科學圖書大庫

線型代數入門

譯者 楊紹基

徐氏基金會出版

科學圖書大庫

線型代數入門

譯者 楊紹基

徐氏基金會出版

徐氏基金會科學圖書編譯委員會

監修人　徐銘信　發行人　王洪鎧

科學圖書大庫

中華民國六十八年三月二十二日再版

線型代數入門

基本定價　1.80

譯者　楊紹基　日本東京工業大學理工學院

經營工程學研究

(67)局版臺業字第1810號

出版者　財團法人 臺北市徐氏基金會　臺北市郵政信箱53-2號　電話 7813686 7815250號

發行者　財團法人 臺北市徐氏基金會　郵政劃撥賬戶第15795號

承印者　大興圖書印製有限公司　三重市三和路四段一五一號　電話9719739

原　序

坊間所見線型代數或者LP這一類的書爲數甚夥。淺學如筆者猶不自量力，希望以拙劣之作濫竽斯界，其無插足之餘地者自屬意料中事。然筆者終於不揣冒昧敢於執筆者，實因受日刊工業新聞社北川茂久一氏之託。氏以爲數學書籍必欲能做到：「讀者可不必蹙額皺眉，別無紙筆之需，以閒逸心情當作寢前讀物，使人有一卷在手悠然自得之樂。」方屬當意。事實上祇要多少是出以一種研求學問的態度，討論線型代數或LP（線型規劃），勢須要求讀者能具有相當程度的預備知識，否則，所成之書必爲數百頁乃至數千頁的大部頭，令人望而生畏。再不然，如對篇幅有所限制，則對讀者的預備知識必得先作假定。信如其言，則對於數學方面的知識，將永遠無法做到舉手可得的地步，而事實上，可以讓讀者輕鬆舒卷的此類書籍，眞也可以說是百不一見。

本書有鑑於此，所以就毅然捨去一般做學問的態度，將一部線型代數與LP的書，用雜談的和直觀的方式予以寫出。因此，在數學方面多少已經知道一點的人，也許就不太想再讀像這樣的一本書。但對於數學這門學問，遠在學生時代好像並不是一位可以親近的朋友，有這種感覺而又對線型代數或LP又有幾分興趣的人。還有一種多少想知道一點LP內容，而苦於數學太過艱深難以領悟。對有這些情形的讀者來說，本書當可略盡緜薄願爲效勞。爲此，讀者在展閱本書時，就不必像讀一般之數學書時，抱持著那種誠惶誠恐的感覺，務請放鬆情緒，隨便展閱。如果能讓讀者覺得：“呵呵！原來是這樣的嗎？”或者能令讀者興“若有所悟”之感。這樣，可以說已充分達成筆者的願望了。

使筆者受到鼓勵和指教的各位先生、學界先進，以及友人實已數不勝數，本應列舉芳名聊誌謝悃，但鑑於本書前述之特有性質不得不予作罷。惟現任教於早稻田大學生產研究所，爲筆者直接受業的恩師，日本OR的先驅學者松田正一教授，筆者自受LP以始，得先生之教誨至深且鉅，而本書之能與讀者見面，實亦拜受先生之賜，筆者願於此表示衷心的感謝。又，在本書執筆中，驚聞早稻田大學第一理工學院數學系主任，曾作筆者指導教授六年的西垣久實先生仙逝，筆者亦願借此一角，爲先生之冥福祈禱。

1962 年晚秋

五百井清右衞門

譯者小言

第二次世界大戰以來，科學與工藝方面的進步，眞可說是一日千里之勢。若干在戰時發展出來的新方法新技術，戰後不旋踵間已擴展到企業經營及管理技術方面，其中最主要的一支，即所謂線型規劃 (Linear Programming)。線型規劃的主要功能是將企業界所遭遇之實際問題，在線型不等式的制約條件下，求解目標函數中之最小成本或最大利潤，這是實用科學上一門很重要的工具學問，而其理論基礎就是「線型代數」。

這本書與其他同類書籍有一個很大不同之處，書中不採取一般數學書籍嚴肅編排的方式，儘量出之以漫談及詼諧口吻，以引起讀者的興趣，用深入淺出的筆調來說明線型代數的理論基礎，讀者倘能與其他此類書籍同時閱讀，當可收相輔相成之效。

