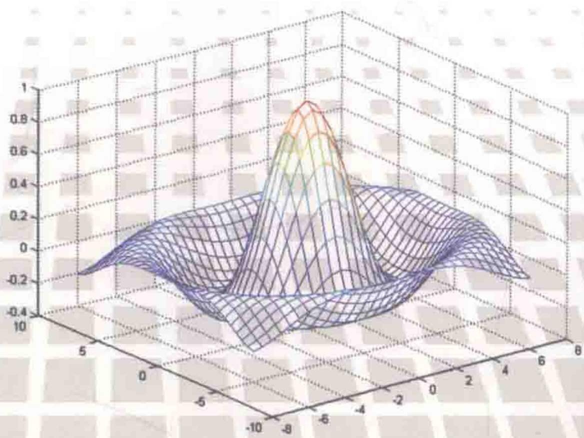
普通高等学校“十二五”规划教材

线性代数

富爱宁　王　娜　冯　艳　罗敏娜　主编



中国铁道出版社
CHINA RAILWAY PUBLISHING HOUSE

普通高等学校“十二五”规划教材

线性代数

主　编　富爱宁　王　娜　冯　艳　罗敏娜
副主编　张洪阳　吴志丹　陈文英　宋　倬

中国铁道出版社
CHINA RAILWAY PUBLISHING HOUSE

内 容 简 介

本系列教材包括《高等数学》上、下册,《线性代数》。作者根据多年的教学改革和教学实践经验,结合普通高等学校理工类、经管类专业对线性代数课程的基本要求,参照教育部最新颁布的研究生入学考试的数学考试大纲编写。

本书为《线性代数》,包括行列式、矩阵、向量和线性方程组、特征值和特征向量、二次型和线性代数在经济中的案例分析等。授课约50学时。

本书适合作为普通高等学校理工类、经管类专业教材,也可作为自学考试、报考硕士研究生的参考书。

图书在版编目(CIP)数据

线性代数/富爱宁等主编. —北京:中国铁道出版社,2013.7

普通高等学校"十二五"规划教材

ISBN 978-7-113-16882-7

Ⅰ.①线… Ⅱ.①富… Ⅲ.①线性代数—高等学校—教材 Ⅳ.①O151.2

中国版本图书馆CIP数据核字(2013)第148062号

书　　名:线性代数

作　　者:富爱宁　王　娜　冯　艳　罗敏娜　主编

策　　划:李小军　　　　**读者热线:**400-668-0820

责任编辑:李小军　徐盼欣

封面设计:付　巍

封面制作:白　雪

责任印制:李　佳

出版发行:中国铁道出版社(100054,北京市西城区右安门西街8号)

网　　址:http://www.51eds.com

印　　刷:三河市兴达印务有限公司

版　　次:2013年7月第1版　　2013年7月第1次印刷

开　　本:720mm×960mm　1/16　**印张:**11.75　**字数:**233千

书　　号:ISBN 978-7-113-16882-7

定　　价:22.00元

前　言

为适应21世纪普通高等院校学生对数学的要求，多年来我校在数学教学改革方面进行了不懈的探索。结合理工、经管等专业对线性代数课程的基本要求，再参照教育部最新颁布的研究生入学数学考试的考试大纲，我校组织编写了《高等数学》上、下册，《线性代数》系列教材。本册为《线性代数》，着重介绍线性代数的基本概念、基本理论和基本方法。在编写过程中力争体现以下特点：

1. 教材起点低，坡度高，起点和中学代数接轨，随着章节展开步步深入。

2. 教材以讲授基本知识、基本方法为主，力保知识的系统性和连贯性，注重对解题方法的归纳和总结。

3. 教材每章最后均有本章小结，将本章的主要概念、教学重点和难点进行简明扼要的总结和归纳，并附有知识体系图，以便更好地帮助学生复习巩固整章的内容。

4. 教材中有较多的典型例题，并通过对一些有代表性的典型例题的分析和求解，归纳出该类习题的解题方法和技巧，以使学生在以后的练习中"有法可依"。

5. 教材每章后面配备的习题分为两类，一是体现教学基本要求的习题，供学生平时练习和巩固；二是自测题，供学生进行本章的复习与检验。书末给出了对应习题与自测题的参考答案，供学生参考。

