普通高等教育“十一五”国家级规划教材

经济管理数学基础

孙毅　张旭利　刘静　编著

# 微积分习题课教程（上册）

（第2版）

清华大学出版社

普通高等教育"十一五"国家级规划教材

经济管理数学基础

孙毅　张旭利　刘静　编著

# 微积分习题课教程（上册）

（第2版）

清华大学出版社
北　京

## 内 容 简 介

本书是普通高等教育“十一五”国家级规划教材，是《微积分》（上、下册）（李辉来，孙毅等编著，清华大学出版社，2005）的配套习题课教材．本书分上、下册，上册内容包括函数、极限与连续、导数与微分、微分中值定理与导数应用、不定积分、定积分及其应用．下册内容包括向量代数与空间解析几何、多元函数微分学、重积分、无穷级数、微分方程和差分方程．

本书上册仍按《微积分（上册）》分为6章，各章首先概括主要内容和教学要求，继之进行例题选讲、疑难问题解答，有的章节还进行了常见错误类型分析，最后给出练习题、综合练习题及其参考答案与提示．

与主教材《微积分》（上、下册）配套的除了《微积分习题课教程》（上、下册）外，还有《微积分教师用书》（习题解答）和供课堂教学使用的《微积分电子教案》．

本书可作为高等学校经济、管理、金融及相关专业微积分课程的习题课教材或教学参考书．



**图书在版编目（CIP）数据**

微积分习题课教程．上册/孙毅，张旭利，刘静编著．--2版．--北京：清华大学出版社，2014
(经济管理数学基础)
ISBN 978-7-302-34712-5

Ⅰ.①微… Ⅱ.①孙… ②张… ③刘… Ⅲ.①微积分-高等学校-题解 Ⅳ.①O172-44

中国版本图书馆CIP数据核字(2013)第292362号

**责任编辑**：佟丽霞
**封面设计**：傅瑞学
**责任校对**：刘玉霞
**责任印制**：刘海龙

**出版发行**：清华大学出版社
**网　址**：http://www.tup.com.cn，http://www.wqbook.com
**地　址**：北京清华大学学研大厦A座　**邮　编**：100084
**社总机**：010-62770175　**邮　购**：010-62786544
**投稿与读者服务**：010-62776969，c-service@tup.tsinghua.edu.cn
**质 量 反 馈**：010-62772015，zhiliang@tup.tsinghua.edu.cn
**印 刷 者**：三河市君旺印装厂
**装 订 者**：三河市新茂装订有限公司
**经　销**：全国新华书店
**开　本**：170mm×230mm　**印　张**：13　**字　数**：237千字
**版　次**：2006年10月第1版　2014年6月第2版　**印　次**：2014年6月第1次印刷
**印　数**：1～3000
**定　价**：25.00元

产品编号：053432-01

# “经济管理数学基础”系列教材总序

数学是研究客观世界数量关系和空间形式的科学. 在过去的一个世纪中，数学理论与应用得到了极大的发展，使得数学所研究的两个重要内容，即“数量关系”和“空间形式”，具备了更丰富的内涵和更广泛的外延. 数学科学在发展其严谨的逻辑性的同时，作为一门工具，在几乎所有的学科中大显身手，产生了前所未有的推动力.

在经济活动和社会活动中，随时都会产生数量关系和相互作用. 数学应用的第一步就是对实际问题分析其对象内在的数量关系，这种数量关系概括地表述为一种数学结构，这种结构通常称为数学模型，建立这种数学结构的过程称为数学建模. 数学模型按类型可以分为三类：第一类为确定性模型，即模型所反映的实际问题中的关系具有确定性，对象之间的联系是必然的. 微积分、线性代数等是建立确定性模型的基本数学工具. 第二类为随机性模型，即模型所反映的实际问题具有偶然性或随机性. 概率论、数理统计和随机过程是建立随机性模型的基本数学方法. 第三类为模糊性模型，即模型所反映的实际问题中的关系呈现模糊性. 模糊数学理论是建立模糊性模型的基本数学手段.

