普通高等院校数学类规划教材配套用书

应用微积分（第二版）

同步辅导

大连理工大学城市学院基础教学部 组编

大连理工大学出版社
DALIAN UNIVERSITY OF TECHNOLOGY PRESS

等院校数学类规划教材配套用书

应用微积分（第二版）

同步辅导

组编　大连理工大学城市学院基础教学部

主编　曹铁川

编者（以编写章节先后排序）

孙晓坤　高桂英　佟小华

刘怡娣　王淑娟　高旭彬

张　鹤　张宇红

大连理工大学出版社

DALIAN UNIVERSITY OF TECHNOLOGY PRESS

图书在版编目(CIP)数据

应用微积分同步辅导 / 大连理工大学城市学院基础教学部组编. —2 版. —大连:大连理工大学出版社,2013.8

ISBN 978-7-5611-8131-7

Ⅰ. ①应… Ⅱ. ①大… Ⅲ. ①微积分—高等学校—教学参考资料 Ⅳ. O172

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2013)第 188915 号

大连理工大学出版社出版

地址:大连市软件园路 80 号 邮政编码:116023

发行:0411-84708842 邮购:0411-84703636 传真:0411-84701466

E-mail:dutp@dutp.cn URL:http://www.dutp.cn

大连力佳印务有限公司印刷 大连理工大学出版社发行

幅面尺寸:140mm×203mm 印张:13.75 字数:497 千字

2010 年 8 月第 1 版 2013 年 8 月第 2 版

2013 年 8 月第 4 次印刷

责任编辑:王 伟 责任校对:李 慧

封面设计:熔点创意

ISBN 978-7-5611-8131-7 定 价:32.00 元

前 言

高等数学是以经典微积分为主的数学基础课。学习该课程既为后续专业课奠定必需的数学基础，也是提高数学素养的必经途径。与初等数学相比，高等数学在研究内容与研究方法上有着许多本质差异，理论性更强，知识涵盖面更广。加之大学课堂教学密度大、进度快，对学生的自学能力要求较高。

为了帮助在校学生更好地学习这门课程，我们编写了这本《应用微积分同步辅导》。该书也可作为教师的教学参考用书，以及准备考研的同学全面复习高等数学的辅导用书。

《应用微积分同步辅导》是大连理工大学城市学院基础教学部组编的《应用微积分》的配套用书，其编写体例是以《应用微积分》的章节为序，按节编写，与教材保持同步。每节包括以下四个版块：

内容提要 言简意赅地提炼出该节的主要概念、定理、公式等重要结果，并对这些内容提出教学要求，使学习者清晰地把握要点。

释疑解惑 掌握好概念是学懂高等数学的前提。根据历年教学中出现的问题，我们选择一些理解起来似是而非、容易发生混淆的问题，进行释疑解惑，分析点拨。

例题解析 做习题是学好数学非常重要的环节。多做题才能深刻理解概念，熟练掌握内容。而如何分析题目，找出解题途径，是做数学题的首要问题。我们选择若干概念性、综合性、启发性较强的题目，对其剖析探究，以提升读者的解题水平，丰富解题经验。

习题精解 该部分内容选自教材的课后习题，约占40%，尽量注意题型齐全，具有典型性、代表性，以及一定的难度。解题过程保留解题依据和主要步骤，引导学生思考总结，做一题有一题的收获，并能触类旁通。

本书由大连理工大学城市学院基础教学部组织编写，曹铁川任主编，并负责统稿。参加第1版编写的教师有：孙晓坤、高桂英、佟小华、刘怡娣、王淑娟、高旭彬、张鹤。第2版是在《应用微积分同步辅

导》第1版的基础上，根据近年来的教学实践修订而成。本次修订主要是对例题和习题做了较多的调整，删除了个别繁难的题目。修订工作由曹铁川、张宇红完成。

限于编者水平，对于书中疏漏与不足，恳请读者和同行给予指正。

编　者

2013年8月

目　录

第一章 函数、极限与连续

函数是微积分的研究对象，极限是微积分的基本运算，极限方法是研究函数的主要工具，连续性是函数的重要性质，本课程研究的函数主要是连续函数. 本章的重点是极限，主要介绍函数的极限，而把数列的极限作为函数极限的特例来处理.