6. 注意到线性代数在其他学科的渗透和应用，在篇幅允许时，尽量予以提及。

本教材内容包括行列式、矩阵、向量和线性方程组、特征值和特征向量、二次型和线性代数在经济中的案例分析。本书授课学时建议50学时左右，第6章可作为选学内容。

本书由沈阳师范大学富爱宁、王娜、冯艳、罗敏娜担任主编，张洪阳、吴志丹、陈文英、宋倬担任副主编。全书最后由罗敏娜统稿并对全书进行了认真仔细的修改、校订。在编写过程中，编者参考了众多的国内外教材，参考文献附后。

尽管我们在编写过程中力图体现上述特点，但由于编者水平有限，书中难免有不足之处，恳请读者不吝赐教。

编　者

2013年4月

目　　录

第1章 行 列 式

线性代数是中学代数的继续和提高，而行列式是研究线性代数的基础工具，也是线性代数中的一个重要概念，它广泛应用于数学、工程技术及经济等众多领域.

本章首先介绍预备知识，接下来从低阶行列式入手，给出行列式的一般定义；然后讲解行列式的性质和计算方法；最后研究任意阶线性方程组的行列式解法——克莱姆法则.

§1.1 预备知识

为了课程内容的叙述简洁和学生学习方便，先介绍一些符号和基础知识.

1.1.1 和号和积号

1. 和号

符号 $\sum_{i=1}^{n} a_i = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$，表示 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 的连加和.

其中 i 称为下标，下标是虚拟变量，可由任意字母替代，如 $\sum_{i=1}^{n} a_i = \sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{t=0}^{n-1} a_{t+1}$.

在本课程中，我们还要采用双重和号，如

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{ij} = {} & a_{11} + a_{12} + \cdots + a_{1n} + \\ & a_{21} + a_{22} + \cdots + a_{2n} + \\ & \cdots\cdots + \\ & a_{m1} + a_{m2} + \cdots + a_{mn}\end{aligned}$$

表示 $m \cdot n$ 个数 a_{ij} ($i=1,2,\cdots,m; j=1,2,\cdots,n$) 的连加和.

2. 积号

符号 $\prod_{i=1}^{n} a_i = a_1 a_2 \cdots a_n$，表示 $a_1 a_2 a_3 \cdots a_n$ 的连乘积.

再如，符号

$$\prod_{1\leqslant j\leqslant i\leqslant n} (x_i - x_j) = (x_2 - x_1)(x_3 - x_1)\cdots(x_n - x_1)(x_3 - x_2)\cdots(x_n - x_2)\cdots(x_n - x_{n-1})$$

表示所有可能的 $(x_i - x_j)$ $(i > j)$ 的连乘积.

1.1.2 排列及其性质

在 n 阶行列式的定义中，要用到 n 级排列的一些性质，先介绍排列的定义.

定义 1 由自然数 $1,2,3,\cdots,n$ 组成的一个无重复有序数组 $i_1\ i_2\cdots\ i_n$ 称为一个 n **级排列**.

例 1 由自然数 2,3,4 可组成几级排列？分别是什么？

解 可以组成三级排列，它们是 234，243，324，342，423，432.

显然，三级排列共有 $3!=6$ 个，所以 n 级排列的总数为 $n!$ 个.

定义 2 在一个 n 级排列 $i_1\ i_2\ \cdots\ i_n$ 中，如果较大数 i_s 排在较小数 i_t 之前，即 $i_s > i_t$，则称这一对数 $i_s i_t$ 构成一个**逆序**，一个排列中逆序的总数，称为它的**逆序数**. 可表示为 $\tau(i_1\ i_2\ \cdots i_n)$.