高等学校经济管理类专业本科生的公共数学基础课程一般包括微积分、线性代数、概率论与数理统计三门课程，它们都是必修的重要基础理论课. 通过学习，学生可以掌握这些课程的基本概念、基本理论、基本方法和基本技能，为今后学习各类后继课程和进一步扩大数学知识面奠定必要的连续量、离散量和随机量方面的数学基础. 在学习过程中，通过数学知识与其经济应用的有机结合，可以培养学生抽象思维和逻辑推理的理性思维能力、综合运用所学知识分析问题和解决问题的能力以及较强的自主学习能力，并逐步培养学生的探索精神和创新能力.

“经济管理数学基础”系列教材是普通高等教育“十一五”国家级规划教材，包括《微积分》（上、下册）、《线性代数》、《概率论与数理统计》，以及与其配套的习题课教程. 为了方便一线教师教学，该系列教材又增加了与主教材配套的电子教案和教师用书（习题解答）. 该系列教材内容涵盖了教育部大学数学教学指导委员会制定的“经济管理类本科数学基础教学基本要求”，汲取了国内外同类教材的精华，特别是借鉴了近几年我国一批“面向 21 世纪课程”教材和国家“十五”规划教材的成果，同时也凝聚了作者们多年来在大学数学教

学方面积累的经验．本系列教材编写中充分考虑了公共数学基础课程的系统性，注意体现时代的特点，本着加强基础、强化应用、整体优化、注意后效的原则，力争做到科学性、系统性和可行性的统一，传授数学知识和培养数学素养的统一．注重理论联系实际，通过实例展示数学方法在经济管理领域的成功应用．把数学实验内容与习题课相结合，突出数学应用和数学建模的思想方法．借助电子和网络手段提供经济学、管理学的背景资源和应用资源，提高学生的数学人文素养，使数学思维延伸至一般思维．总之，本系列教材体现了现代数学思想与方法，建立了后续数学方法的接口，考虑了专业需求和学生动手能力的培养，并使教材的系统性和文字简洁性相统一．

在教材体系与内容编排上，认真考虑作为经济类、管理类和人文类各专业以及相关的人文社会科学专业不同学时的授课对象的需求，对数学要求较高的专业可讲授教材的全部内容，其他专业可以根据实际需要选择适当的章节讲授．“经济管理数学基础”系列教材中主教材基本在每节后面都配备了习题，每章后面配备了总习题，其中（A）题是体现教学基本要求的习题，（B）题是对基本内容提升、扩展以及综合运用性质的习题．书末给出了习题的参考答案，供读者参考．该系列教材中的习题课教程旨在帮助学生全面、系统、深刻地理解、消化主教材的主要内容，使学生能够巩固、加深、提高和拓宽所学知识，并综合运用所学知识分析、处理和解决经济管理及相关领域中的某些数学应用的问题．每章首先概括主要内容和教学要求，继之进行例题选讲、疑难问题解答，有的章节还列出了常见错误类型分析，最后给出练习题、综合练习题及其参考答案与提示．

自本教材问世以来，许多同行提出了许多宝贵的意见．结合我们在吉林大学的教学实践经验，以及近年来大学数学课程教学改革的成果，我们对本系列教材进行了修订、完善．本次修订的指导思想是：①突出数学理论方法的系统性和连贯性；②加强经济管理的实际应用的引入和数学建模解决方法的讲述；③文字力图简洁明了，删繁就简；④增加了实际应用例题和习题．

在本系列教材的编写过程中，吉林大学教务处、吉林大学数学学院给予了大力支持，吉林大学公共数学教学与研究中心吴晓俐女士承担了本系列教材修订的编务工作．清华大学出版社的领导和编辑们对本系列教材的编辑出版工作给予了精心的指导和大力支持．在此一并致谢．

“经济管理数学基础”系列教材编委会

2013 年 8 月

# 前　言

经济管理数学基础《微积分习题课教程（上册）》自 2006 年 10 月出版以来，受到了同行专家和广大读者的广泛关注，对本教材提出了许多宝贵的意见. 针对上述意见，结合我们在吉林大学的教学实践和教学改革以及大学数学教育发展的需要，我们对本教材进行了修订和完善.