第一节 函 数

内容提要

1. 理解和掌握函数的概念与性质

设有非空数集 X 和实数集 $\mathbf{R}$，f 是一个确定的法则(或关系)，对于每个 $x\in X$，都有惟一的 $y\in\mathbf{R}$ 与之相对应，并且将与 x 对应的 y 记作 $y=f(x)$，则称 f 是定义在 X 上的一元函数，简称为函数，称 x 为自变量，y 为因变量.

定义域：x 的取值范围 X 称为 f 的定义域，记作 $D(f)$或 D.

值域：当 x 遍取 X 中的一切值，函数值 $y=f(x)$的变化范围称为函数 f 的值域，记作 $R(f)$.

经常讨论的函数的四种特性：有界性，单调性，奇偶性，周期性.

2. 理解复合函数与反函数的概念

复合函数：设函数 $y=f(u)$的定义域为 D_1，函数 $u=g(x)$在 D 上有定义，且 $R(g)\subset D_1$，则由 $y=f[g(x)]$($x\in D$)确定的函数称为由函数 $u=g(x)$和函数 $y=f(u)$构成的复合函数，它的定义域为 D，变量 u 称为中间变量. 函数 g 与 f 构成的复合函数通常记为 $f\circ g$，即

$$(f\circ g)(x)=f[g(x)]$$

两个函数能够构成复合函数的条件是函数 g 在 D 上的值域 $R(g)$必须含在 f 的定义域 D_1 内.

反函数：设函数 $y=f(x)$的定义域为 $D(f)$，值域为 $R(f)$，如果对每一个 $y\in R(f)$，都有惟一的 $x\in D(f)$，使 $y=f(x)$，则说 x 也是 y 的函数，我们将这个函数记作 $x=f^{-1}(y)$，并把它称为函数 $y=f(x)$的反函数. 而 $y=f(x)$则称为反函数 $x=f^{-1}(y)$的直接函数. 显然 $y=f(x)$与 $x=f^{-1}(y)$互为反函数.

习惯上将反函数 $x=f^{-1}(y)$记作 $y=f^{-1}(x)$. 即 $y=f(x)$的反函数为 $y=f^{-1}(x)$.

反函数存在定理 若函数 $y=f(x)$ 在 $D(f)$ 上严格单调，则它必存在反函数 $y=f^{-1}(x)$，且反函数也是严格单调的.

直接函数和它的反函数的图形关于直线 $y=x$ 对称.

3. 理解初等函数与非初等函数的概念

基本初等函数包括：幂函数，指数函数，对数函数，三角函数，反三角函数.

由常数和基本初等函数经过有限次的四则运算和有限次的函数复合步骤所构成并可用一个式子表示的函数，称为初等函数.

函数的表现形式有：显函数，隐函数，由参数方程确定的函数.

释疑解惑

【问 1-1-1】 单调的函数必存在反函数，那么不单调的函数是不是一定没有反函数？

答 不是的.

一个函数是否存在反函数，取决于它的对应法则 f 在定义域 $D(f)$ 与值域 $R(f)$ 之间是否构成一一对应的关系. 如果是一一对应，那么必有反函数；否则就没有反函数. 函数在区间 I 上严格单调只是一种特殊的一一对应关系，因此，单调仅是存在反函数的充分条件，而不是必要条件.

例如，函数
$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x}, & -\infty<x<0\\ 2x, & 0\leqslant x<+\infty\end{cases}$$
在区间 $(-\infty,+\infty)$ 上不单调（如图 1-1(a) 所示），但它却存在反函数（如图 1-1(b)）所示：