例 2 求 $\tau(21534)$，$\tau(32541)$.

解 在五级排列 21534 中，构成逆序数对的有 21，53，54，因此 $\tau(21534)=3$.

在五级排列 32541 中，构成逆序数对的有 32，31，21，54，51，41，因此 $\tau(32541)=6$.

定义 3 如果排列 $i_1 i_2\cdots i_n$ 的逆序数为偶数，则称它为**偶排列**；如果排列的逆序数为奇数，则称它为**奇排列**.

例 3 试求 $\tau(123\cdots n)$，$\tau(n,n-1,\cdots,3,2,1)$，并讨论其奇偶性.

解 易见在 n 阶排列 $123\cdots n$ 中没有逆序，所以 $\tau(123\cdots n)=0$，这是一个偶排列，它具有自然顺序，故又称为**自然排列**.

在 $n,n-1,\cdots,3,2,1$ 中，只有逆序，没有顺序，故有

$$\tau(n,n-1,\cdots,2,1)=(n-1)+(n-2)+2+1=\frac{1}{2}n(n-1)$$

可以看出，排列 $n,n-1,\cdots,3,2,1$ 的奇偶性与 n 的取值有关，从而当 $n=4k$ 或 $n=4k+1$ 时这个排列为偶排列，否则为奇排列.

定义 4 排列 $i_1 i_2\cdots i_n$ 中，交换任意两数 i_t 与 i_s 的位置，称为**一次交换**，记为 (i_s,i_t).

例如，$21534 \xrightarrow{(1,3)} 23514$. 一般地，我们有以下结论.

定理 1 任意一个排列经过一次对换后，改变其奇偶性.（证明略）

定理 2 在全部 n 级排列中（$n\geqslant 2$），奇偶排列各占一半.（证明略）

§1.2 行列式的定义

为了引出行列式的一般定义，我们先介绍低阶行列式.

1.2.1 二阶、三阶行列式

1. 二阶行列式

将 $a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}$ 四个数排成两行两列的数表 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$，称此为**二阶行列式**. 通常用 D 表示，并规定 $D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$. 其中 a_{ij} 叫做二阶行列式的**元素**，元素 a_{ij} 的第一个下标 i 称为**行标**，第二个下标 j 称为**列标**. 如 a_{12} 表示这个元素位于第一行、第二列.

上述二阶行列式可用对角线法则记忆，如图 1.1 所示 .

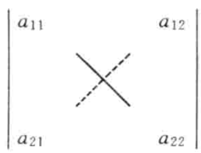


图 1.1

把 a_{11} 到 a_{22} 的实线连接称为**主对角线**，a_{12} 到 a_{21} 的虚线连接称为**次对角线**或**副对角线**. 二阶行列式的值可以叙述为主对角线元素的乘积减去次对角线元素的乘积.

可以看出，二阶行列式一共有 2^2 个元素，共 $2!$ 项；二阶行列式值中的每项均为选自不同行、不同列的两个元素的乘积.

例 1 计算二阶行列式 $\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}$.

解 $\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}=3\times 2-(-1)\times 1=7.$

例 2 设 $D=\begin{vmatrix} 1 & \lambda^2 \\ 2 & \lambda \end{vmatrix}$，问 λ 为何值时，$D\neq 0$.

解 $D=\begin{vmatrix} 1 & \lambda^2 \\ 2 & \lambda \end{vmatrix}=\lambda-2\lambda^2.$

令 $D\neq 0$，则 $\lambda\neq 0$ 且 $\lambda\neq\dfrac{1}{2}$；

故当 $\lambda\neq 0$ 且 $\lambda\neq\dfrac{1}{2}$时，$D\neq 0$.

2. 三阶行列式

类似地，可以定义三阶行列式.

