial(h_2 h_3 A_1)}{\partial u_1} \Delta u_1 \right] \Delta u_2 \Delta u_3 \quad (1.1.23)$$

同理可得

$$\iint_{u_1 - \frac{1}{2}\Delta u_1}^{\iint} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} = \left[-h_2 h_3 A_1 + \frac{1}{2} \frac{\partial(h_2 h_3 A_1)}{\partial u_1} \Delta u_1 \right] \Delta u_2 \Delta u_3 \quad (1.1.24)$$

$$\iint_{u_2 + \frac{1}{2}\Delta u_2}^{\iint} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} = \left[h_3 h_1 A_2 + \frac{1}{2} \frac{\partial(h_3 h_1 A_2)}{\partial u_2} \Delta u_2 \right] \Delta u_3 \Delta u_1 \quad (1.1.25)$$

$$\iint_{u_2 - \frac{1}{2}\Delta u_2}^{\iint} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} = \left[-h_3 h_1 A_2 + \frac{1}{2} \frac{\partial(h_3 h_1 A_2)}{\partial u_2} \Delta u_2 \right] \Delta u_3 \Delta u_1 \quad (1.1.26)$$

$$\iint_{u_3 + \frac{1}{2}\Delta u_3}^{\iint} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} = \left[h_1 h_2 A_3 + \frac{1}{2} \frac{\partial(h_1 h_2 A_3)}{\partial u_3} \Delta u_3 \right] \Delta u_1 \Delta u_2 \quad (1.1.27)$$

$$\iint_{u_3 - \frac{1}{2}\Delta u_3}^{\iint} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} = \left[-h_1 h_2 A_3 + \frac{1}{2} \frac{\partial(h_1 h_2 A_3)}{\partial u_3} \Delta u_3 \right] \Delta u_1 \Delta u_2 \quad (1.1.28)$$

将(1.1.23)~(1.1.28)式代入(1.1.21)式,可得

$$\begin{aligned} \oint_S \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} &= \frac{\partial(h_2 h_3 A_1)}{\partial u_1} \Delta u_1 \Delta u_2 \Delta u_3 + \frac{\partial(h_3 h_1 A_2)}{\partial u_1} \Delta u_1 \Delta u_2 \Delta u_3 \\ &\quad + \frac{\partial(h_1 h_2 A_3)}{\partial u_1} \Delta u_1 \Delta u_2 \Delta u_3 \end{aligned} \quad (1.1.29)$$

由矢量的散度定义,得正交曲线坐标系中矢量函数 $\mathbf{A}(u_1, u_2, u_3)$ 的散度 $\nabla \cdot \mathbf{A}$ 为

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{A} &= \frac{\oint_S \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S}}{\Delta V} = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \left(\frac{\partial(h_2 h_3 A_1)}{\partial u_1} + \frac{\partial(h_3 h_1 A_2)}{\partial u_2} + \frac{\partial(h_1 h_2 A_3)}{\partial u_3} \right) \\ &= \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \sum_{i=1}^3 \frac{\partial}{\partial u_i} \left(\frac{h_1 h_2 h_3}{h_i} A_i \right) \end{aligned} \quad (1.1.30)$$

拉普拉斯算符 ∇^2 作用于标量函数 $\Phi = \Phi(u_1, u_2, u_3)$ 可转化为标量函数 $\Phi(u_1, u_2, u_3)$ 的梯度的散度,即 $\nabla^2 \Phi = \nabla \cdot \nabla \Phi$ 。利用(1.1.19)式可得正交曲线坐标系中拉普拉斯算符 ∇^2 作用于标量函数 Φ 的表示式为

$$\begin{aligned} \nabla^2 \Phi &= \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \left[\frac{\partial}{\partial u_1} \left(\frac{h_2 h_3}{h_1} \frac{\partial \Phi}{\partial u_1} \right) + \frac{\partial}{\partial u_2} \left(\frac{h_3 h_1}{h_2} \frac{\partial \Phi}{\partial u_2} \right) + \frac{\partial}{\partial u_3} \left(\frac{h_1 h_2}{h_3} \frac{\partial \Phi}{\partial u_3} \right) \right] \\ &= \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \sum_{i=1}^3 \frac{\partial}{\partial u_i} \left(\frac{h_1 h_2 h_3}{h_i^2} \frac{\partial \Phi}{\partial u_i} \right) \end{aligned} \quad (1.1.31)$$