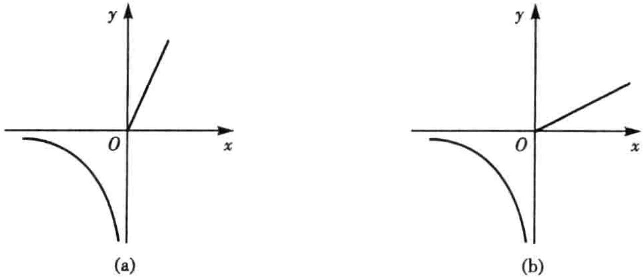

图 1-1

$$f^{-1}(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x}, & -\infty<x<0\\ \dfrac{1}{2}x, & 0\leqslant x<+\infty\end{cases}$$

【问 1-1-2】 函数 $f(x)=|x\sin x|e^{\cos x}(-\infty<x<+\infty)$ 是否是有界函数，

是否是单调函数，是否是周期函数，是否是偶函数？

答　由于$|f(x)|=|x||\sin x|e^{\cos x}$，其中$|\sin x|\neq 0$，$e^{\cos x}>0$，故由因子$|x|$即可断定$f(x)$不是有界函数，也不可能是周期函数. 再由$f(0)=0$，$f\left(\frac{\pi}{2}\right)=\frac{\pi}{2}$，$f(\pi)=0$又可断定$f(x)$不是单调函数.

对任意$x\in(-\infty,+\infty)$，因为

$$f(-x)=|(-x)\sin(-x)|e^{\cos(-x)}=|x\sin x|e^{\cos x}=f(x)$$

所以$f(x)$为偶函数.

【问 1-1-3】　是否所有的周期函数都有最小正周期？

答　不是.

例如常值函数$y=f(x)=C$，对任意的正数a，都有$f(x+a)=f(x)=C$，因此任意正数都是它的周期，但它不存在最小正周期.

又如狄利克雷函数

$$y=D(x)=\begin{cases}1, & x\text{ 为有理数}\\ 0, & x\text{ 为无理数}\end{cases}$$

可以验证任意正的有理数都是它的周期，但是它也不存在最小正周期.

【问 1-1-4】　两个周期函数之和是否仍是周期函数？

答　不一定.

例如，函数$f_1(x)=\sin\frac{x}{2}$的周期是4π，函数$f_2(x)=\cos\frac{x}{3}$的周期是6π，所以这两个函数的和函数$y=\sin\frac{x}{2}+\cos\frac{x}{3}$是周期为$12\pi$的周期函数.

但是，函数$f_1(x)=\sin 2x$的周期是π，函数$f_2(x)=\cos\pi x$的周期是2，由于2和π没有最小的公倍数，因此这两个函数的和函数$y=\sin 2x+\cos\pi x$不是周期函数.

例题解析

【例 1-1-1】　设$f(x)$满足方程$2f(x)+f\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{1}{x}$，求$f(x)$.

分析　对这类题，可利用变量代换得出所求函数的表达式.

解　设$\frac{1}{x}=t$，则$x=\frac{1}{t}$，代入方程有$2f\left(\frac{1}{t}\right)+f(t)=t$，即

$$2f\left(\frac{1}{x}\right)+f(x)=x$$

再联立原方程解方程组有

$$f(x)=\frac{2-x^2}{3x}$$

【例 1-1-2】 设 $f(\tan x)=\tan x+\sin 2x$,其中 $0<x\leqslant\frac{\pi}{2}$,求 $f(\cot x)$.

分析 这类题一般先求出函数 $f(x)$ 的表达式,再完成函数计算.

解 因为
$$\begin{aligned}f(\tan x)&=\tan x+\sin 2x=\tan x+2\sin x\cos x\\&=\tan x+2\tan x\cos^2 x\\&=\tan x+\frac{2\tan x}{\sec^2 x}=\tan x+\frac{2\tan x}{1+\tan^2 x}\end{aligned}$$

故

$$f(x)=x+\frac{2x}{1+x^2}$$

从而有

$$\begin{aligned}f(\cot x)&=\cot x+\frac{2\cot x}{1+\cot^2 x}=\cot x+\frac{2\cot x}{\csc^2 x}\\&=\cot x+2\cot x\sin^2 x=\cot x+\sin 2x\end{aligned}$$

【例 1-1-3】 设 $f(x)=\sin x, f[\varphi(x)]=1-x^2$,求 $\varphi(x)$ 的定义域.

