Banach
空间算子理论

孙玉霖　著

西北大学出版社

Banach 空间算子理论

孙玉霖　著

责任编辑　王进成

封面设计　王　祚

西北大学出版社出版发行

（西安市太白路 1 号）

西北工业大学印刷厂印刷

850×1168 毫米　1/32 开本　10.5 印张　293 千字

1997 年 3 月第 1 版　　1997 年 3 月第 1 次印刷

印数　1—700

ISBN 7-5604-1184-3/O・80

定价：18.00 元

序

随着科学技术的现代化，数学方法的应用也在不断地深入与拓展. 可以毫不夸张地说，数学特别是抽象数学在一门学科中的应用情况，在一定程度上反映着这门科学领域的发展水平. 电脑的发展需要更为深刻的数量逻辑知识作为其基础. 群论在晶体化学与量子论中得到广泛应用，同样，现代粒子物理中的规范场理论则要求更多的拓扑学知识. 作为古典分析数学的高度抽象发展而形成的另一现代数学分支的泛函分析，公认它正式建立于本世纪 20 年代初，其中法国、波兰、匈牙利学派起到了关键作用，苏联、美国等对其以后发展都作出重要贡献. 时至今日，泛函分析已经成为现代数学基础分支之一，它的成果与方法也在许多科学和技术领域得到根本性的应用. 这只须指出计算数学与现代控制论以及量子力学、非平衡统计物理等就已足够. 至今，泛函分析已经成为许多科学技术领域中的基本数学语言之一. 而 Banach 空间中的算子理论乃是近代泛函分析中最活跃发展的一个重要部分. 因此，人们愈来愈感到使有关的大学生、研究生充分熟悉这门数学并学会应用它于一些领域乃是提高学生素质必不可少的一项任务. 本书作者正是适应这一形势，综合国内外许多有关著作的优点并结合他多年丰富教学和科研经验而编著了《Banach 空间算子理论》一书.

这本书对泛函分析学习者既能起到打下坚实基础的作用，又能对学习者起到启发诱导以提高分析能力与解决问题能力的效果. 本书另一特点则是对问题叙述详细，说理透彻，深入浅出，条理清晰，便于自学，而且能使读者尽快地接近这一课题的前沿. 书中还精选了大量的适用面比较宽广的例题，从而可使读者对一些基本概念的来龙去脉有一个更为深入而清楚的了解. 总之，从理

论和应用角度看，这是一本写得比较好且适用范围比较宽，具有一定特色的专著．也许正是由于作者出于要照顾到各种学科、各种不同专业对本门数学的共同要求，更为具体的应用实例似嫌少了一点，但这并不影响它作为应向广大读者推荐的一部优秀著作，对广大工程技术人员、博士研究生、专业教师以及数学工作者亦不失为一本有益的参考书．

王成堂

1997年元月于西安

前　言

本书选材于作者多年来为研究生授课的讲稿，着重讲述 Banach 空间的算子理论，还囊括了泛函分析理论的核心部分，如空间、算子、线性分析的“三大原理”（延拓定理、开映像定理与闭图像定理、共鸣定理）、谱论等. 内容丰实，富有新意，论述严谨，深入浅出，具有启发性，编排颇具特色，把泛函空间与拓扑线性空间结合起来讲解，围绕基本概念和命题作了许多可启迪思维的拓广性的注释，精选出大量有意义的正、反例题，定理的证明常给出几种方法，有一定深度. 本书力图为读者进一步学习近代数学和近代相关学科打下基础，提高读者独立思考问题的兴趣和今后科学研究中的探索能力.

本书可作为大学生、研究生的教材，也可供数学及其应用领域内的科学工作者使用.

王戍堂教授为本书作序并提出了许多宝贵意见，对此深表谢意.

由于作者水平和条件的限制，加之时间仓促，错误和不妥之处在所难免，恳望读者不吝指正.

孙玉霖
1997 年元月

目　录

第一章　有界线性算子

算子是泛函分析中的重要概念之一. 本章将引进几个重要的线性度量空间以及这些空间上的线性算子，以便将要进行的关于 Banach 空间算子的探讨获得更深刻的结果.