由此可见,在正交曲线坐标系中,拉普拉斯算符可表示为如下形式:

$$\nabla^2 = \sum_{i=1}^3 \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \frac{\partial}{\partial u_i} \left[\frac{h_1 h_2 h_3}{h_i^2} \frac{\partial}{\partial u_i} \right] \quad (1.1.32)$$

1.1.4 正交曲线坐标系中矢量函数的旋度

取一个微小曲边四边形 $ABCD$,如图1-3所示,它的法线沿 u_1 增长方向,四边分别为 u_2 、 $u_2 + du_2$ 、 u_3 和 $u_3 + du_3$,将这四边不妨当作直线,现计算矢量函数 $\mathbf{A}(u_1, u_2, u_3)$ 沿 $ABCD$ 的环流量。

沿 AB 段和 CD 段有^[1]

$$(h_2 A_2)|_{u_3} du_2 - (h_2 A_2)|_{u_3 + du_3} du_2 = - \frac{\partial}{\partial u_3} (h_2 A_2) du_2 du_3 \quad (1.1.33)$$

沿 BC 段和 DA 段有

$$(h_3 A_3)|_{u_2 + du_2} du_3 - (h_3 A_3)|_{u_2} du_3 = \frac{\partial}{\partial u_2} (h_3 A_3) du_2 du_3 \quad (1.1.34)$$

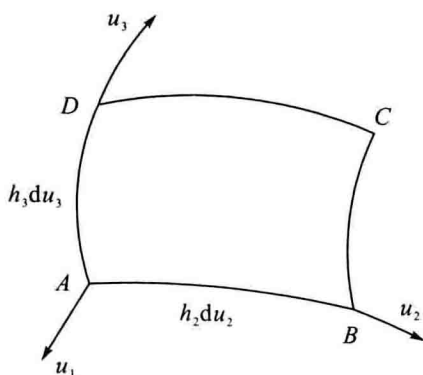


图 1-3 曲边四边形

把两者相加, 得到沿回路 $ABCD$ 的环流量, 将其除以曲边四边形的面积 $h_2 h_3 du_2 du_3$ 就得到 $u_2 u_3$ 面上每单位面积的环流量, 即得到沿 $\hat{u}_1$ 方向矢量函数 $\mathbf{A}(u_1, u_2, u_3)$ 的旋度分量为

$$(\nabla \times \mathbf{A})_1 = \frac{1}{h_2 h_3} \left[\frac{\partial(h_3 A_3)}{\partial u_2} - \frac{\partial(h_2 A_2)}{\partial u_3} \right] \quad (1.1.35)$$

同理可得

$$(\nabla \times \mathbf{A})_2 = \frac{1}{h_3 h_1} \left[\frac{\partial(h_1 A_1)}{\partial u_3} - \frac{\partial(h_3 A_3)}{\partial u_1} \right] \quad (1.1.36)$$

$$(\nabla \times \mathbf{A})_3 = \frac{1}{h_1 h_2} \left[\frac{\partial(h_2 A_2)}{\partial u_1} - \frac{\partial(h_1 A_1)}{\partial u_2} \right] \quad (1.1.37)$$

即在正交曲线坐标系中矢量函数 $\mathbf{A}(u_1, u_2, u_3)$ 的旋度为

$$\begin{aligned} \nabla \times \mathbf{A} &= \hat{u}_1 (\nabla \times \mathbf{A})_1 + \hat{u}_2 (\nabla \times \mathbf{A})_2 + \hat{u}_3 (\nabla \times \mathbf{A})_3 \\ &= \hat{u}_1 \frac{1}{h_2 h_3} \left[\frac{\partial(h_3 A_3)}{\partial u_2} - \frac{\partial(h_2 A_2)}{\partial u_3} \right] + \hat{u}_2 \frac{1}{h_3 h_1} \left[\frac{\partial(h_1 A_1)}{\partial u_3} - \frac{\partial(h_3 A_3)}{\partial u_1} \right] \\ &\quad + \hat{u}_3 \frac{1}{h_1 h_2} \left[\frac{\partial(h_2 A_2)}{\partial u_1} - \frac{\partial(h_1 A_1)}{\partial u_2} \right] \\ &= \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \begin{vmatrix} h_1 \hat{u}_1 & h_2 \hat{u}_2 & h_3 \hat{u}_3 \\ \frac{\partial}{\partial u_1} & \frac{\partial}{\partial u_2} & \frac{\partial}{\partial u_3} \\ h_1 A_1 & h_2 A_2 & h_3 A_3 \end{vmatrix} \end{aligned} \quad (1.1.38)$$