本書的另一特點，就是其著眼點似乎在說明線型規劃的數學基礎。故本書內容卽按此一目的編排，而最後以簡化法及二元同解問題之實例求解作爲結束。讀者如因閱讀本書而引起對線型代數的興趣，進而埋首鑽研此一方面的專門著述，尤爲譯者所企盼。

我國經濟發展目前正處在加速成長的階段，如欲縮小與先進國家間的管理差距，則必須要從經營管理及其他各方面能迎頭趕上，深願這本書能提高大家對線型規劃的興趣，俾能進一步應用於各類實際問題之中。

徐氏基金會給我翻譯這本書的機會，譯者衷心表示謝意。又譯者的長官台糖公司董事長湯元吉先生多方給我鼓勵，承蒙吳英格先生於百忙中抽暇爲我校閱，指正誤謬，謹此一併深致謝忱。

譯者學識淺陋，兼以這是初次嘗試，在數學與文字兩方面，書中可能都有不妥之處，希望各位讀者，海內專家先進賜予指正，不勝感幸。

楊　紹　基

五十九年四月二十五日

目　錄

第一章　寫在卷首

○ 怪異小說作家的突告消失
○ 四次元的世界
○ 談談座標
○ 點與向量

§1.　如果說世上眞有所謂「不可思議」的事，則無過於一個正在眼前的人，頃刻之間突告消失一事之兀突驚奇的了，此稱之爲「不可思議」，眞可當之而無愧。美國怪異小說作家「安勃洛兹，皮亞斯」，可以說是顯示出這一不可思議奇蹟的代表者。1913 年在墨西哥某處洞窟中，他竟突然消失得無影無踪。對於這一事實，許多人曾提出各種不同的解釋來加以說明，其中之一，認爲「安勃洛兹，皮亞斯」是被一個不知爲何物的外力，或者是某種精靈鬼怪將他帶到四次元世界，以致他的形體突告消失。讀者也許要追問，到底四次元世界是怎樣的一個世界，皮亞斯失踪之前，所謂四次元世界眞的已有此存在嗎？

人類現在居住著的世界是由前後，左右，上下三個方向所擴展而成的，普通我們稱之爲三次元空間。既然稱之爲四次元空間那末前後，左右，上下之外，必然還有一個屬於第四的方向存在，但是一個平常人的感覺，是無法覺察出這樣一個第四方向的，假使因爲你認爲無法覺察，就確定它不存在，當然也無話可說，在此，我們不妨利用我們所特具的想像力加以推想。

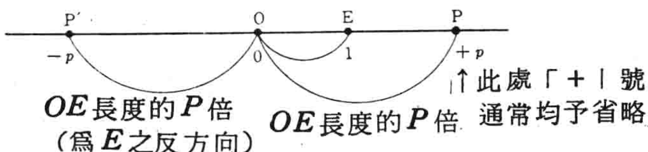
你可以試作想像，現在有某種生物它不能辨識上下的方向，就這種生物而言，正如同我們之不能理解四次元世界者然。再假如有此種生物二頭，並列於同一平面，則在此二生物之間必能確切地認識相互間的存在，此時，如將其中之一抓起，使之離開同一平面，那末在留於原來位置之生物眼中，其同伴豈非突告消失無踪，因爲當另一頭生物，被外力帶至它不能覺察之上方時，就無從確定它的存在了。

皮亞斯被外力帶至四次元空間的解釋，你可以假想，我們就是前例中的假想生物，再將自己看作四次元空間中的「外力」，逐次升高空間所具之方向，平面是二次元的世界，空間是三次元的世界，以這種平面與空間的關係爲基礎，在感覺上加以逐次類推，當是一種極爲有趣的假想。在四次元的世

界裡，你可以不必把網球切開而將網球翻過一個面，如果有人能踏入四次元的世界，那末這個人就能夠從密閉室中隨意地進進出出，也不是一件不可思議的事。

像這樣，從各方面加以想像固然是件極爲有趣的事，這且暫擱一邊，那些趣味方面的話題留待小說家去加以發揮。我們的目的是要站在數學的立場，從四次元世界進到五次元世界，而六次元或是更高次元的世界，並加以觀察和想像。