§1.1　线性度量空间

我们通过连续性把代数的线性空间结构与度量紧密地结合起来，确切地说，就是

定义 1.1　设 (X,d) 是一个度量空间，X 又是实或复数域 K 上的线性空间. 如果 X 中的线性运算按度量 d 所确定的收敛是连续的，即

(1) 加法运算是连续的：$(x_n),(y_n)\subset X$, $d(x_n,x)\to o$, $d(y_n,y)\to o\Rightarrow d(x_n+y_n,x+y)\to o$ $(n\to\infty)$;

(2) 数乘运算是连续的：$(a_n)\subset K$, $(x_n)\subset X$, $a_n\to\alpha$(在 K 中), $d(x_n,x)\to 0\Rightarrow d(a_nx_n,ax)\to o$ $(n\to\infty)$.

那么我们就称 (x,d) 是一个线性度量空间.

下面拟讨论线性度量空间的重要特款. 这些特款是现代分析中的基本研究领域.

1. (F^*) 型空间

定义 1.2　设 X 是实或复数域 K 上的一个线性空间. 如果实泛函 p：$X\to R$ 满足下列条件：

(1) $p(x) = 0 \Leftrightarrow x = \theta,\ x \in X$;

(2) $p(x+y) \leqslant p(x) + p(y),\ x, y \in X$;

(3) $p(-x) = p(x),\ x \in X$;

(4) $\alpha_n \to \alpha,\ p(x_n - x) \to 0 \Rightarrow p(\alpha_n x_n - \alpha x) \to 0$

$$(n \to \infty),\ \alpha_n,\ \alpha \in K,\ x_n, x \in X.$$

这时，我们称 p 是**准范数**，$p(x)$ 是 x 的准范数，称 X 按准范数 p 是**赋准范线性空间或**（F^*）**型空间**，记为 (X,p) 或简记为 X. 通常记 x 的准范数为 $\|x\|$，记 p 为 $\|\cdot\|$.

注 ①由定义可知 p 总是非负的. 其实，对任一 $x \in X$，由 (2)，(3) 和 (1) 有

$$2p(x) = p(x) + p(-x) \geqslant p(\theta) = 0.$$

从而
$$p(x) \geqslant 0.$$

②由定义可推出，在每个赋准范的线性空间 X 中，准范数 p 决定一个度量 d：

$$d(x,y) = p(x-y),\quad x, y \in X.$$

这时 (X,d) 成为线性度量空间❶ 若点列 $(x_n) \subset X$ 满足 $\lim\limits_{n\to\infty} p(x_n - x) = 0$，则称 (x_n) 依准范数 p 收敛于 x，记为 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$ 或 $x_n \to x\ (n \to \infty)$. 容易看出，在此收敛意义下，$p$ 是连续函数，事实上当 $x_n \to x_0$，则 $p(x_n) = d(x_n, \theta) \to d(x_0, \theta) = p(x_0)$.

③由准范数 p 决定的度量必然满足：

(i) $d(x,y) = p(x-y) = d(x-y, \theta)$.

即度量 d 在平移变换

$$x \to x + z,\quad x, z \in X$$

之下不变：

---

❶ 这是因为：

i) 加法运算是连续的：$d(x_n + y_n,\ x + y) = p((x_n + y_n) - (x - y)) \leqslant p(x_n - x) + p(y_n - y) \to 0$；

ii) 乘法运算是连续的，证明这一点比较复杂、冗长，参看关肇直：《泛函分析讲义》，1958.

$$d(x+z, y+z) = d(x,y).$$

通常把具有这种平移不变性的度量叫做（F）度量.

(ii) $d(x,\theta) = d(-x,\theta)$.

反过来一个线性度量空间的度量 d 如果是（F）度量，且 $d(x,\theta) = d(-x,\theta)$，那么这个度量 d 是由某个准范数 p 决定的. 其实定义 p：

$$p(x) = d(x,\theta)$$

容易验证 p 就是准范数，且 $d(x,y) = p(x-y)$.

2.（B*）型空间

定义 1.3 设 X 是实或复数域 K 上的一个线性空间. 如果实泛函 $\|\cdot\|: X\to R$ 满足下列条件：

(1) $\|\alpha x\| = |\alpha|\cdot\|x\|$，$x\in X, \alpha\in K$；

(2) $\|x+y\| \leqslant \|x\| + \|y\|$，$x,y\in X$(三角不等式)

我们称 $\|\cdot\|$ 是**半范数或拟范数**.

如果半范数 $\|\cdot\|$ 又满足

(3) $\|x\| = 0 \Rightarrow x = \theta$.

便称 $\|\cdot\|$ 是**范数**，$\|x\|$ 是 x 的范数.