1.2 马蒂厄方程

为深入理解马蒂厄方程, 本节先介绍椭圆柱坐标系, 讨论知在某些特殊情况下它可退化成圆柱坐标系, 然后由标量波动方程出发, 得到椭圆柱坐标系中一般的马蒂厄方程。

1.2.1 椭圆柱坐标系

在 (x, y) 平面中椭圆方程为 $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$ (式中 $a > b$, a 为椭圆的半长轴, b 为椭圆的半短轴)。两焦点 F_1 、 F_2 之间的距离为 $2h$, 且 $h^2 = a^2 - b^2$, 如图 1-4 所示。椭圆偏心率为 $e = h/a$, $e \in [0, 1]$ 。

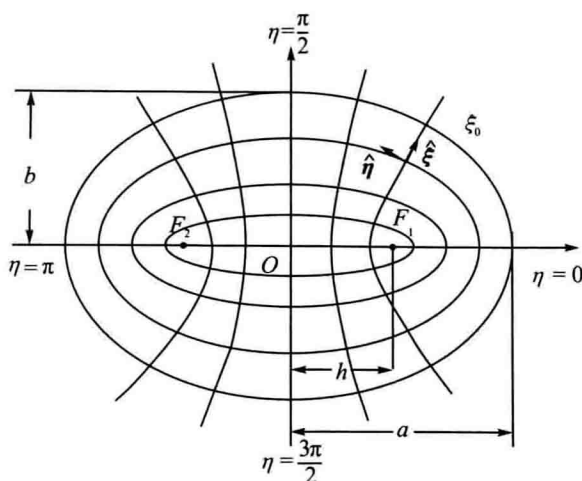


图 1-4 椭圆柱坐标系

椭圆柱坐标系 (ξ, η, z) 与直角坐标系 (x, y, z) 之间的变换关系是 $(x+jy)=h\cosh(\xi+j\eta)$, 其中 ξ 和 η 分别称为椭圆柱坐标系中的径向坐标和角向坐标, j 为单位虚数。令此等式两边的虚部与虚部相等, 实部与实部相等, 就得到

$$\begin{cases} x = h \cosh \xi \cos \eta \\ y = h \sinh \xi \sin \eta \\ z = z \end{cases} \quad (1.2.1)$$

式中 ξ 、 η 和 z 的取值范围分别为 $\xi \in [0, \infty)$, $\eta \in [0, 2\pi)$, $z \in (-\infty, \infty)$ 。 $\xi=\xi_0$ 的表面是一椭圆柱面, 其方程为

$$\left(\frac{x}{h \cosh \xi_0}\right)^2 + \left(\frac{y}{h \sinh \xi_0}\right)^2 = \cos^2 \eta + \sin^2 \eta = 1 \quad (1.2.2)$$

这时半长轴为 $a = h \cosh \xi_0$, 半短轴为 $b = h \sinh \xi_0$ 。 $\eta=\eta_0$ 的表面为双曲柱面, 其方程为

$$\left(\frac{x}{h \cosh \eta_0}\right)^2 - \left(\frac{y}{h \sinh \eta_0}\right)^2 = \cosh^2 \xi - \sinh^2 \xi = 1 \quad (1.2.3)$$