解 因为 $f[\varphi(x)]=\sin[\varphi(x)]=1-x^2$,则可知

$$\varphi(x)=\arcsin(1-x^2)$$

故 $\varphi(x)$ 满足

$$-1\leqslant 1-x^2\leqslant 1$$

即

$$0\leqslant x^2\leqslant 2$$

故 $|x|\leqslant\sqrt{2}$,从而可知 $\varphi(x)$ 的定义域为 $\{x \mid |x|\leqslant\sqrt{2}\}$.

【例 1-1-4】 求函数 $f(x)=\begin{cases}1-2x^2, & x\leqslant -1\\ x, & -1<x\leqslant 1\\ 5x-4, & x>1\end{cases}$ 的反函数.

分析 分段函数求反函数,分别求其在各个区间段上的反函数即可.

解 当 $x\leqslant -1$ 时,由 $y=1-2x^2$ 得

$$x=-\sqrt{\frac{1-y}{2}}\quad (y\leqslant -1)$$

当 $-1<x\leqslant 1$ 时,由 $y=x$ 得

$$x=y\quad (-1<y\leqslant 1)$$

当 $x>1$ 时,由 $y=5x-4$ 得

$$x=\frac{y}{5}+\frac{4}{5}\quad (y>1)$$

故所求的反函数为

$$y=\begin{cases}-\sqrt{\dfrac{1-x}{2}}, & x\leqslant -1\\ x, & -1<x\leqslant 1\\ \dfrac{x}{5}+\dfrac{4}{5}, & x>1\end{cases}$$

【例 1-1-5】 设 $f(x)=\begin{cases}e^x, & x<1\\ x, & x\geqslant 1\end{cases}$, $\varphi(x)=\begin{cases}x+2, & x<0\\ x^2-1, & x\geqslant 0\end{cases}$,求 $f[\varphi(x)]$.

分析 解决本题的关键是要正确理解 $f[\varphi(x)]$所表示的函数的结构.

解 由 $f(x)=\begin{cases}e^x, & x<1\\ x, & x\geqslant 1\end{cases}$,可得 $f[\varphi(x)]=\begin{cases}e^{\varphi(x)}, & \varphi(x)<1\\ \varphi(x), & \varphi(x)\geqslant 1\end{cases}$.

(1)$\varphi(x)<1$ 的条件

当 $x<0$ 时,由 $\varphi(x)=x+2<1$,得 $\begin{cases}x<0\\ x<-1\end{cases}$,即 $x<-1$;

当 $x\geqslant 0$ 时,由 $\varphi(x)=x^2-1<1$,得 $\begin{cases}x\geqslant 0\\ x^2<2\end{cases}$,即 $0\leqslant x<\sqrt{2}$.

(2)$\varphi(x)\geqslant 1$ 的条件

当 $x<0$ 时,由 $\varphi(x)=x+2\geqslant 1$,得 $\begin{cases}x<0\\ x\geqslant -1\end{cases}$,即 $-1\leqslant x<0$;

当 $x\geqslant 0$ 时,由 $\varphi(x)=x^2-1\geqslant 1$,得 $\begin{cases}x\geqslant 0\\ x^2\geqslant 2\end{cases}$,即 $x\geqslant\sqrt{2}$.

综上所述

$$f[\varphi(x)]=\begin{cases}e^{x+2}, & x<-1\\ x+2, & -1\leqslant x<0\\ e^{x^2-1}, & 0\leqslant x<\sqrt{2}\\ x^2-1, & x\geqslant\sqrt{2}\end{cases}$$

【例 1-1-6】 设函数 $f(x)$定义在$(-\infty,+\infty)$上,且在该区间上恒有 $f(x+l)=\dfrac{1}{2}+\sqrt{f(x)-f^2(x)}$,其中 l 为正数,试证 $f(x)$是以 $2l$ 为周期的函数.

分析 关键是理解周期函数的意义,只需证明 $f(x+2l)=f(x)$.