§2. 爲便於說明，且先從一次元世界加以說明，茲有一直線如第 1-1 圖所示：



第 1 - 1 圖

直線上的一點定爲0，另一點定爲E。設0點之值爲0，E點之值爲1。設有直線上任意之一點P，其長度卽自0至P間長度之計算乃以0 E爲單位而以其倍數表示之。點P如與E在同一方向則P值之前應加一「＋」號，反之則加一「－」號。因此直線上祇要有一點予以指定，同時，此點卽附有一數值；反過來講，數值如果先予指定，則在直線上必可找到與此值相對應之點。由此可知要表示直線上某點之位置不需指明在「此處」，祇須將0與E的位置點明，用0 E此一單位長度來表示各點的位置。

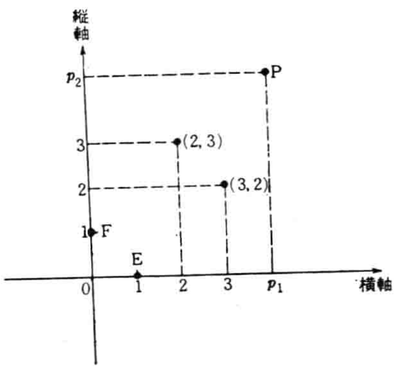
從這一個概念加以引伸，所謂數值就是點的「坐標」。直線上的點僅需一個數加以表示，故直線是一次元空間。測計長度的基準點「0」及點「E」則分別稱爲「原點」，「單位點」。

現在試設想有成直角相交的二直線，相交於點0此爲原點，橫軸及縱軸點上各取單位點E，F。如將0 E之長度使與0 F之長度相等則在說明上將更爲方便。各直線用前述之方法使點與數值相結合，這樣所作成之兩條直線，稱爲「坐標軸」，橫線稱爲「橫軸」，垂直線稱爲「縱軸」，像這樣設定兩坐標軸後，在此二直線所劃定之平面上，所有各點之位置卽如第 1-2 圖所

示。各點均可由縱軸橫軸成為一組的二個數字予以決定，此處須注意者如（2，3）與（3，2）其位置並非在同一點上。

對於坐標數值的讀法，慣例是先讀出橫軸數值，其次即為縱軸數值，此橫軸縱軸數值成為一組，在平面上的點正好由此兩數值之交點所形成。某點 P 如由成對的二數（P_1，P_2）所表示，則此二數稱為 P 點的「坐標」。

如上所述，平面上的點是由二個一組的數來表示，故平面是二次元空間。



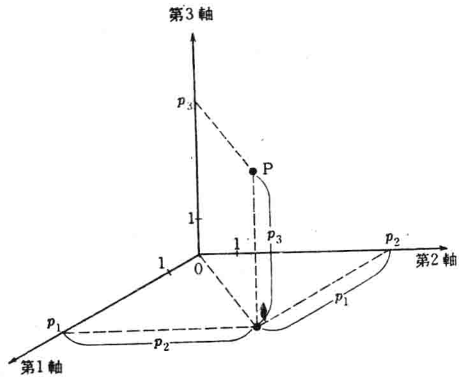
第 1-2 圖

其次，試取空間中的一點0 ，在此原點上有相互成直角的三條直線，每一直線以前述之方法定其單位點，再就直線上之點與數相結合，將此等直線視作坐標軸，依次稱作第一坐標軸，第二坐標軸，第三坐標軸。空間中的一點 P 如第 1-3 圖，由三個數值所成之數組所表示。當然，此三個數值與坐標軸編號順序必須排列一致，像這樣的數組，是由三個數值依序成為一組者，空間之點即由此三數值之數組所決定。點 P 即由（P_1，P_2，P_3）一組數值所表示此（P_1，P_2，P_3）稱為 P 點的坐標。

空間的點，係由三個數組按序成為一組的數組所表達，根據此一事實故可知空間者實為一「三次元空間」。本書此後將討論到各種次元的空間，至一般所簡單稱之為空間的我們這個世界，則特別冠上一個形容詞，稱為「三次元」。