它与 x 轴的交点为 $\pm h \cosh \eta_0$, 其渐近线为 $y = x \tan \eta_0$ 。

椭圆柱面和双曲圆柱面是共焦的, 且处处正交, 椭圆柱坐标系中坐标 (ξ, η) 在直角坐标系中的位置由(1.2.1)式确定。由图1-4可以看出, 椭圆柱坐标系中 $\eta=0$ 的点对应直角坐标系中 x 轴的正半轴, $\eta=\pi$ 对应于直角坐标系中的 x 轴的负半轴, $\eta=\frac{\pi}{2}$ 对应于直角坐标系中 y 轴的正半轴, $\eta=\frac{3}{2}\pi$ 对应于直角坐标系中 y 轴的负半轴。椭圆柱坐标系中的 $\xi=0$ 对应于直角坐标系中连接两焦点之间的直线。在直角坐标系中的焦点坐标 $(x, y)=(\pm h, 0)$, 在椭圆柱坐标系中则分别为 $(\xi, \eta)=(0, 0)$ 和 $(\xi, \eta)=(0, \pi)$ 。椭圆柱坐标系中的原点坐标为 $(0, \frac{\pi}{2})$ 或 $(0, \frac{3}{2}\pi)$ 。当 $h \rightarrow 0$ 或 $\xi \rightarrow \infty$ 时, 有 $a \approx b$, 即椭圆近似为圆, 椭圆柱坐标系可看成为圆柱坐标系。坐标系中任一点到原点的距离为 $r^2 = x^2 + y^2 = h^2 \cosh^2 \xi \cos^2 \eta + h^2 \sinh^2 \xi \sin^2 \eta$, 当 $\xi \rightarrow \infty$ 时, 有 $\sinh \xi \rightarrow \cosh \xi$, 故

$$r|_{\xi \rightarrow \infty} \sim h \cosh \xi \sim \frac{h e^\xi}{2} \quad (1.2.4)$$

方位角为

$$\varphi = \arctan\left(\frac{y}{x}\right) = \arctan\left(\frac{\sinh\xi\sin\eta}{\cosh\xi\cos\eta}\right) = \arctan(\tanh\xi\tan\eta) \quad (1.2.5)$$

当 ξ 很大时, 椭圆坐标系下的角向坐标 η 就相当于圆柱坐标系中的方位角 φ , 而 $\frac{he^\xi}{2}$ 相当于径向距离。

1.2.2 角向马蒂厄方程与径向马蒂厄方程

由(1.1.7)式和(1.2.1)式, 可得椭圆坐标系的度规系数为

$$\begin{cases} h_1 = h_\xi = h \sqrt{\cosh^2\xi - \cos^2\eta} = h \sqrt{\frac{1}{2}(\cosh 2\xi - \cos 2\eta)} \\ h_2 = h_\eta = h_\xi \\ h_3 = h_z = 1 \end{cases} \quad (1.2.6)$$

对于直角坐标系、圆柱坐标系、球坐标系、椭圆柱坐标系、抛物柱坐标系、长旋转椭圆坐标系、扁旋转椭圆坐标系、旋转抛物面坐标系、圆锥坐标系、椭球坐标系和抛物面坐标系, 标量齐次亥姆霍兹方程都可用分离变量法进行求解^[2]。下面本书将应用分离变量法, 由标量波动方程得到标量亥姆霍兹方程, 再由标量亥姆霍兹方程得到径向马蒂厄方程和角向马蒂厄方程。

标量波动方程为

$$\nabla^2 \Phi(\mathbf{r}, t) - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \Phi(\mathbf{r}, t) = 0 \quad (1.2.7)$$

式中 v 是波速, $\Phi(\mathbf{r}, t)$ 是波函数。令 $\Phi(\mathbf{r}, t) = \Phi(\mathbf{r})T(t)$, 并将其代入(1.2.7)式可得

$$\frac{d^2 T(t)}{dt^2} + k^2 v^2 T(t) = 0 \quad (1.2.8)$$

$$\nabla^2 \Phi(\mathbf{r}) + k^2 \Phi(\mathbf{r}) = 0 \quad (1.2.9)$$

式中 k^2 是分离变量常数, (1.2.8)式是二阶常系数齐次线性微分方程, 其解为函数 $T(t) = e^{\pm j\omega t}$, $\omega = kv$; (1.2.9)式是三维标量齐次亥姆霍兹方程, 将拉普拉斯算符分离为横向算符和纵向算符, 即令

$$\nabla^2 = \nabla_t^2 + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \quad (1.2.10)$$