证明 因为

$$\begin{aligned}f(x+2l)&=\frac{1}{2}+\sqrt{f(x+l)-f^2(x+l)}\\ &=\frac{1}{2}+\Big\{\frac{1}{2}+\sqrt{f(x)-f^2(x)}-\\ &\quad\Big[\frac{1}{4}+\sqrt{f(x)-f^2(x)}+f(x)-f^2(x)\Big]\Big\}^{\frac{1}{2}}\end{aligned}$$

$$=\frac{1}{2}+\left[\frac{1}{4}-f(x)+f^2(x)\right]^{\frac{1}{2}}$$
$$=\frac{1}{2}+\left|f(x)-\frac{1}{2}\right| \qquad (*)$$

而

$$f(x)=f(x-l+l)=\frac{1}{2}+\sqrt{f(x-l)-f^2(x-l)}\geqslant\frac{1}{2}$$

故

$$\left|f(x)-\frac{1}{2}\right|=f(x)-\frac{1}{2}$$

代入式(*)得

$$f(x+2l)=f(x)$$

即 $f(x)$是以 $2l$ 为周期的周期函数.

习题精解

4. 正圆柱体内接于高为 h,底半径为 r 的正圆锥体内,设圆柱体的高为 x,试将圆柱体的底半径 y 与体积 V 分别表示为 x 的函数.

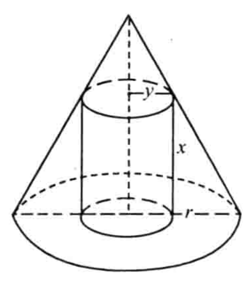

图 1-2

解 如图 1-2 所示,由于$\frac{y}{r}=\frac{h-x}{h}$,因此可以得到

$$y=\left(1-\frac{x}{h}\right)r,\quad x\in(0,h)$$

$$V=\pi y^2x=\pi r^2x\left(1-\frac{x}{h}\right)^2,x\in(0,h)$$

9. 判断下列函数在指定区间内的有界性:

(1) $f(x)=\tan x$ 在$\left(-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}\right)$及$\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$内;

(2) $f(x)=\frac{1}{1+x^2}$在$(-\infty,+\infty)$内;

(3) $f(x)=\frac{x}{1+x^2}$在$(-\infty,+\infty)$内;

(4) $f(x)=\frac{x+2}{x-2},x\in(2,4)$.

解 (1) $\tan x$ 在$\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$内单调增加. 在$\left(-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}\right)$内,$-1=\tan\frac{-\pi}{4}<\tan x<\tan\frac{\pi}{4}=1$,即$|\tan x|<1$,所以 $\tan x$ 在$\left(-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}\right)$内有界;

又因为 $x\to\frac{\pi}{2}$ 时, $\tan x\to+\infty$, $x\to-\frac{\pi}{2}$ 时, $\tan x\to-\infty$, 所以在

$\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$内函数 $\tan x$ 无界.

(2)在$(-\infty,+\infty)$内,因为 $1+x^2\geqslant 1$,所以$|f(x)|\leqslant 1$,即 $f(x)$有界.

(3)$x=0$ 时,$f(0)=0$;$x\neq 0$ 时,$1+x^2\geqslant 2|x|$,故$\left|\frac{x}{1+x^2}\right|\leqslant\frac{1}{2}$. 所以在$(-\infty,+\infty)$内,$|f(x)|\leqslant\frac{1}{2}$,即 $f(x)$有界.

(4)$f(x)=\frac{x-2+4}{x-2}=1+\frac{4}{x-2}$

由于 $x\in(2,4)$,有 $0<x-2<2$,得$\frac{1}{2}<\frac{1}{x-2}<+\infty$. 则

$$2<\frac{4}{x-2}<+\infty$$

有 $3<f(x)<+\infty$,则 $f(x)$有下界,无上界,即无界.

11. 设 $f(x)=\frac{1+x}{1-x}$.

(1)证明 $f(x)$在$(-\infty,1)$与$(1,+\infty)$内均单调增加;

(2)根据(1),能否说 $f(x)$在$(-\infty,1)\cup(1,+\infty)$内单调增加?

解　(1)在$(-\infty,1)$内,设 $x_1<x_2$,又因为 $x_1<1,x_2<1$,所以 $1-x_1>1-x_2>0$.

