

2014年

GCT真题模拟题 归类解析及知识点清单

数学分册

全国GCT辅导用书编写组 编著

本书面向

工程硕士

农业推广硕士

兽医硕士

风景园林硕士

职业学校教师在职攻读硕士学位



www.1kao.com.cn(登录下载中心)免费获取

专家精心梳理的GCT语文考试、人文与社会科学、自然科学知识库

 中国人民大学出版社

 中国人民大学出版社

www.1kao.com.cn

注册享受增值服务

011862

刮开涂层 网站注册

2014年

数学分册

全国GCT辅导用书编写组 编著

中国人民大学出版社

· 北 京 ·

图书在版编目 (CIP) 数据

2014 年 GCT 真题模拟题归类解析及知识点清单. 数学分册/全国 GCT 辅导用书编写组编著. —北京: 中国人民大学出版社, 2014. 2
ISBN 978-7-300-18735-8

I. ①2… II. ①全… III. ①高等数学-研究生-入学考试-解题 IV. ①G643-44

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2014) 第 011355 号

2014 年 GCT 真题模拟题归类解析及知识点清单
数学分册

全国 GCT 辅导用书编写组 编著
2014 Nian GCT Zhenti Moniti Guilei Jiexi ji Zhishidian Qingdan Shuxue Fence

出版发行	中国人民大学出版社	邮政编码	100080
社 址	北京中关村大街 31 号		
电 话	010-62511242 (总编室)	010-62511770 (质管部)	
	010-82501766 (邮购部)	010-62514148 (门市部)	
	010-62515195 (发行公司)	010-62515275 (盗版举报)	
网 址	http://www.crup.com.cn		
	http://www.lkao.com.cn (中国 1 考网)		
经 销	新华书店		
印 刷	三河市冠宏印刷装订厂		
规 格	185 mm×260 mm 16 开本	版 次	2014 年 3 月第 1 版
印 张	25.5	印 次	2014 年 3 月第 1 次印刷
字 数	613 000	定 价	58.00 元

前 言

由国务院学位办实行的 GCT（硕士专业学位研究生入学资格考试），依据往年学位办文件，主要参加对象为参加工程硕士、农业推广硕士、兽医硕士、风景园林硕士、翻译硕士、汉语国际教育硕士以及高等学校教师和中等职业学校教师在职攻读硕士学位等入学考试的考生。GCT 试卷由四部分构成：语言表达能力测试、数学基础能力测试、逻辑推理能力测试和外语运用能力测试（即：语文分册、数学分册、逻辑分册、英语分册）。

为了满足广大 GCT 考生的迫切需要，基于对考生高度负责的精神，我们根据自己多年的考试辅导经验，紧密结合考试大纲，精心编写了本套书。本套书具有如下特色：

一、专家主笔，编写阵容强大

本套书编者多年来一直从事 GCT 的考前辅导工作，积累了丰富的教学辅导经验，对历年考试情况比较了解，深谙命题规律和出题动态。可以说，本套书的出版凝结着参与编写的专家、学者多年教学、命题、评卷的经验，具有极强的权威性和实战性，针对性强。

二、系统、全面、深入剖析历年真题，考试知识点一览无余

我们希望帮助考生做到以下几点：（1）系统而轻松地掌握大纲要求的知识点。（2）对历年真题按考点进行归类，在归纳常考知识点清单的基础上，将考点融会贯通。（3）进行系统的模拟训练，严格按照实际的考试时间和难度进行模拟测试。

本套书以近十一年（2003—2013 年）的考试真题带考点，不仅讲解真题，更归纳考点，梳理知识清单，为考生指明高效复习、应试取胜的方向。

三、精辟阐明解题思路，全面展现题型特点

本套书对历年真题和自测试题都进行了详细的解析，尤其是对解题思路和题型特点都作了深入和细致的分析。考生在作答本套书的试题时，要坚持独立思考、自主分析，独立作出解答，然后才去对照答案，否则起不到模拟测试的作用。此外，要学会不断归纳总结。对于平时做错的试题，要找出症结所在，以便下次不再犯同样的错误。