再令其解为 $\Phi(\mathbf{r}) = \Phi_t(\mathbf{r}_t)Z(z)$, 代入方程(1.2.9)式, 应用分离变量法得

$$\frac{d^2 Z(z)}{dz^2} + k_z^2 Z(z) = 0 \quad (1.2.11)$$

$$\nabla_t^2 \Phi_t(\mathbf{r}_t) + k_t^2 \Phi_t(\mathbf{r}_t) = 0 \quad (1.2.12)$$

其中 k_z^2 是分离变量常数, 且有 $k_t^2 = k^2 - k_z^2$, (1.2.11)式是二阶常系数齐次线性微分方程, 其解为函数 $Z(z) = e^{\pm jk_z z}$, (1.2.12)式是二维的标量亥姆霍兹方程, 将(1.2.6)式代入(1.1.32)式, 再利用(1.2.10)式可得在正交曲线坐标系中横向拉普拉斯算符为

$$\nabla_t^2 = \frac{1}{h_\xi^2} \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + \frac{1}{h_\eta^2} \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} \quad (1.2.13)$$

由(1.2.12)式可得椭圆柱坐标系中二维标量亥姆霍兹方程的形式为

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} + \frac{k_t^2 h^2}{2} (\cosh 2\xi - \cos 2\eta) \right] \Phi_t(\xi, \eta) = 0 \quad (1.2.14)$$

令 $\Phi_i(\xi, \eta) = R(\xi)\psi(\eta)$ ，代入(1.2.14)式得

$$\frac{d^2\psi(\eta)}{d\eta^2} + (a - 2q\cos 2\eta)\psi(\eta) = 0 \quad (1.2.15)$$

$$\frac{d^2R(\xi)}{d\xi^2} - (a - 2q\cosh 2\xi)R(\xi) = 0 \quad (1.2.16)$$

式中 a 是分离变量常数， q 是一无量纲参数，它和横向传播常数 k_i 之间的关系为

$$q = h^2 k_i^2 / 4 \quad (1.2.17)$$

方程(1.2.15)式和(1.2.16)式分别叫做角向马蒂厄方程(angular Mathieu equation, AME)和径向马蒂厄方程(radial Mathieu equation, RME)。可以看出，如用 $j\xi$ 代替方程(1.2.15)式中的 η ，就可得到(1.2.16)式，反之如用 $j\eta$ 代替(1.2.16)式中 ξ ，就可得到(1.2.15)式。这种标准形式的马蒂厄方程由 E. L. Ince 于 1914 年提出^[3]。然而，最初这一方程形式并不是统一的标准形式，如：E. T. Whittaker 将方程中的 q 写为 $-8q$ ^[4]，J. A. Stratton 和 P. M. Morse 令方程中的 $a = b - c^2/2, q = c^2/4$ ^[5~6]。但目前不少学者还是采用(1.2.15)式和(1.2.16)式的形式^[7~13]。

至此，得到了在椭圆坐标系中波动方程的解形式为

$$\Phi(r, t) = R(\xi)\psi(\eta)e^{j(\pm k_z z \pm \omega t)} \quad (1.2.18)$$

它表示沿 z 方向传播的波，波的横向场分布由 $R(\xi)\psi(\eta)$ 表示，波的相速度为 $v_p = \omega/k_z$ 。

方程(1.2.15)式和(1.2.16)式的解分别称为角向马蒂厄函数(angular Mathieu functions, AMFS)和径向马蒂厄函数(radial Mathieu functions, RMFS)^[11]。要特别强调的是，有的文献将(1.2.15)式和(1.2.16)式分别称为马蒂厄方程(Mathieu's equation)和修正马蒂厄方程(modified Mathieu's equation)，其解称为马蒂厄函数(Mathieu function)和修正马蒂厄函数(modified Mathieu function)^[4~15]；有的文献将“Mathieu function”译成“马提厄函数”^[6]；有的将其译为“马丢函数”^[12~13, 17~23]或“马修函数”^[24~28]。本书采用的数学名词的翻译由全国自然科学名词审订委员会给出^[14]，并考虑到方程(1.2.15)式和(1.2.16)式的物理意义，将其分别称为角向马蒂厄方程和径向马蒂厄方程，相应的解称为角向马蒂厄函数和径向马蒂厄函数。当然，这也是不少文献采用的命名方法。