若 X 上存在一个范数 $\|\cdot\|$，这时称 X 为**赋范线性空间或（B^*）型空间**，记为 $(x,\|\cdot\|)$ 或简记为 X.

注 ①对于半范数 $\|\cdot\|$ 有

$$\|\theta\| = 0.$$

事实上，$\|\theta\| = \|0\cdot x\| = 0\cdot\|x\| = 0$. 从而对于范数 $\|\cdot\|$ 有

$$\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = \theta.$$

②（半）范数 $\|\cdot\|$ 总是非负的，其实，由（1）和（2）有

$$2\|x\| = \|x\| + \|-x\| \geqslant \|\theta\| = 0,\quad x\in X.$$

③在每个赋（半）范线性空间 X 中，（半）范数 $\|\cdot\|$ 决定一个（半）度量 d：

$$d(x,y) = \| x - y \|, \quad x,y \in X.$$

对于 $x_n \in X$，$n=1, 2, \cdots$，若存在 $x \in X$，使得 x_n 依（半）度量 d 收敛于 x，即

$$\lim_{n\to\infty} \| x_n - x \| = 0,$$

那么称 (x_n) 依（半）范数收敛于 x，仍记做 $\lim x_n \to x (n \to \infty)$.

④（半）范数 $\| \cdot \|$ 是连续函数，即当 $x_n \to x$ $(n\to\infty)$，就有 $\| x_n \| \to \| x \|$ $(n\to\infty)$，事实上由 (2) 得

$$\| x_n \| \leqslant \| x_n - x \| + \| x \|,$$

$$\| x \| \leqslant \| x_n - x \| + \| x \|.$$

从而 $\quad | \| x_n \| - \| x \| | \leqslant \| x_n - x \| \to 0 \quad (n \to \infty).$

⑤若 d 是由（半）范数决定的（半）度量，那么 (X,d) 成为线性（半）度量空间，事实上

(i) 加法运算是连续的：当 $\| x_n - x \| \to 0$，$\| y_n - y \| \to 0$ $(n \to \infty)$，有

$$\| (x_n + y_n) - (x + y) \| \leqslant \| x_n - x \| + \| y_n - y \| \to 0$$
$$(n \to \infty), \quad x_n, y_n, x, y \in X$$

(ii) 数乘运算是连续的：当 $|\alpha_n - \alpha| \to 0$，$\| x_n - x \| \to 0$ $(n \to \infty)$，有

$$\begin{aligned} \| \alpha_n x_n - \alpha x \| &\leqslant \| \alpha_n x_n - \alpha_n x \| + \| \alpha_n x - \alpha x \| \\ &\leqslant |\alpha_n| \| x_n - x \| + |\alpha_n - \alpha| \cdot \| x \|, \end{aligned}$$

由 $(|\alpha_n|)$ 的有界性，立即得知

$$\| \alpha_n x_n - \alpha x \| \to 0 \quad (n \to \infty).$$

由定义及上面证明可知，每个范数是准范数.

⑥一个线性度量空间 (X,d) 的度量 d 是由范数决定的充要条件是 d 满足下列两个条件：

(i) d 是 (F) 度量，即对任意的 x，y，$z \in X$，有

$$d(x,y) = d(x - y, \theta) \qquad 或$$

$$d(x + z, y + z) = d(x,y).$$

(ii) 对任意的 $\alpha\in K$，$x\in X$，有

$$d(\alpha x,\theta)=|\alpha|d(x,\theta).$$

事实上，充分性显然；必要性，$\|x\|\triangleq d(x,\theta)$ 就是 x 的范数. 这时 $d(x,y)=\|x-y\|$. 因此上面两个条件也是一个线性度量空间成为（B^*）型空间的充要条件.

3. （B_0^*）型空间

定义 1.4 设 X 是实或复数域 K 上的一个线性空间，$\|\cdot\|_n$ $(n=1, 2, \cdots)$ 是 X 上的半范数，如果 $\|\cdot\|: X\to R$ 满足下列条件：

（1）$\|\cdot\|$ 是如下定义的准范数

$$\|x\|\triangleq\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}\frac{\|x\|_n}{1+\|x\|_n},\quad x\in X.$$

（2）当 $\|x\|_n=0$，$n=1, 2, \cdots$. 即 $\|x\|=0\Rightarrow x=\theta$.

我们称 $\|\cdot\|$ 是（B_0）**型准范数**，赋（B_0）型准范数的线性空间 X 叫做（B_0^*）**型空间**.