根据本次修订的指导思想，紧密配合《微积分（第 2 版）（上册）》主教材，同时结合考研大纲的要求，我们充实了一些综合性较强的例题和习题. 重点修订了行文体例和文字叙述，增加了实际应用例题和习题.

本书的第 1、2 章由孙毅负责，第 3、4 章由刘静负责，第 5、6 章由张旭利完成，全书由孙毅统稿. 在本教材的修订过程中，得到了吉林大学教务处、吉林大学数学学院和清华大学出版社的大力支持和帮助，吴晓俐女士承担了本教材修订的编务工作，在此一并表示衷心的感谢.

由于编者水平所限，书中的错误和不当之处，敬请读者批评指正.

编　者

2013 年 8 月

# 第 1 版前言

本书是“经济管理数学基础”系列教材中《微积分（上、下册）》(李勇主编，清华大学出版社，2005)的配套的习题课教材，是依据经济类、管理类、人文类各专业对微积分课程的教学要求而编写的.

在主教材《微积分（上、下册）》的编写过程中，按循序渐进的原则，深入浅出. 从典型的自然科学与经济分析中的实际例子出发，从直观的几何现象出发，引出微积分的基本概念，如极限、导数及积分等. 再从理论上进行论证，得到一些有用的方法和结果，然后再利用它们解决更多的自然科学和经济分析中的实际问题. 这样从特殊到一般，再从一般到特殊，从具体到抽象，再从抽象到具体，将微积分和经济分析的有关内容有机地结合起来，为学生将来利用数学分析的方法讨论更深入的经济问题打下良好的基础.

主教材《微积分（上、下册）》在教材体系结构及讲解方法上我们进行了必要的调整，适当淡化运算上的一些技巧，降低了一元函数的极限与连续的理论要求，从简处理了一些公式的推导和一些定理的证明. 在保证教学要求的同时，让教师比较容易组织教学，学生比较容易理解接受，并且使学生在知识、能力、素质方面有较大的提高. 书中将数学素质培养有机地融合于知识讲解中，突出数学思想的介绍，突出数学方法的应用. 本书拓广了经济应用实例的范围，让学生更多地了解应用数学的知识、数学方法解决经济管理类问题的实例，增加他们的应用意识和能力.

本书密切配合主教材《微积分（上、下册）》，内容充实，题型全面. 每章首先概括主要内容和教学要求；继之进行例题选讲、疑难问题解答，有的章节还进行了常见错误类型分析，最后给出练习题、综合练习题及其参考答案与提示. 本书体现了现代数学思想与方法，总结学习规律，解决疑难问题，提示注意事项，特别注重培养学生分析问题、解决问题的能力.

本书上册内容包括函数、极限与连续、导数与微分、微分中值定理与导数应用、不定积分、定积分及其应用. 全书共分 6 章，其中第 1、2 章由孙毅编写，第 3、4 章由刘静编写，第 5、6 章由张旭利编写，全书由孙毅统稿. 青年教师孙鹏、侯影、朱本喜、卢秀双及研究生刘琳琳完成了本书的录入、排版、制图工作.

由于水平有限，书中的错误和不妥之处恳请广大读者批评指正，以期不断完善.

编　者

2006 年 8 月

# 目　录

# 第 1 章　函　数

## 一、主要内容

函数的概念及表示法, 函数的性质, 复合函数与反函数, 基本初等函数的性质与初等函数, 经济学中常用的函数, 简单应用问题中函数关系的建立.

## 二、教学要求

1. 理解函数的概念, 掌握函数的表示法, 会建立简单应用问题的函数关系.
2. 了解函数的有界性、单调性、周期性和奇偶性.
3. 理解复合函数和反函数的概念.
4. 掌握基本初等函数的性质及其图形, 理解初等函数的概念.
5. 了解需求函数、供给函数、成本函数、收益函数、利润函数和库存函数的概念.