第 2 章 角向马蒂厄函数

马蒂厄函数是马蒂厄方程的解，它是法国数学家、天文学家马蒂厄于 1868 年在分析椭圆形膜的振动时提出的^[29]，此函数在诸多物理问题中都有应用。

由第 1 章可知，马蒂厄方程实际是在椭圆柱坐标系下，采用分离变量法，通过亥姆霍兹方程得到的两个横向方程。它分为角向马蒂厄方程和径向马蒂厄方程，其解称为角向马蒂厄函数和径向马蒂厄函数。

图 2-1 反映了马蒂厄函数的分类情况。马蒂厄函数如果按阶次是否为整数，可将其分为整数阶马蒂厄函数和非整数阶马蒂厄函数，但非整数阶马蒂厄函数在物理问题中用得很少，因此，本章主要介绍整数阶马蒂厄函数。整数阶马蒂厄函数又可分为角向马蒂厄函数和径向马蒂厄函数，角向马蒂厄函数又有周期函数和非周期函数两种形式。在大多数物理问题中，由于非周期函数不满足角方向的单值性要求，因而应用得很少。对径向马蒂厄函数，当参数 $q > 0$ 时，整数阶径向马蒂厄函数可分第一类径向马蒂厄函数、第二类径向马蒂厄函数和马蒂厄-汉克尔函数；当参数 $q < 0$ 时，径向马蒂厄函数分为第一类变形贝塞尔型径向马蒂厄函数和第二类变形贝塞尔型径向马蒂厄函数。每类整数阶马蒂厄函数均有奇、偶两种形式。另外，径向马蒂厄方程还存在对应于角向马蒂厄方程非周期解的两个解，即 $Fe_m(\xi, q)$ 和 $Ge_m(\xi, q)$ 函数。

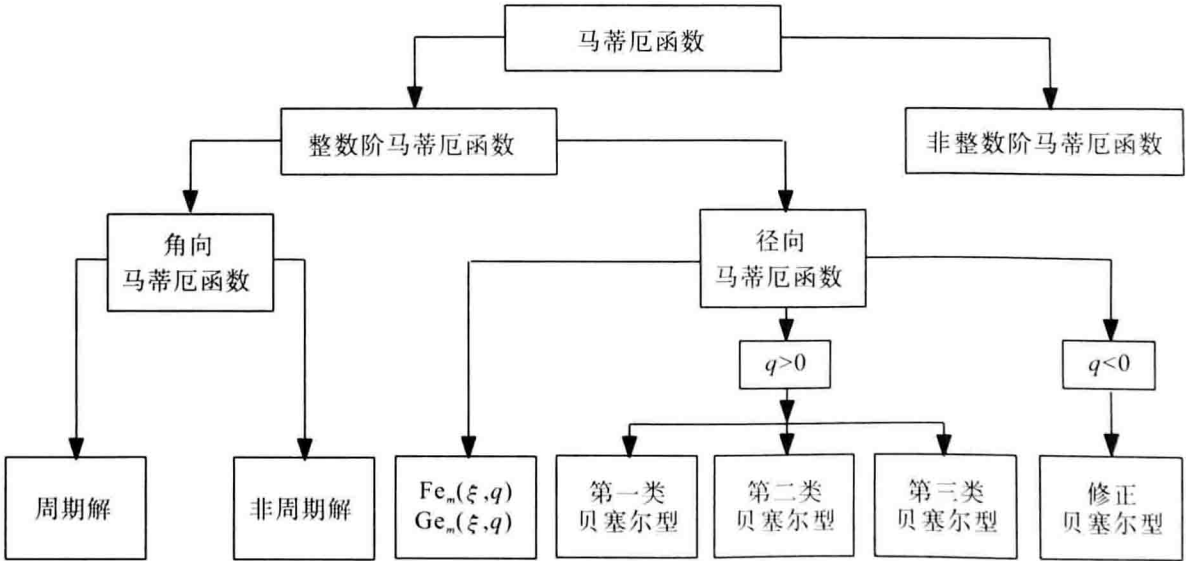


图 2-1 整数阶马蒂厄函数的分类