作为命题成果的集合，本套书中的试题可以反复练习，以便考生掌握试题的重要知识点、题型套路及解题技巧。

复习备考 GCT 是一个很艰苦的过程。在编写本套书的过程中，作者根据多年的辅导经验，诠释 GCT 的技巧，让广大考生能够在有限的时间内，正确把握考试要领，紧紧抓住考试的重点环节，进行全真的试题模拟，做到事半功倍。

参加本书编写的除主编刘爽、童武外，还有卢明、谢描、江海波、王德军、李铁红、

刘希、汪华、李建霞、耿淑玉、李春艳、张永艳、潘小春、刘佩、涂振旗、翟自飞、陈明慧、孟楠、郝显纯、张一平、沈二婵等同志，在此一并表示感谢。

尽管本套书的编者本着对考生认真负责的态度，力求达到完美的境地，但是由于时间仓促，缺点和纰漏在所难免，还望广大考生和专家批评指正。

编者

目 录

第一部分 GCT 数学考试分析

一、基本考情分析	3
二、数学应试技巧分析	3
三、备考与应试策略	8

第二部分 历年真题考点归类与自测

第一编 算术	13
第一章 算术	13
考点 1: 特殊运算法则	13
考点 2: 整数和小数四则混合运算	13
考点 3: 分数与百分数	14
考点 4: 比例的计算	16
考点 5: 比的概念与计算	18
考点 6: 数的整除	19
考点 7: 算术平均值	20
考点 8: 素数与合数	20
十一年真题考点归纳	23
考点自测	23
考点自测答案与解析	24
第二编 初等代数	27
第二章 数和代数式	27
考点 1: 数轴与绝对值	27
考点 2: 复数的运算与模	28
考点 3: 共轭复数	29
考点 4: 复数的辐角	30
考点 5: 因式分解	30
考点 6: 整式和分式的加减运算与恒成立的条件	31

十一年真题考点归纳	38
考点自测	39
考点自测答案与解析	41
第三章 方程和方程组	47
考点 1: 一元一次方程的应用与求解	47
考点 2: 一元二次方程的求解与韦达定理	49
考点 3: 二元一次方程组及其求解	50
十一年真题考点归纳	53
考点自测	53
考点自测答案与解析	55
第四章 不等式	59
考点 1: 数的比较与不等式	59
考点 2: 不等式的建立和求解	61
十一年真题考点归纳	63
考点自测	63
考点自测答案与解析	66
第五章 集合、映射和函数	73
考点 1: 集合的概念与运算	73
考点 2: 函数的性质	74
考点 3: 二次函数及其图像	76
考点 4: 函数的定义域	78
考点 5: 函数图像的对称性	80
考点 6: 分段函数与复合函数	81
十一年真题考点归纳	84
考点自测	84
考点自测答案与解析	87
第六章 数列、数学归纳法	93
考点 1: 数列及其通项公式	93
考点 2: 等差数列	94
考点 3: 等比数列	96
十一年真题考点归纳	99
考点自测	99
考点自测答案与解析	102
第七章 排列、组合、二项式定理和古典概率	109
考点 1: 排列和组合的概念与计算	109
考点 2: 古典概型的概率计算	111
考点 3: 独立事件与概率计算	113
考点 4: 伯努利试验的概率计算	114
十一年真题考点归纳	119
考点自测	120

考点自测答案与解析	122
第三编 几何与三角学	128
第八章 常见的几何图形	128
考点 1: 三角形的性质与计算	128
考点 2: 四边形的性质与计算	131
考点 3: 圆的性质与计算	136
考点 4: 长方体和球体的性质与计算	138
考点 5: 圆柱体的性质与计算	140
考点 6: 圆锥体的性质与计算	141
十一年真题考点归纳	143
考点自测	144
考点自测答案与解析	146
第九章 三角学	152
考点 1: 三角函数值的计算	152
考点 2: 解三角形	154
十一年真题考点归纳	161
考点自测	161
考点自测答案与解析	164
第十章 平面解析几何	171
考点 1: 圆	171
考点 2: 平面距离和空间距离求解	174
考点 3: 斜率和直线方程	175
考点 4: 双曲线	179
考点 5: 椭圆	182
考点 6: 抛物线	183
十一年真题考点归纳	186
考点自测	187
考点自测答案与解析	190
第四编 一元函数微积分	197
第十一章 极限与连续	197
考点 1: 函数的极限及其性质	197
考点 2: 函数极限与数列极限的关系及其计算	199
十一年真题考点归纳	206
考点自测	206
考点自测答案与解析	210
第十二章 一元函数微分学	218
考点 1: 导数的物理意义和几何意义	218
考点 2: 函数的求导运算	220