§3.　逐漸的我們已將話題引到四次元的世界，四次元世界誰也不曾

見到過，當然也無法繪出其具體圖形，不過我們可以從已經討論過的一次元，二次元，三次元空間的性質，作爲基礎而進入四次元空間。在前面二節中我們以直覺來類推及想像四次元世界。現在我們將以「曾作記述的事實」爲基礎作同樣的類推思考。



第 1 - 3 圖

一次元空間的點以一個數表示之。二次元空間的點必須由二個數，且以一有序之數組來表示。三次元空間的點是由三個數，且以一有序之數組來表示。以上是我們目前所已知之事實。如果應用類推的方法，則四次元空間中的一點應該是以四個數值而爲有序的一個數組所表達。如此一個從未見過的四次元空間中的一點，可由現在已知的事實用類推的方法加以確定。

簡單地說，一次元，二次元，三次元空間中的點既然可以這樣加以確定所以四次元空間中的點也應該可以用同樣的方法予以確定，更進一步地說，不問四次元空間是否眞有其存在，但無可避免地可得出以下的結果：

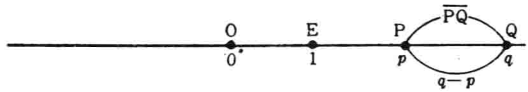
「由四個數值有序的數組以表示出點的存在。各點的集合卽成四次元空間」。

用這樣的方法豈僅四次元，五次元，六次元乃至 n 次元空間也可以成立。換言之，由五個數值組成的有序數組，就可以確定五次元空間中的一點。由 n 個數值組成的有序數組則可以確定 n 次元空間中的一點。

如上所述，四次元空間是由四個數值組成的有序數組表示出點的存在，衆多點的集合而成爲四次元空間。至此，我們對於四次元空間的性質如何尙

未有所述及，譬如：四次元空間中的二點P，Q間之距離如何還未加以探究。我們所描述的四次元空間的概念，只能說是一張未經繪圖的空白畫紙，當然還得在畫紙中畫上些什麼。進一步的問題，是那些可以畫得上去，如果描繪出來的圖畫與周圍情況脫節那就不會合適，如果結婚禮堂當中懸上一幅猿猴的畫，這就與禮堂的氣氛不相調和，因此，在給四次元空間畫上圖畫之前，對於自己所處的環境應該有所瞭解。

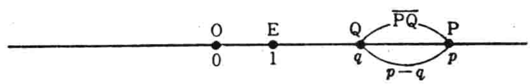
一次元空間（就是直線）上的二點，P，Q間之距離是以二點的坐標p與q的差數來表示。例如，下圖中點$P(p)$與$Q(q)$間之距離$\overline{PQ}$圖示之如下：



第 1-4 圖

$$\overline{PQ}=q-p \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

如果P在Q的右方，則$\overline{PQ}$的距離如下圖：



第 1-5 圖

$$\overline{PQ}=p-q \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

P，Q因位置之不同而距離之計算式亦異，其故在於距離之數值必須限爲「正值」，惟P，Q因位置不同使計算式有所差異在觀念上難免感到不便，如能改成下列數式：

$$\overline{PQ}=\sqrt{(p-q)^2} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots(3)$$

則(1)，(2)兩式，可由(3)式表示之。

P與Q兩者間之距離即爲p與q之差，若以絕對值表示可寫作下列數式：

$$\overline{PQ}=|p-q|$$

即　$$|p-q|=\sqrt{(p-q)^2}\quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(4)$$

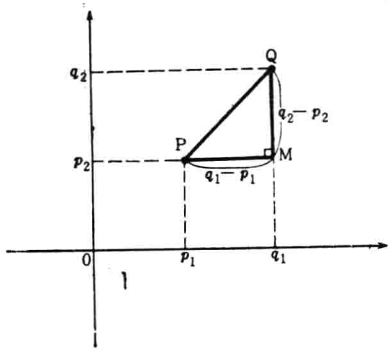
本來，PQ 間之距離以使用(3)式較合於理論。

其次，討論二次元空間。

平面上二點的距離，$P(p_1, p_2)$，$Q(q_1, q_2)$ 其距離 $\overline{PQ}$ 可作成補助圖形，如第 1-6 圖之直角三角形 PQM，然後應用畢氏定理：