不难证明，在（B_0^*）型空间 X 中，依（B_0）型准范数 $\|\cdot\|$ 的收敛等价于同时依可列无穷多个半范数 $\|\cdot\|_n$ 收敛.

事实上，如果

$$\|f_k-g\|=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}\frac{\|f_k-g\|_n}{1+\|f_k-g\|_n}\to\quad(k\to\infty),$$

那么，对每一个 n，由 $\dfrac{\|f_k-g\|_n}{1+\|f_k-g\|_n}\leqslant 2^n\|f_k-g\|\to 0$ $(k\to\infty)$. 可知对于任意给定的 $\varepsilon>0$，不妨设 $0<\varepsilon<1$，存在自然数 N，使得当 $k>N$ 时，有

$$\frac{\|f_k-g\|_n}{1+\|f_k-g\|_n}<\varepsilon=\frac{\dfrac{\varepsilon}{1-\varepsilon}}{1+\dfrac{\varepsilon}{1-\varepsilon}}.$$

因为在实数区间 $[0,\infty)$ 上的函数

$$\varphi(\tau) = \frac{\tau}{1+\tau}$$

是严格单调增函数，从而有

$$\| f_k - g \|_n < \frac{\varepsilon}{1-\varepsilon}, \qquad n = 1, 2, \cdots.$$

这说明对每个 $n=1, 2, \cdots$，当 $k \to \infty$ 时 $\| f_k - g \|_n \to 0$，即 $\{f_k\} \subset X$ 同时依可列无穷多个半范数 $\| \cdot \|_n$ 收敛于 g.

反过来，如果对每个 $n=1, 2, \cdots$. $\| f_k - g \|_n \to 0\ (k \to \infty)$. 对任意给的正数 ε，先取自然数 N 充分大，使得

$$\sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{1}{2^n} < \frac{\varepsilon}{2}.$$

由已知条件，而对每个 $n=1, 2, \cdots, N$，存在着自然数 M_n，使得当 $k > M_n$ 时成立着 $\| f_k - g \|_n < \frac{\varepsilon}{2}$.

取自然数 $M = \max\{M_1, M_2, \cdots, M_N\}$，则当 $k > M$ 时

$$\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{2^n} \cdot \frac{\| f_k - g \|_n}{1 + \| f_k - g \|_n} < \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{2^n} \frac{\frac{\varepsilon}{2}}{1 + \frac{\varepsilon}{2}} < \frac{\varepsilon}{2}.$$

从而当 $k > M$ 时，有

$$\begin{aligned} \| f_k - g \| &= \Big(\sum_{n=1}^{N} + \sum_{n=N+1}^{\infty} \Big) \frac{1}{2^n} \cdot \frac{\| f_k - g \|_n}{1 + \| f_k - g \|_n} \\ &\leqslant \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{2^n} \cdot \frac{\| f_k - g \|_n}{1 + \| f_k - g \|_n} + \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{1}{2^n} < \varepsilon. \end{aligned}$$

这就证明了 $\| f_k - g \| \to 0\ (k \to \infty)$，即 $\{f_k\} \subset X$ 依 (B_0) 型准范数 $\| \cdot \|$ 收敛于 g.

4. p-(B^*) 型空间

定义 1.5 设 X 是实或复数域 K 上的一个线性空间，如果实泛函 $\| \cdot \| : X \to R$ 对于实数 $p > 0$ 满足下列条件：

(1) $\| \alpha x \| = |\alpha|^p \| x \|, \quad x \in X, \alpha \in K$；

(2) $\|x+y\| \leqslant \|x\| + \|y\|$, $x,y \in X$(三角不等式).
则称 $\|\cdot\|$ 是 p-半范数或 p-拟范数，$\|x\|$ 是 x 的 p-半范数或 p-拟范数.

如果 p-半范数 $\|\cdot\|$ 又满足

(3) $\|x\|=0 \Rightarrow x=\theta$,

便称 $\|\cdot\|$ 是 **p-范数**，$\|x\|$ 是 x 的 p-范数.

若 X 上存在一个 p-(半) 范数 $\|\cdot\|$，这时称 X 为 p-(半) 赋范线性空间，记为 $(X,\|\cdot\|,p)$ 或简记为 X，特别 p-赋范线性空间有时称为 p-(B^*) 型空间. 1-(半) 范数就是 (半) 范数，1-(B^*) 型空间就是(B^*) 型 空间.