## 三、例题选讲

**例 1.1**　下列表达式是否确定了 $y$ 是 $x$ 的函数, 为什么?

(1) $y=\sqrt{\sin 3x-1}+3$;　　(2) $y=\dfrac{1}{\sqrt{\sin 3x-1}}$;

(3) $y=\begin{cases}1, & x\text{为有理数},\\ 0, & x\text{为无理数}.\end{cases}$

**分析**　函数是指两个实数集合之间的映射, 要构成函数, 首先要存在两个非空的实数集合, 分别作为函数的定义域 $D_f$ 和函数的值域 $R_f$; 其次对任一 $x\in D_f$, 必须唯一存在确定的 $y\in R_f$ 与 $x$ 对应. 通常函数的定义域是某个区间, 也可以是一些离散点构成的集合, 但不能是空集.

**解**　(1) 是. 因为对任一 $x=2k\pi+\dfrac{\pi}{2}(k\in\mathbb{Z})$, 均有唯一确定值 $y=3$ 与之对应. 故 $y=\sqrt{\sin 3x-1}+3$ 确定了 $y$ 是 $x$ 的函数.

(2) 不是. 因为在实数范围内, 不等式 $\sin 3x-1>0$ 无解, 故不存在某个数集能作为 $y$ 的定义域, 或者说函数定义域不能是空集, 所以 $y=\dfrac{1}{\sqrt{\sin 3x-1}}$ 不能构成函数.

(3) 是. 因为对于实数集 $\mathbb{R}$ 内任一有理数 $x_1$, 均有唯一确定值 $y=1$ 与之对应; 对于 $\mathbb{R}$ 内任一无理数 $x_2$, 均有唯一确定值 $y=0$ 与之对应, 即对 $\mathbb{R}$ 内任一 $x$, 均有唯一确定值 $y$ 与之对应, 故

$$y=\begin{cases}1, & x\text{为有理数},\\ 0, & x\text{为无理数}\end{cases}$$

确定了 $y$ 是 $x$ 的函数.

**例 1.2** *判断下列各对函数是否相同, 并说明理由:*

(1) $f(x)=\ln x^2$, $g(x)=2\ln x$;

(2) $f(x)=\sqrt{1-\cos^2 x}$, $g(x)=\sin x$;

(3) $f(x)=2x^2-3$, $g(t)=2t^2-3$.

**分析** 确定函数的两个要素是其定义域及对应法则, 因此, 要判断两个函数是否相同, 只要比较它们的定义域及对应法则是否相同. 即使表示自变量、因变量的符号不同, 也并不妨碍函数的等同性.

**解** (1) 不相同. 因为 $f(x)$ 的定义域是 $(-\infty,+\infty)$, 而 $g(x)$ 的定义域是 $(0,+\infty)$, 它们的定义域不同.

(2) 不相同.$f(x)$ 与 $g(x)$ 的定义域都是 $(-\infty,+\infty)$, 但是 $f(x)=\sqrt{1-\cos^2 x}=|\sin x|$ 与 $g(x)=\sin x$ 两者的对应法则不同, 故 $f(x)$ 与 $g(x)$ 不同.

(3) 相同. 因为 $f(x)$ 与 $g(t)$ 的区别只是表示变量的符号不同, 它们的定义域及对应法则都相同, 因此, $f(x)$ 与 $g(t)$ 表示同一个函数.

**例 1.3** *求函数* $y=\sqrt{16-x^2}+\log_2\sin x$ *的定义域.*

**解** 要使函数有定义, 必须使

$$\begin{cases}16-x^2\geqslant 0,\\ \sin x>0,\end{cases}$$

即

$$\begin{cases}-4\leqslant x\leqslant 4,\\ 2k\pi<x<(2k+1)\pi, \quad k\in\mathbb{Z},\end{cases}$$

解不等式组, 得

$$\begin{cases}-4\leqslant x\leqslant 4,\\ 0<x<\pi,\end{cases} \quad \text{或} \quad \begin{cases}-4\leqslant x\leqslant 4,\\ -2\pi<x<-\pi.\end{cases}$$

故函数的定义域为 $[-4,-\pi)\bigcup(0,\pi)$.