考点 3: 函数极值与曲线拐点的判定	225
考点 4: 曲线的渐近线	228
十一年真题考点归纳	233
考点自测	233
考点自测答案与解析	239
第十三章 一元函数积分学	250
考点 1: 定积分的几何意义与应用	250
考点 2: 定积分的计算与方法	253
考点 3: 变上限积分函数	257
考点 4: 不定积分的计算	259
十一年真题考点归纳	265
考点自测	265
考点自测答案与解析	271
第五编 线性代数	283
第十四章 行列式	283
考点 1: 行列式的展开	283
考点 2: 行列式的性质	285
十一年真题考点归纳	289
考点自测	289
考点自测答案与解析	293
第十五章 矩阵	302
考点 1: 矩阵的转置、乘法运算和方阵的行列式	302
考点 2: 可逆矩阵、伴随矩阵及其求解	305
考点 3: 矩阵的秩	308
十一年真题考点归纳	314
考点自测	315
考点自测答案与解析	321
第十六章 向量	333
考点 1: 向量的基本运算	333
考点 2: 向量的线性相关性	334
考点 3: 向量组的极大无关组	337
考点 4: 向量组的秩	337
十一年真题考点归纳	339
考点自测	339
考点自测答案与解析	344
第十七章 线性方程组	354
考点 1: 非齐次线性方程组有无解的判定	354
考点 2: 齐次线性方程组的解向量、基础解系与系数矩阵的秩	356
考点 3: 齐次线性方程组有无非零解的判定	357

十一年真题考点归纳	361
考点自测	362
考点自测答案与解析	368
第十八章 矩阵的特征值和特征向量	378
考点 1: 矩阵的特征值与特征向量及其求解	378
考点 2: 矩阵的相似关系和对角化	380
十一年真题考点归纳	384
考点自测	384
考点自测答案与解析	388

● GCT真题模拟题归类解析及知识点清单 ●

第一部分

GCT数学考试分析

一、基本考情分析

GCT 入学资格考试数学部分的考试以数学基础知识为背景,重点考查考生的基本数学素养及对基本数学概念的理解,考查考生逻辑思维能力、数学运算能力、空间想象能力以及分析解决问题的能力。数学试题由五部分内容组成:算术、初等代数、几何与三角学、一元函数微积分、线性代数。考试题目共 25 个,考试时间 45 分钟。

GCT 入学考试数学部分有如下的特点:

第一,内容繁杂,综合性强。考试内容囊括算术、初等代数、几何与三角学、一元函数微积分以及线性代数的基础知识,包括小学、初中、高中以及大学的数学知识。

第二,考试时间很紧张。要在 45 分钟内解决 25 道题,平均每道试题的解题时间不到 2 分钟。

二、数学应试技巧分析

著名数学家、教育家 G. 波利亚(G. Polya)说:“解题是智力的特殊成就,而智力乃是人类的天赋。因此,解题可以被认为是人类最富有特征性的活动。”本书给 GCT 入学资格考生提供了锻炼自己解题能力和测验自己数学水平的机会。在看本书试题时,应该先自己动手做题,然后将自己所得的结果与书中的答案加以比较,看自己哪些做对了、哪些做错了,为什么会做错。建议考生把本书的全部试题做 2~3 遍,应该做到对所有的题目一见到就能够熟练、正确地解答出来。

数学考试要在 45 分钟内完成,时间是很紧张的。考生如果能在牢固掌握基础知识的基础上,掌握一定的解题技巧,必将大大提高解题速度。下面就一些比较典型的题型,介绍几种解题方法和技巧。当然,这些解题方法并非具有通用性,考生应该具体情况具体分析。