设有九个数排成三行三列的数表 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$，并规定

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31}$$

由上式可见，三阶行列式共有 3! =6 项，每项均为取自不同行、不同列的三个元素的乘积再冠以正负号，三阶行列式可用对角线法则记忆，其规律如图 1.2 所示.

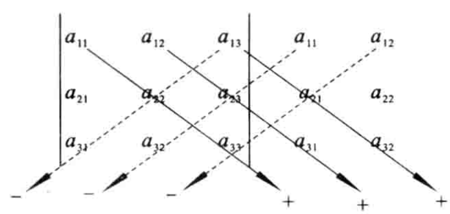


图 1.2

例 3 计算三阶行列式 $D=\begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ -1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 5 \end{vmatrix}$.

解 $D = 1\times0\times5+3\times3\times2+2\times(-1)\times1-2\times0\times2-3\times(-1)\times5-1\times3\times1$
$=0+18-2-0+15-3=28.$

注 对角线法则仅适用于二阶和三阶的行列式，下面我们介绍 n 阶行列式的定义及其计算方法.

1.2.2 n 阶行列式

由二阶、三阶行列式值的规律特点，不难得出：

(1)n^2 个数排成 n 行 n 列，两边加竖线就是一个 n 阶行列式. 共有 $n!$ 项，每项都来自于不同行不同列的几个元素的连乘积 $a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$，其中 $j_1j_2\cdots j_n$ 为列标的一个 n 阶排列.

(2) 每项符号的确定：当列标 $j_1j_2\cdots j_n$ 为偶排列，该项取正号；当列标 $j_1j_2\cdots j_n$ 为奇排列，该项取负号，即符号可写成 $(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)}$.

由此得出行列式的一般定义：

定义 1 由 n^2 个数排成 n 行 n 列，写成

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \tag{1}$$

称为 **n 阶行列式**，其中 a_{ij} 为第 i 行，第 j 列的元素；其值为 $n!$ 项，每一项为取自不同

行不同列的 n 个元素的连乘积，即 $a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$ 的代数和. 其中 $j_1j_2\cdots j_n$ 构成一个 n 级排列.

若用 D 表示行列式，则

$$D=\sum_{j_1j_2\cdots j_n}(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)}a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n} \tag{2}$$

其中 $\sum\limits_{j_1j_2\cdots j_n}(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)}a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$ 表示当行标为标准排列时，对列标的每一种排列所确定的项求和. 式(2) 是式(1) 的展开式，从上面的分析及定义，可得到 n 阶行列式的另一种定义形式：

定义 2
$$D=\sum_{i_1i_2\cdots i_n}(-1)^{\tau(i_1i_2\cdots i_n)}a_{i_11}a_{i_22}\cdots a_{i_nn}$$

即把列标写成标准排列，$i_1i_2\cdots i_n$ 为行标的一个 n 阶排列. 由此，得到行列式更一般的定义形式.

定义 3
$$D=\sum(-1)^{\tau(i_1i_2\cdots i_n)+\tau(j_1j_2\cdots j_n)}a_{i_1j_1}a_{i_2j_2}\cdots a_{i_nj_n}$$

其中 $i_1i_2\cdots i_n$ 为行标的一个 n 阶排列，$j_1j_2\cdots j_n$ 为列标的一个 n 阶排列.

例 4　四阶行列式 $D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$ 共有多少项？乘积 $a_{12}a_{24}a_{32}a_{41}$ 是 D 中的项吗？

解　共有 $4!=24$ 项. 乘积 $a_{12}a_{24}a_{32}a_{41}$ 不是 D 中的一项，因为其中有两个元素 a_{12}，a_{32} 均取自第 2 列.

例 5　已知 $D=\begin{vmatrix} x & 1 & 1 & 2 \\ 1 & x & 1 & -1 \\ 3 & 2 & x & 1 \\ 1 & 1 & 2x & 1 \end{vmatrix}$，求 x^3 的系数.