要证$\frac{1+x_1}{1-x_1}<\frac{1+x_2}{1-x_2}$,只需证$(1+x_1)(1-x_2)<(1+x_2)(1-x_1)$,即证 $1+x_1-x_2-x_1x_2<1-x_1+x_2-x_1x_2$,亦即证 $2x_1<2x_2$. 又由假设知 $2x_1<2x_2$ 显然成立,即得 $f(x_1)<f(x_2)$,从而 $f(x)$在$(-\infty,1)$内单调增加;同理 $f(x)$在$(1,+\infty)$内单调增加.

(2)不能.

例如$\frac{1}{2}<\frac{3}{2}$,但

$$f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1+\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}}=3>f\left(\frac{3}{2}\right)=\frac{1+\frac{3}{2}}{1-\frac{3}{2}}=-5$$

显然不能说 $f(x)$在$(-\infty,1)\cup(1,+\infty)$内严格单调增加.

12. 判断下列函数的奇偶性:

(1)$f(x)=\sqrt{1-x+x^2}-\sqrt{1+x+x^2}$;　(2)$f(x)=2+|x|$;

(3)$f(x)=\lg(x+\sqrt{1+x^2})$;　(4)$f(x)=\frac{\sin^4 x\cos x}{1+x^2}$.

解　(1)因为 $f(-x)=\sqrt{1-(-x)+(-x)^2}-\sqrt{1-x+(-x)^2}=\sqrt{1+x+x^2}-\sqrt{1-x+x^2}=-f(x)$,

所以 $f(x)$ 为奇函数.

(2)因为

$$f(-x)=2+|-x|=2+|x|=f(x)$$

所以 $f(x)$ 为偶函数.

(3)因为

$$\begin{aligned}f(-x)&=\lg\left[-x+\sqrt{1+(-x)^2}\right]\\&=\lg\left[\frac{(\sqrt{1+x^2}+x)(\sqrt{1+x^2}-x)}{\sqrt{1+x^2}+x}\right]\\&=\lg\left(\frac{1}{\sqrt{1+x^2}+x}\right)\\&=-\lg(\sqrt{1+x^2}+x)\\&=-f(x)\end{aligned}$$

所以 $f(x)$ 为奇函数.

(4)因为

$$f(-x)=\frac{\sin^4(-x)\cos(-x)}{1+(-x)^2}=\frac{\sin^4 x\cos x}{1+x^2}=f(x)$$

所以 $f(x)$ 为偶函数.

13. 设 $f(x)$ 是定义在 $[-l,l]$ 上的任意一个函数，讨论 $\varphi(x)=f(x)+f(-x)$ 及 $\psi(x)=f(x)-f(-x)$ 的奇偶性，并证明 $f(x)$ 总可以表示为一个偶函数与一个奇函数之和.

解 因为 $\varphi(-x)=f(-x)+f(x)=\varphi(x)$，所以 $\varphi(x)$ 是偶函数.

因为 $\psi(-x)=f(-x)-f(x)=-\psi(x)$，所以 $\psi(x)$ 是奇函数.

显然 $f(x)=\frac{1}{2}[\varphi(x)+\psi(x)]$，故结论得证.

15. 设 $f(x)$ 是周期为 T 的周期函数，证明 $f(ax+b)$ 也是周期函数，其周期为 $\frac{T}{a}$，其中 a,b 为常数.

证明 设 $F(x)=f(ax+b)$，因为

$$\begin{aligned}F\left(x+\frac{T}{a}\right)&=f\left[a\left(x+\frac{T}{a}\right)+b\right]=f(ax+b+T)\\&=f(ax+b)=F(x)\end{aligned}$$

故 $f(ax+b)$ 也是周期函数，其周期为 $\frac{T}{a}$.

17. 求下列复合函数：

(1)设 $f(x)=x^2$，$g(x)=\sin x$，求 $f[g(x)]$ 及 $g[f(x)]$；

(2)设 $f(x)=\arctan x$，$g(x)=\sqrt{x}$，$\varphi(x)=\lg x$，求 $f\{g[\varphi(x)]\}$；