$$\overline{PQ}^2=(q_1-p_1)^2+(q_2+p_2)^2$$

得解爲：$$\overline{PQ}=\sqrt{(q_1-p_1)^2+(q_2^2-p_2)^2}\quad\cdots\cdots\cdots(5)$$



第 1-6 圖

其次，討論三次元空間。2 點 $P(p_1, p_2, p_3)$，$Q(q_1, q_2, q_3)$ 點間之距離 $\overline{PQ}$，可在下圖中依畢氏定理求解如下：

先在直角三角形 $P'Q'M$ 中求出 $\overline{P'Q'}$ 之長度：

$$\overline{P'Q'}=(q_1-p_1)^2+(q_2-p_2)^2$$

因　$\overline{P'Q'}=\overline{PQ''}$

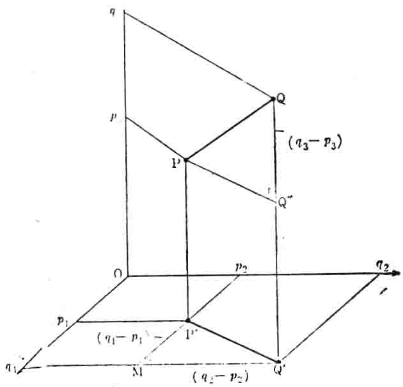
在直角三角形 PQQ'' 中依畢氏定理求得：

$$\overline{PQ}^2=\overline{PQ''}^2+(q_3-p_3)^2$$
$$=(q_1-p_1)^2+(q_2-p_2)^2+(q_3-p_3)^2$$

解之，得：

$$\overline{PQ}=\sqrt{(q_1-p_1)^2+(q_2-p_2)^2+(q_3-p_3)^2}\quad\cdots\cdots\cdots\cdots(6)$$

從上面說明的引導，現在且討論四次元空間內的 2 點 $P(p_1, p_2, p_3, p_4)$ 和 $Q(q_1, q_2, q_3, q_4)$ 之距離，以上敍述對四次元空間以前之環境，已極爲清楚，依此再向前推進一步，即可求得解答。我們目前的情況是：



第 1 - 7 圖

一次元空間。 $\overline{PQ}=\sqrt{(q-p)^2}$ (3)

二次元空間。 $\overline{PQ}=\sqrt{(q_1-p_1)^2+(q_2-p_2)^2}$ (5)

三次元空間。 $\overline{PQ}=\sqrt{(q_1-p_1)^2+(q_2-p_2)^2+(q_3-p_3)^2}$ (6)

由這一事實可推演而得四次元空間中之長度為：

$$\overline{PQ}=\sqrt{(q_1-p_1)^2+(q_2-p_2)^2+(q_3-p_3)^2+(q_4-p_4)^2} \quad (7)$$

此一結論當可為讀者所接受，因為在形式上並無不合理之處，雖則，我們中之任何人都未見過四次元空間，但對於四次元空間中 P，Q 兩點間之距離公式，其正確性當屬無可置疑。

$$\overline{PQ}=\sqrt{(q_1-p_1)^2+(q_2-p_2)^2+(q_3-p_3)^2+(q_4-p_4)^2} \cdots (7)$$

說明至此，原先是一幅白紙的四次元空間，現已畫出距離公式(7)的圖畫。反過來說當未曾繪出這一公式之前，四次元空間原祇是朦朧一片，由四個數值的數組指示出點之存在，然後由點的集合成為空間。而今，因距離公式的出現，使四次元空間充滿光輝並且有實體存在的感覺。

由(3)(5)(6)各式最後完成為公式(7)，用此同一方法擴展為 5 次元，6 次元乃至 n 次元的空間距離公式，亦可由此類推而得。

五次元空間 PQ 兩點間之距離爲：

$$\overline{PQ}=\sqrt{(q_1-p_1)^2+(q_2-p_2)^2+(q_3-p_3)^2+(q_4+p_4)^2+(q_5-p_5)^2} \quad \cdots\cdots(8)$$