解　由行列式的定义，展开式的一般项为 $(-1)^{\tau(j_1j_2j_3j_4)}a_{1j_1}a_{2j_2}a_{3j_3}a_{4j_4}$. 要出现 x^3 的项，则 a_{ij_i} 需有三项取到 x. 显然行列式中含 x^3 的项仅有两项，它们是 $(-1)^{\tau(1234)}a_{11}a_{22}a_{33}a_{44}$ 及 $(-1)^{\tau(1243)}a_{11}a_{22}a_{34}a_{43}$，即 $x\cdot x\cdot x\cdot 1=x^3$ 及 $(-1)\cdot x\cdot x\cdot 1\cdot 2x=-2x^3$，故 x^3 的系数为 $1+(-2)=-1$.

1.2.3　特殊行列

下面利用行列式的定义来计算几种特殊的 n 阶行列式.

1. 对角行列式

称 $D=\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$ 为对角行列式.

根据行列式的定义得

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$$

2. 上三角形行列式

称 $D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$ 为上三角形行列式.

根据行列式的定义得

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$$

3. 下三角形行列式

称 $D=\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$ 为下三角形行列式.

根据行列式的定义得

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$$

4. 副对角行列式

称 $D=\begin{vmatrix} 0 & \cdots & 0 & a_{1n} \\ 0 & \cdots & a_{2,n-1} & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix}$ 为**副对角行列式**.

根据行列式的定义得

$$D=\begin{vmatrix} 0 & \cdots & 0 & a_{1n} \\ 0 & \cdots & a_{2,n-1} & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix}=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}a_{1n}a_{2,n-1}\cdots a_{n-1,2}a_{n1}$$

§1.3　行列式的性质

当行列式的阶数较高时,利用定义计算行列式相当麻烦,为了简化行列式的计算,需要研究行列式的一些性质.

1.3.1　行列式的性质

性质 1　将行列式的行、列互换,行列式的值不变.

如果 $D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$, $D^{\mathrm{T}}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$, 则 $D^{\mathrm{T}}=D$.

其中行列式 D^{T}称为 D 的**转置行列式**.

注　这一性质表明行列式中行与列的地位是对称的,也就是说凡是行列式对行成立的性质,对列也是成立的.

性质 2　互换行列式的两行(列),行列式的值仅改变符号.

即
$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{s1} & a_{s2} & \cdots & a_{sn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=-\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{s1} & a_{s2} & \cdots & a_{sn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

推论 1 如果行列式有两行(列)完全相同,则此行列式等于零.

性质 3 以数 k 乘行列式的某一行(列)中的所有元素,就等于用 k 去乘以此行列式.

即
$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ ka_{i1} & ka_{i2} & \cdots & ka_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = k\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

由性质 3 可得下面的推论:

推论 2 行列式一行(列)的所有元素的公因子可以提取到行列式的外面.

推论 3 如果行列式中有一行(列)的元素全为零,则此行列式值为零.

推论 4 如果行列式中有两行(列)的对应元素成比例,则此行列式值为零.

性质 4 如果行列式的某一行(列)的所有元素都是两个数的和,则此行列式等于两行列式之和. 如果

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1}+a_{j1} & a_{i2}+a_{j2} & \cdots & a_{in}+a_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$D_1 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}, \quad D_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

则 $D=D_1+D_2$.

推论 5 如果行列式的某一行(列)的所有元素都是 n 个数的和,则此行列式等于 n 个行列式之和,即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1}+0+\cdots+0 & 0+a_{i2}+\cdots+0 & \cdots & 0+0+\cdots+a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & a_{i2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}+\cdots+\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

性质 5　把行列式的某一行(列)的各元素乘以同一数后加到另一行(列)对应的元素上去,行列式的值不变.