1. 结合图形解题,一目了然

【例 1】要使方程 $3x^2 + (m-5)x + m^2 - m - 2 = 0$ 的两个实根分别满足 $0 < x_1 < 1$ 和 $1 < x_2 < 2$, 实数 m 的取值范围是()。

A. $-2 < m < -1$ B. $-4 < m < -1$ C. $-4 < m < -2$ D. $-3 < m < 1$

【技巧分析】这里主要考查二次函数(方程)的性质。如果用一元二次方程根与系数的关系解题,比较繁琐,我们不妨结合图形解题。

解:如图 1 所示,设

$$f(x) = 3x^2 + (m-5)x + m^2 - m - 2$$

则 $f(x)$ 开口向上,与 x 轴交于 $(x_1, 0)$ 和 $(x_2, 0)$ 两

点,有不等式组
$$\begin{cases} f(0) > 0 \\ f(1) < 0, \text{从而有} \\ f(2) > 0 \end{cases} \begin{cases} m^2 - m - 2 > 0 \\ m^2 - 4 < 0 \\ m^2 + m > 0 \end{cases}$$

答案: A。

【例 2】设 $\varphi(x)$ 是 x 到离 x 最近的整数的距离,

求 $\int_0^{100} \varphi(x) dx$ 。

【技巧分析】此题至少有两种解法。直接用积分的方法也能算出答案,但是比较繁琐,如果借助于图形,答案就一目了然了。其实所求积分就是如图 2 所示的 100 个三角形的面积

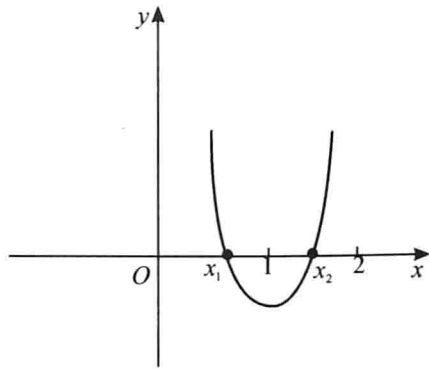


图 1

之和。

解法 1: 如图所示,

$$\int_0^{100} \varphi(x) dx = 100 \times 0.25 = 25.$$

解法 2:

$$\varphi(x) = \begin{cases} x-i, & i \leq x < i+0.5 \\ i+1-x, & i+0.5 \leq x < i+1 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \int_0^{100} \varphi(x) dx &= \sum_{i=0}^{99} \int_i^{i+1} \varphi(x) dx \\ &= \sum_{i=0}^{99} \left[\int_i^{i+0.5} (x-i) dx + \int_{i+0.5}^{i+1} (i+1-x) dx \right] \\ &= 25. \end{aligned}$$

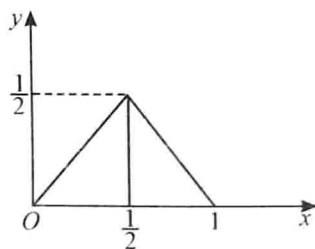


图 2

2. 典型的比例问题, 借助比例系数求解

【例 3】 设 $\frac{1}{x} : \frac{1}{y} : \frac{1}{z} = 4 : 5 : 6$, 则使 $x+y+z=74$ 成立的 y 值是()。

- A. 24 B. 36 C. $\frac{74}{3}$ D. $\frac{37}{2}$

【技巧分析】 这是很典型的比例问题, 一般的题是两个数值之间的比例问题, 这里是三个数值之间的比例问题, 按照 $\frac{1}{x}, \frac{1}{y}, \frac{1}{z}$ 各自的比例直接计算此题, 不如借助于比例系数计算来得快。

解: 令 $\frac{1}{x} = \frac{1}{y} = \frac{1}{z} = k$

有 $\begin{cases} x = \frac{1}{4k} \\ y = \frac{1}{5k} \\ z = \frac{1}{6k} \end{cases}$

根据题意有 $\frac{1}{4k} + \frac{1}{5k} + \frac{1}{6k} = 74$, 解得 $k = \frac{1}{120}$

所以 $y = \frac{1}{5k} = 24$

答案: A。

3. 直观判断常数项

在判断 n 值给定的情况下, 二项展开式是否存在常数项的问题时, 用直接判断法比代入条件验证结论要简便得多, 下面结合例题进行分析。

【例 4】 当()时, $\left(\sqrt[4]{x} - \frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)^n$ 有常数项。