定义 1.6 完备的 (F^*) 型空间称为 **(F) 型空间**或 **Frechet 空间**. 完备的 (B^*) 型空间称为 **(B) 型空间**或 **Banach 空间**[1]. 完备的 (B_0^*) 型空间称为 **(B_0) 型空间**.

5. 一致凸 (*B*) 型空间

定义 1.7 设 $(X,\|\cdot\|)$ 是(B^*) 型空间，如果对于单位球面 $S_X \triangleq \{x \in X \mid \|x\| = 1\}$ 上的任何两个满足条件 $\lim\limits_n \|x_n + y_n\| = 2$ 的点列 $\{x_n\}$、$\{y_n\}$ 都有

$$\lim_n \|x_n - y_n\| = 0,$$

那么称 $(X,\|\cdot\|)$ 是**一致凸 (B^*) 型空间**. 完备的一致凸 (B^*) 型空间称为**一致凸 (B) 型空间**.

注 (B^*)型空间 $(X,\|\cdot\|)$ 是一致凸的充分必要条件为，对于任意的数 $\varepsilon \in (0,2)$ 存在一个数 $\eta(\varepsilon) \in (0,1)$，使得当 $x,y \in S_X$，$\|x-y\| > \varepsilon$ 时，有

$$\|x+y\| < 2(1-\eta(\varepsilon)).$$

证明留给读者.

---

[1] 这分别是为了纪念首先提出这个概念的法国数学家 Maurice Frechet 和波兰数学家 S. Banach.

前面已说过一个线性度量空间成为 (B^*) 型或 (F^*) 型空间的必要条件是它的度量是 (F) 度量. 因此自然地会提出如下的问题：一个线性度量空间是否一定可以改赋一个新度量，使得新度量是 (F) 度量且与原度量等价，这个问题的答案是肯定的. 可以证明，对于任意线性度量空间 (X,d)，可改赋一个等价的 (F) 度量 d_1，即

$$d_1(x_n,x)\to 0\Leftrightarrow d(x_n,x)\to 0\ (n\to\infty),$$

而且
$$d_1(x+z,y+z)=d_1(x,y).$$

下面举一些关于上述几种类型空间的例子.

例 1 在 n 维线性空间 R^n 中，对于 $x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$，令

$$\|x\|=(\sum_{i=1}^{\infty}|x_i|^2)^{\frac{1}{2}},$$

$$\|x\|_1=\max_{1\leqslant i\leqslant n}|x_i|,$$

$$\|x\|_2=\sum_{i=1}^{n}|x_i|.$$

显然 $\|\cdot\|$，$\|\cdot\|_1$ 和 $\|\cdot\|_2$ 都是范数，特别称 $\|\cdot\|$ 为 Euclid 范数. 从而 $(R^n,\|\cdot\|)$，$(R^n,\|\cdot\|_1)$ 和 $(R^n,\|\cdot\|_2)$ 都是 (B^*) 型空间. 通常记 $(R^n,\|\cdot\|)$ 仍为 R^n，并称做 n 维 Euclid 空间❶.

例 2 集合 $C[a,b]$ 按函数通常的线性运算成为线性空间，令

$$\|x\|=\max_{t\in[a,b]}|x(t)|.$$

$C[a,b]$ 按范数 $\|\cdot\|$ 成为 (B^*) 空间.

这里的 $\|x\|$ 其所以有定义，只是因为 $[a,b]$ 是紧空间. 所以我们可将 $C[a,b]$ 予以拓广. 设 Ω 是任一紧度量空间，$C(\Omega)$ 表示定义在 Ω 上的一切连续（实或复值）函数全体. 按通常函数的

---

❶ 以后会知道，有限维线性空间上的任意两个范数等价，故 $(R^n,\|\cdot\|)$，$(R^n,\|\cdot\|_1)$ 及 $(R^n,\|\cdot\|_2)$ 可以看作同一 (B^*) 型空间，都称做 n 维 Euclid 空间 R^n.

线性运算，$C(\Omega)$ 成为线性空间. 那么

$$\|x\| = \max_{t\in\Omega}|x(t)|$$

在 $C(\Omega)$ 上规定了一个范数 $\|\cdot\|$，$C(\Omega)$ 按 $\|\cdot\|$ 成为 (B^*) 型空间.

例 3 在 (c) 空间（收敛数列的全体按数列通常的线性运算构成的线性空间）上令

$$\|x\| = \max_{n\geqslant 1}|\xi_n|, \quad x = (\xi_n), \quad n = 1,2,\cdots.$$

(c) 空间按范数 $\|\cdot\|$ 成为 (B^*) 型空间.