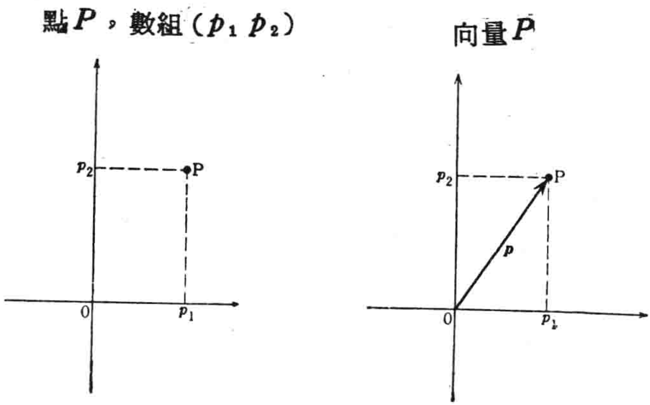
6 次元空間 2 點 $P(p_1,p_2,p_3,p_4,p_5,p_6)$，$Q(q_1,q_2,q_3,q_4,q_5,q_6)$。則 PQ 兩點之距離爲：

$$\overline{PQ}=\sqrt{(q_1-p_1)^2+(q_2-p_2)^2+(q_3-p_3)^2+(q_4-p_4)^2+(q_5-p_5)^2+(q_6-p_6)^2} \quad \cdots\cdots\cdots(9)$$

n 次元空間之 2 點 $P(p_1,p_2\cdots\cdots p_n)$，$Q(q_1,q_2\cdots\cdots q_n)$，可推得其距離爲：

$$\overline{PQ}=\sqrt{(q_1-p_1)^2+(q_2-p_2)^2+\cdots\cdots+(q_n-p_n)^2} \quad \cdots\cdots\cdots(10)$$

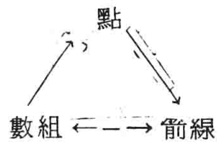
以上，從(3)，(5)，(6)各式而達到(7)，(8)，(9)，(10)各式，我們對四次元以上的未知世界，賦予某種性質，上例中此項性質卽爲距離。此時値得注意的，卽對距離的闡述，是將已知世界的距離性質，加以形式上的沿襲，作爲此種推理之基礎的思考方法，卽所謂形式不變原理，在研究數學領域裡對於此種原理的運用甚爲重要，俗語有所謂「舊瓶裝新酒」，而「形式不變原理」則可稱作「舊形式裡裝上新的內容」。我們在討論距離時曾採取一項規則，卽以「坐標之差予以平方而後相加」。此種形式在三次元以下的空間果然適用，在四次元以上空間中之距離計算，也同樣可以適用。



第 1-8 圖

且說，不論是幾次元的空間，我們已知，凡在此空間中之點與數組，均可作極爲完整的結合，現在且讓我們在點與數組之外，對決定空間的另一要素

加以考察。試以2次元空間爲例，對點P而言則有數組（P_1，P_2），作成如左下方之圖形，現在從原點0出發向點P作一箭線，試就右下方之圖形加以考察，就各點言剛好畫出一條箭線。反之，自原點出發作一條任意箭線，則箭線終點的點卽告確定一點，同時此點的數組亦卽告確定。因此，我們可以得到一個概念：點，數組，和箭線三者構成爲一個體系，其間並無矛盾或不合邏輯之處。

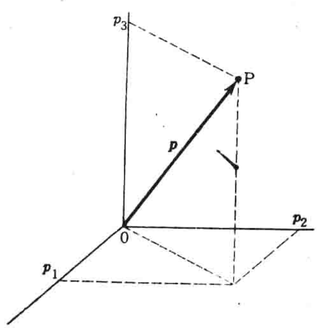


此一箭線稱爲「向量」，以英文字母之重體字$\boldsymbol{P}$表示之。而此$\boldsymbol{P}$之終點爲點P（p_1，p_2）時，則寫作：

$$\boldsymbol{P}=(p_1, p_2)$$

至於有關向量的說明容在後章詳述。

三次元的向量，圖示之如下：



第1-9圖

四次元以上之空間，其向量雖然無法用圖形予以具體繪出，但讀者不妨運用類似推理得之。