**例 1.4**　设 $f(x)=\dfrac{1}{\lg(3-x)}+\sqrt{49-x^2}$, 求 $f(x)$ 的定义域及 $f[f(-7)]$.

**解**　要使 $f(x)$ 有定义, 必须使

$$\begin{cases} 3-x>0, \\ 49-x^2 \geqslant 0, \\ \lg(3-x) \neq 0, \end{cases}$$

即

$$\begin{cases} x<3, \\ -7 \leqslant x \leqslant 7, \\ x \neq 2. \end{cases}$$

因此 $f(x)$ 的定义域为 $[-7,2)\bigcup(2,3)$.

由 $f(-7)=1$, 故

$$f[f(-7)]=f(1)=\frac{1}{\lg 2}+4\sqrt{3}.$$

**小结**　函数的定义域是函数的重要因素, 它是使函数 $y=f(x)$ 有意义的自变量 $x$ 取值的全体, 通常可用不等式或区间来表示. 函数定义域确定的一般依据是: 若是有实际意义的函数, 要使实际问题有意义. 若是一般用解析式表示的函数, 要注意某些运算对自变量的限制:

(1) 分式的分母不能是零;

(2) 在根式中, 负数不能开偶次方;

(3) 在对数中, 真数不能为负数和零;

(4) 在反三角函数中, 要符合反三角函数的定义域.

**例 1.5**　设 $f\left(x+\dfrac{1}{x}\right)=x^2+\dfrac{1}{x^2}$, 求 $f(\sqrt{3}\sin x)$ 及 $f[f(x)]$.

**解**　由于

$$f\left(x+\frac{1}{x}\right)=x^2+\frac{1}{x^2}=\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-2,$$

因此,

$$f(x)=x^2-2.$$

故

$$f(\sqrt{3}\sin x)=3\sin^2 x-2.$$

$$f[f(x)]=f(x^2-2)=(x^2-2)^2-2=x^4-4x^2+2.$$

**例 1.6** 设

$$f(x)=\begin{cases}1+x, & x<0,\\ 1, & x\geqslant 0,\end{cases}$$

求 $f[f(x)]$.

**解**

$$f[f(x)]=\begin{cases}1+f(x), & f(x)<0,\\ 1, & f(x)\geqslant 0.\end{cases}$$

因为当 $x<-1$ 时,

$$f(x)=1+x<0;$$

当 $x\geqslant -1$ 时,

$$f(x)=\begin{cases}1+x, & -1\leqslant x<0,\\ 1, & x\geqslant 0,\end{cases}$$

即 $f(x)\geqslant 0$, 故

$$f[f(x)]=\begin{cases}2+x, & x<-1,\\ 1, & x\geqslant -1.\end{cases}$$

**注** 求分段函数的复合函数, 应注意自变量与中间变量的取值范围, 这是保证正确运算的一个重要环节. 如在例 1.6 中, 将 $f(x)$ 中的 $x$ 换成 $f(x)$ 后, 应讨论 $f(x)<0$ 和 $f(x)\geqslant 0$ 时自变量 $x$ 的取值范围. 得到 $x<-1$ 和 $x\geqslant -1$ 后, 分段函数的复合函数就可以写出来了.

**例 1.7** 求下列函数的反函数:

(1) $y=f(x)=\mathrm{e}^x-1$; (2) $y=f(x)=\begin{cases}x, & x<1,\\ 2^x, & x\geqslant 1.\end{cases}$

**解** (1) 由 $y=f(x)$ 解出 $x$ , 得

$$x=\ln(1+y),\quad y\in(-1,+\infty).$$

互换 $x$ 与 $y$ 的位置, 得反函数

$$y=f^{-1}(x)=\ln(1+x),\quad x\in(-1,+\infty).$$

(2) 由 $y=f(x)$ 解得

$$x=\begin{cases}y, & y<1,\\ \log_2 y, & y\geqslant 2.\end{cases}$$

将式中的 $y$ 与 $x$ 对换, 得原函数的反函数

$$y=f^{-1}(x)=\begin{cases} x, & x<1, \\ \log_2 x, & x\geqslant 2. \end{cases}$$

**小结** 求函数 $y=f(x)$ 的反函数的步骤如下:

(1) 由 $y=f(x)$ 中解出 $x=f^{-1}(y)$;

(2) 对换自变量 $x$ 与因变量 $y$ 的记号, 即得反函数 $y=f^{-1}(x)$.