例 3 是例 2 的特款，实际上在例 2 中取 $\Omega = (1,\frac{1}{2},\frac{1}{3},\cdots,\frac{1}{n},\cdots,0)$，这是数直线上的紧子空间，定义函数 $x(\frac{1}{n}) = \xi_n$，$x(0) = \xi_0$，于是

$$x \in C(\Omega) \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty}x(\frac{1}{n}) = \lim_{n\to\infty}\xi_n = \xi_0.$$

$$\|x\| = \max_{t\in\Omega}|x(t)| = \max_{n\geqslant 1}|\xi_n|.$$

即这时 $C(\Omega)$ 是一切收敛数列的全体构成的线性空间，从而 $C(\Omega) \equiv (c)$.

例 4 设 $(X,\mathscr{R},\mu)$ 是测度空间，Ω 是可测集，且 $\mu(\Omega)<\infty$，S 是 Ω 上一切几乎处处有限的实或复值可测函数的全体，在 Ω 上几乎处处相等的函数看成 S 中同一元，按函数通常的线性运算 S 成为线性空间. 令

$$\|x\| = \int_\Omega \frac{|x(t)|}{1+|x(t)|}\mathrm{d}\mu. \quad x \in S.$$

由于在实数区间 $[0,\infty)$ 上的函数

$$\varphi(\tau) = \frac{\tau}{1+\tau}$$

是单调增函数，从而对任意数 a，b 有

$$\frac{|a+b|}{1+|a+b|} \leqslant \frac{|a|+|b|}{1+|a|+|b|}$$

$$= \frac{|a|}{1+|a|+|b|} + \frac{|b|}{1+|a|+|b|}$$

$$\leqslant \frac{|a|}{1+|a|} + \frac{|b|}{1+|b|}.$$

利用这个等式不难证 $\|\cdot\|$ 是 S 上的一个准范数，于是 S 按 $\|\cdot\|$ 是 (F^{*}) 型空间. 准范数 $\|\cdot\|$ 决定一个度量 d

$$d(x,y) = \|x-y\| = \int_{\Omega} \frac{|x(t)-y(t)|}{1+|x(t)-y(t)|} \mathrm{d}\mu.$$

μ 依此度量成为线性度量空间 (S,d).

现在证明空间 (S,d) 中的收敛等价于测度收敛，即

$d(x_n,x) = \|x_n - x\| \to 0 \Leftrightarrow$ 函数列 (x_n) 依测度收敛于 x.

其实，如果 $(x_n) \subset S(n=1,2,\cdots)$ 收敛于 $x \in S$，即 $d(x_n,x) \to 0$ $(n\to\infty)$，由于对任意给定的 $\sigma>0$，有

$$d(x_n,x) = \int_{\Omega} \frac{|x_n(t)-x(t)|}{1+|x_n(t)-x(t)|} \mathrm{d}\mu$$

$$\geqslant \int_{\Omega(|x_n-x|\geqslant\sigma)} \frac{|x_n(t)-x(t)|}{1+|x_n(t)-x(t)|} \mathrm{d}\mu$$

$$\geqslant \frac{\sigma}{1+\sigma} \mu\,(\Omega|x_n-x| \geqslant \sigma)).$$

令 $n\to\infty$，便得 $\mu(\Omega|x_n-x|\geqslant\sigma))\to 0$，即 (x_n) 依测度收敛于 x.

反之，如果 $(x_n) \subset S$ 依测度收敛于 $x \in S$，由于 $\frac{|x_n(t)-x(t)|}{1+|x_n(t)-x(t)|} \leqslant 1$ 及 $\mu(\Omega)<\infty$，故对任给的 $\sigma>0$ 有

$$d(x_n,x) = \int_{\Omega} \frac{|x_n(t)-x(t)|}{1+|x_n(t)-x(t)|} \mathrm{d}\mu$$

$$= \int_{\Omega(|x_n-x|<\sigma)} \frac{|x_n(t)-x(t)|}{1+|x_n(t)-x(t)|} \mathrm{d}\mu$$

$$+ \int_{\Omega(|x_n-x|\geqslant\sigma)} \frac{|x_n(t)-x(t)|}{1+|x_n(t)-x(t)|} \mathrm{d}\mu$$

$$\leqslant \frac{\sigma}{1+\sigma}\mu[\Omega(|x_n-x|<\sigma)] + \mu[\Omega|x_n-x|\geqslant\sigma)].$$