- A. $n=1$ B. $n=2$
C. $n=4$ D. $n=7$

【技巧分析】二项展开式中，位于分母的指数为 $\frac{1}{3}$ ，位于分子的指数是 $\frac{1}{4}$ ，它们的比值为 $\frac{3}{4}$ ， $3+4=7$ ，只有当 $n=7$ 的整数倍时，展开式才存在常数项。

答案：D。

4. 等价变形，运用转换法

【例 5】设实数 x, y 符合等式 $x^2 - 4xy + 4y^2 + \sqrt{3}x + \sqrt{3}y - 6 = 0$ ，则 $x+y$ 的最大值为()。

A. $\frac{\sqrt{3}}{2}$

B. $\frac{2\sqrt{3}}{3}$

C. $2\sqrt{3}$

D. $3\sqrt{2}$

【技巧分析】把 $x+y$ 视作一个整体来解题，有些麻烦，问题比较复杂。但是如果能将原等式进行等价变换，则会“柳暗花明”。

解：对原式作等价变形，有

$$\sqrt{3}(x+y) = 6 - (x-2y)^2$$

$$\text{可得 } x+y = \frac{6}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{3}}(x-2y)^2$$

$$\text{由 } (x-2y)^2 \geq 0$$

$$\text{可得 } \frac{1}{\sqrt{3}}(x-2y)^2 \geq 0$$

$$\text{所以 } x+y \leq \frac{6}{\sqrt{3}} = 2\sqrt{3}$$

答案：C。

5. 运用待定系数法求解

【例 6】已知 $x^4 - 6x^3 + ax^2 + bx + 4$ 是一个二次三项式的完全平方式，则 a, b 的值分别为()。

A. $a = 13, b = -12$ 或者 $a = 5, b = 12$

B. $a = 6, b = 1$

C. $a = -6, b = 4$

D. $a = 13, b = -12$

【技巧分析】此类题采用待定系数法就比较简单，直接根据未知的系数来推算答案是比较麻烦的。

解：设原式 $= (x^2 + Ax + B)^2$ ，有

$$x^4 - 6x^3 + ax^2 + bx + 4 = x^4 + 2Ax^3 + (A^2 + 2B)x^2 + 2ABx + B^2$$

$$\text{得} \begin{cases} 2A = -6 \\ A^2 + 2B = a \\ 2AB = b \\ B^2 = 4 \end{cases}$$

解得 $A = -3, B = \pm 2$

当 $B = -2$ 时，有 $a = 5, b = 12$ ；当 $B = 2$ 时，有 $a = 13, b = -12$

答案：A。

6. 求不等式解集：“根排序法”

【例 7】不等式 $\frac{x^2 - 4x + 3}{x + 5} \leq 0$ 的解集是 ()。

A. $(-\infty, -5) \cup [1, 3]$

B. $(-\infty, -5) \cup (1, 3)$

C. $(-5, 3)$

D. $(-\infty, 8)$

【技巧分析】直接对不等式求解显然很麻烦，我们用“根排序法”会很轻松。

解：对原不等式作同解变形

$$\text{得} \begin{cases} (x-1)(x-3)(x+5) \leq 0 \\ x \neq -5 \end{cases}$$

令 $(x-1)(x-3)(x+5) = 0$ ，有 $x_1 = -5$ ， $x_2 = 1$ ， $x_3 = 3$ ，将 x_1, x_2, x_3 从左到右依大小进行排序，得

$$\begin{array}{ccccccc} & -5 & & +1 & & & +3 \\ & - & & + & & - & + \end{array}$$