**例 1.8** 证明函数 $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x}}$ 在 $(0,+\infty)$ 内是单调的.

**证明** 任取 $x_1,x_2\in(0,+\infty)$, 当 $x_1<x_2$ 时,

$$\begin{aligned} f(x_2)-f(x_1)&=\frac{1}{\sqrt{x_2}}-\frac{1}{\sqrt{x_1}}=\frac{\sqrt{x_1}-\sqrt{x_2}}{\sqrt{x_1}\sqrt{x_2}} \\ &=\frac{x_1-x_2}{(\sqrt{x_1}+\sqrt{x_2})\sqrt{x_1}\sqrt{x_2}}<0, \end{aligned}$$

所以 $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x}}$ 在 $(0,+\infty)$ 内是单调减少的. □

**例 1.9** 设函数 $f(x)$ 为定义在 $(-l,l)$ 内的奇函数, 若 $f(x)$ 在 $(0,l)$ 内单调减少, 证明 $f(x)$ 在 $(-l,0)$ 内也单调减少.

**证明** 任取 $x_1,x_2\in(-l,0)$, 并设 $x_1<x_2$, 则 $-x_1,-x_2$ 为 $(0,l)$ 内的两点, 且 $-x_1>-x_2$.

由于 $f(x)$ 在 $(0,l)$ 内单调减少, 故

$$f(-x_1)<f(-x_2).$$

又由于 $f(x)$ 为奇函数, 故

$$f(-x_1)=-f(x_1),\quad f(-x_2)=-f(x_2),$$

从而

$$-f(x_1)<-f(x_2),$$

即 $f(x_1)>f(x_2)$, 因此, $f(x)$ 在 $(-l,0)$ 内单调减少. □

**例 1.10** 判断下列函数的奇偶性:

(1) $f(x)=\sin x-\cos x$; (2) $f(x)=\sin x\dfrac{a^x-1}{a^x+1}$;

(3) $f(x)=x^k-x^{-k}\ (k\in\mathbb{Z},k\neq 0)$.

**分析** 利用函数的奇偶性定义来判断.

**解** (1) 因为 $f(-x)=\sin(-x)-\cos(-x)=-\sin x-\cos x$, 所以 $f(x)=\sin x-\cos x$ 是非奇非偶函数.

(2) 因为

$$\begin{aligned}f(-x)&=\sin(-x)\cdot\frac{a^{-x}-1}{a^{-x}+1}=-\sin x\cdot\frac{\dfrac{1}{a^x}-1}{\dfrac{1}{a^x}+1}\\&=-\sin x\cdot\frac{1-a^x}{1+a^x}=\sin x\cdot\frac{a^x-1}{a^x+1}=f(x),\end{aligned}$$

所以 $f(x)$ 是偶函数.

(3) 当 $k$ 为奇数时,

$$\begin{aligned}f(-x)&=(-x)^k-(-x)^{-k}=-x^k+x^{-k}\\&=-f(x),\end{aligned}$$

所以 $f(x)$ 是奇函数;

当 $k$ 为偶数时,

$$f(-x)=(-x)^k-(-x)^{-k}=f(x),$$

因此 $f(x)$ 是偶函数.

**例 1.11** 证明: 定义在对称区间 $(-l,l)$ 内的任意函数 $f(x)$ 可表示为一个奇函数与一个偶函数之和.

**分析** 若函数 $f(x)$ 可表示为奇函数 $g(x)$ 与偶函数 $h(x)$ 之和, 即

$$f(x)=g(x)+h(x), \tag{1}$$

则

$$f(-x)=g(-x)+h(-x)=-g(x)+h(x), \tag{2}$$

联立式 (1) 和式 (2), 可解得

$$g(x)=\frac{f(x)-f(-x)}{2},\qquad h(x)=\frac{f(x)+f(-x)}{2}.$$

由此可得下面的证明过程.

**证明** 引进函数 $\phi(x)=\dfrac{f(x)-f(-x)}{2},\psi(x)=\dfrac{f(x)+f(-x)}{2}$, 则有

$$\phi(-x)=\frac{f(-x)-f(x)}{2}=-\phi(x),$$