例如,以数 k 乘第 i 行加到第 j 行上,当 $i\neq j$ 时,有

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{j1}+ka_{i1} & a_{j2}+ka_{i2} & \cdots & a_{jn}+ka_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

通常用 r_i+kr_j 表示第 j 行的 k 倍加到第 i 行后取代原来的第 i 行,用 c_i+kc_j 表示第 j 列的 k 倍加到第 i 列后取代原来的第 i 列.

1.3.2　利用行列式性质计算行列式

例 1　计算行列式　$D=\begin{vmatrix} a & 1 & a-2 \\ b & 1 & b-2 \\ c & 1 & c-2 \end{vmatrix}$.

解　$D=\begin{vmatrix} a & 1 & a-2 \\ b & 1 & b-2 \\ c & 1 & c-2 \end{vmatrix}\xlongequal{c_3-c_1}\begin{vmatrix} a & 1 & -2 \\ b & 1 & -2 \\ c & 1 & -2 \end{vmatrix}=0.$

例 2　计算行列式　$D=\begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{vmatrix}$.

解　$D=\begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{vmatrix}\xlongequal{c_4+c_3+c_2+c_1}\begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 & 6 \\ 1 & 3 & 1 & 6 \\ 1 & 1 & 3 & 6 \\ 1 & 1 & 1 & 6 \end{vmatrix}$

$$=6\begin{vmatrix}3&1&1&1\\1&3&1&1\\1&1&3&1\\1&1&1&1\end{vmatrix}\overset{\substack{r_1-r_4\\r_2-r_4\\r_3-r_4}}{=\!=\!=}6\begin{vmatrix}2&0&0&0\\0&2&0&0\\0&0&2&0\\1&1&1&1\end{vmatrix}=6\times2^3=48.$$

例 3 计算行列式 $D=\begin{vmatrix}1&3&-2&-1\\0&2&1&3\\2&7&-5&-2\\-1&1&2&1\end{vmatrix}$.

解 $D=\begin{vmatrix}1&3&-2&-1\\0&2&1&3\\2&7&-5&-2\\-1&1&2&1\end{vmatrix}\overset{\substack{r_3-2r_1\\r_4+r_1}}{=\!=\!=}\begin{vmatrix}1&3&-2&-1\\0&2&1&3\\0&1&-1&0\\0&4&0&0\end{vmatrix}$

$$\overset{c_2\leftrightarrow c_4}{=\!=\!=}-\begin{vmatrix}1&-1&-2&3\\0&3&1&2\\0&0&-1&1\\0&0&0&4\end{vmatrix}=-[1\times3\times(-1)\times4]=12.$$

例 4 解方程 $\begin{vmatrix}1&4&3&2\\2&x+4&6&4\\3&-2&x&1\\-3&2&5&-1\end{vmatrix}=0$.

解 由于 $\begin{vmatrix}1&4&3&2\\2&x+4&6&4\\3&-2&x&1\\-3&2&5&-1\end{vmatrix}\overset{\substack{r_2-2r_1\\r_3+r_4}}{=\!=\!=}\begin{vmatrix}1&4&3&2\\0&x-4&0&0\\0&0&x+5&0\\-3&2&5&-1\end{vmatrix}$

$$\overset{\substack{c_1-3c_4\\c_2+2c_4\\c_3+5c_4}}{=\!=\!=}\begin{vmatrix}-5&8&13&2\\0&x-4&0&0\\0&0&x+5&0\\0&0&0&-1\end{vmatrix}=5(x-4)(x+5),$$

于是原方程为 $5(x-4)(x+5)=0$，解得 $x_1=4,x_2=-5$.

例 5 计算 n 阶行列式 $D_n=\begin{vmatrix}a&b&b&\cdots&b&b\\b&a&b&\cdots&b&b\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots&\vdots\\b&b&b&\cdots&a&b\\b&b&b&\cdots&b&a\end{vmatrix}$.