由上面的排序可得到答案：不等式的解集是 $(-\infty, -5) \cup [1, 3]$

答案：A。

7. “特值代入法”，准确而又高效的技巧

【例 8】 $C_n^1 + 3C_n^2 + 3^2C_n^3 + \cdots + 3^{n-1}C_n^n$ 的值为 ()。

A. $\frac{1}{3}(4^n - 1)$

B. 4^n

C. 3×4^n

D. $\frac{4^n}{3} - 1$

【技巧分析】本题可用代公式的方法计算出答案，但是，在考场上用“特值代入法”，准确而又高效，可以节省大量的时间。请看下面两种解法，很明显，解法 2 是考生所愿意采纳的方法。

$$\begin{aligned} \text{解法 1: 原式} &= \frac{1}{3}(3C_n^1 + 3^2C_n^2 + 3^3C_n^3 + \cdots + 3^nC_n^n) \\ &= \frac{1}{3}[(3^0C_n^0 + 3C_n^1 + 3^2C_n^2 + \cdots + 3^nC_n^n) - 3^0C_n^0] \\ &= \frac{1}{3}[(1+3)^n - 1] \\ &= \frac{1}{3}(4^n - 1) \end{aligned}$$

答案：A。

解法 2：用 $n=1$ 代入，正如 A 选项，故为正确答案。如果不放心，用 $n=2$ 代入，也成立。即可知，只有 A 选项符合。

答案：A。

【例 9】若 $x = a^2 - bc$ ， $y = b^2 - ac$ ， $z = c^2 - ab$ ， a, b, c 是不完全相等的任意实数，则 x, y, z ()。

A. 至少有一个大于 0

B. 都大于 0

C. 至少有一个小于 0

D. 都不小于 0

【技巧分析】像这种考题，按照规矩的方法，花一些时间可以求出答案。考生可以比较下面两种解题方法，当然解法 1 比较简单，但考生在紧张的状态下不一定想得到，所以用解法 2 是快速而又保险的做法。

解法 1: $x + y + z = a^2 + b^2 + c^2 - ac - bc - ab = \frac{1}{2}[(a-b)^2 + (b-c)^2 + (a-c)^2]$

因为 a, b, c 不完全相等, 所以有

$$x + y + z = \frac{1}{2}[(a-b)^2 + (b-c)^2 + (a-c)^2] > 0$$

x, y, z 中至少有一个大于 0。

答案: A。

解法 2: 不妨令 $a = 0, b = 1, c = 2$, 很快排除 B、D。再令 $a = 1, b = 0, c = -1$, 又排除 C。

只有 A 选项正确。

答案: A。

【例 10】 设 $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, 则 $A^n = (\quad)$ 。

A. $2^n A$

B. $2^{n-1} A$

C. $2^{n-2} A$

D. 0

【技巧分析】 老实地算, 仔细一点能算正确, 否则容易出错, 下面的解法 2 省时又正确, 很简便。在考场上, 考生若善于灵活运用这种“特值代入法”, 定会大有裨益。

解法 1: $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, A^2 = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 4 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{bmatrix} = 2A$

$A^3 = 2A^2 = 2^2 A, \dots, A^n = 2^{n-1} A$, 所以归纳推理出一般规律, 故 B 选项正确。

答案: B。

解法 2: 不妨设 $n = 1$, 很快排除 A、C、D, 直接选择 B, 5 秒钟内得出答案。

答案: B。

【例 11】 设 $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$, 则 $A^n = (\quad)$ 。

A. $\begin{bmatrix} 3^n & 2n3^n & 3n3^n \\ 0 & 3^n & 2n3^n \\ 0 & 0 & 3n \end{bmatrix}$

B. $\begin{bmatrix} 3^n & 2n3^{n-1} & 3n3^{n-1} \\ 0 & 3^n & 2n3^{n-1} \\ 0 & 0 & 3n \end{bmatrix}$

C. $\begin{bmatrix} 3^n & 2n3^{n-1} & 3^n n + 4n(n-1)3^{n-2} \\ 0 & 3^n & 4n3^{n-1} \\ 0 & 0 & 3n \end{bmatrix}$

D. $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

【技巧分析】 像这类题, 在考场上就不要按部就班地计算了, 要知道, 找到 A^n 的规律, 至少要花上 5 分钟, 还不能保证正确率, 用“特值代入法”, 简捷、准确、高效。

解: 令 $n = 1$, 代入 A、B、C 选项, 立即可以排除 A、B, D 不用代入, 直接排除, 10 秒钟内可得出答案, 所以“特值代入法”在特定的情况下是相当有用的。

答案: C。