博弈论入门

赵东生◎著

中原出版传媒集团
大地传媒
河南科学技术出版社

博弈论入门

赵东生　著

河南科学技术出版社

·郑州·

图书在版编目（CIP）数据

博弈论入门／赵东生著．—郑州：河南科学技术出版社，2014.4
ISBN 978－7－5349－5002－5

Ⅰ.①博…　Ⅱ.①赵…　Ⅲ.①博弈论　Ⅳ.①O225

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2014）第 052008 号

出版发行：河南科学技术出版社
　　地址：郑州市经五路 66 号　　邮编：450002
　　电话：（0371）65737028　65788613
　　网址：www.hnstp.cn
责任编辑：张晓东
责任校对：柯　姣
封面设计：苏　真
版式设计：栾亚平
责任印制：朱　飞
印　　刷：郑州文华印务有限公司
经　　销：全国新华书店
幅面尺寸：185 mm×260 mm　　印张：23.75　　字数：550 千字
版　　次：2014 年 5 月第 1 版　　2014 年 5 月第 1 次印刷
定　　价：30.00 元

前　言

作为一门学问，博弈论的产生和发展以及其在经济、政治甚至军事等领域的广泛应用已是有目共睹，近年来多位博弈论专家、学者获得诺贝尔经济学奖就是例证。

最初接触到博弈论是在2000年初，一个偶然的机会我购买了上海交通大学谢识予教授编著的《经济学博弈论》一书。阅读之后，立刻被博弈论的分析方法所吸引，后来在上海财经大学读MBA以及工作中先后阅读了十几本中外有关博弈论的著作，可以说每一本论著对于我的学习和理解博弈论知识都从中获益匪浅。但是一段时间过后，回过头来思考这些博弈论的著作，总感到有些困惑。这些论著有些是面向高层次的专家学者或者数学专业人士的，理论高深、公式推导严密，数理逻辑性强，甚至定理、定义的论述及证明都语言晦涩难懂，让一些从事经济管理的读者特别是大学低年级学生学习起来比较困难；而另外一些论著则略显浅显，多是论述博弈论的基本概念，但又或多或少的缺乏数学推导，让一些读者感觉虽然通俗易懂却有些意犹未尽。由此我萌发编写一本“博弈论入门”的想法，使之能弥补以上两者之短，力求到达理论论述既有一定的数学推导，又语言表达简明扼要通俗易懂。

本书是面向博弈论的初学者或大学低年级学生，特别有利于自学。为了便于学习和理解，在编写过程中，我力求做到以下几点：

1. 定理公式的数学推导尽可能严密和细致，部分公式的推导细节近乎繁琐，为的就是让初学者能够弄懂公式的推导过程，这一点对于自学者尤为重要。为了帮助读者理解定理和公式的意义以及逻辑推导过程，本书还选用了很多图表。

2. 对定理、公式所表达的经济学意义尽可能表达清楚描述完整，以便于读者能深刻理解其涵义。

3. 阐述博弈论的概念以及定理、定义的语言尽量流畅自然、通俗易懂。为了能够详细阐述和解释某一个概念，本书还通过多个角度来进行论述，以便读者更容易深刻理概念的完整意义。

4. 本书所选用的例题除了一些博弈论专著中的经典例题外，大部分是作者在从事通讯行业几十年中亲身经历电信业的发展和市场竞争历程中的体会，并从中提炼出来案例。因此这些案例朴素可信，更便于读者加深对博弈论基本概念的理解和学习。

本书的编写得到河南省经贸职业学院众多师生的大力支持，王新庆副校长、成光琳主任以及张晓兰老师都对编写工作给予了帮助和指导，在此向他们表示衷心的感谢。

最后还要感谢我的太太袁云女士，若不是她在长达两年枯燥和艰辛的编写校对过程中对我的照料和关心，特别是在最艰难时刻对我的鼓励和支持，这本书的出版可能遥遥无期。

虽然做出了巨大的努力，但是由于学识水平所限，书中的错误和不足之处，肯请广大读者批评指正。

编　者

2014. 3. 18

目　录

第 1 章　绪论

1.1　博弈论简介

博弈的思想其实很早就出现了，比如中国春秋战国时期“田忌赛马”的故事以及19 世纪描述双寡头垄断竞争的古诺模型等都闪烁着博弈的思想光辉。

博弈论译自英文“Game Theory”，直译过来就是“游戏理论”或者“赌博理论”。博弈理论广泛地应用于经济、政治甚至军事的局势研究、分析和决策，这些局势的抽象模型与下棋打麻将这些游戏并没有本质上的区别，如果用“游戏理论”或者“赌博理论”来命名这些研究政治经济活动的学问却并不合适，毕竟博弈论具有较强的学术和理论色彩。

在人们日常生活中，各种不同形式的游戏和活动，如打牌、博彩、下象棋、下围棋或各类体育比赛等，都有以下几个共同的特点：

首先，所有的游戏及活动都有两个以上的参与者，都有需要遵守的游戏或活动规则，以及可供选择的行动策略。

其次，游戏活动的结果或多或少地都会给参与者的利益带来不同的影响，因此这些游戏或活动的参与者可以充分发挥自己的聪明才智，采取合适的行动策略，尽可能地提高自己的收益。

第三，由于在游戏中，参与者的行为是相互影响、相互制约和相互依存的，游戏各方的利益也是相互影响和制约的，因此在游戏中，参与者不仅要思考自己的行动，还要推测对手的可能反应，不仅要考虑当前的行动，还要推测以后可能采取的行动。博弈论其实是研究人们在相互依存的环境中理性决策行为的一门学问。

博弈论的正式定义可以是：采用数学模型和运用数学的方法研究在一个特定的局势中参与者相互矛盾冲突与合作的学问。博弈论通过把生活中的情景抽象、简化和定量成具体的数学模型，来研究和解决模型中各个相互影响的参与者之间的矛盾冲突与合作，为分析和理解复杂的现实生活中的局势，提供一个严谨的数学方法，进而为相互依存的决策者提供决策选择的依据。

在现实的社会生活中，每个人都在扮演一个角色，都是这个实际社会生活大局势中的一个参与者。在社会生活中，矛盾和冲突无处不在，人们只有互相理解与合作，才能使社会和谐和进步。从这个角度说，无论是竞技体育、经济、政治，甚至是军事战争都可以采用博弈论的方法进行研究，为解决矛盾提供具体的行动策略，并构划出完整的实施方案和行动计划。

那么博弈论与同样是研究经济的传统经济学有什么不同呢？在传统经济学中通常假设市场上的参与者（生产者和消费者）足够多，因此市场的竞争是充分的，市场信息也是完全透明的，市场均衡是瞬间实现的。在这样的市场中，作为市场经济的主体——最具活力的人，反而成为市场价格的被动接受者，变成市场无关重要的从属者，最大化个人的效用仅仅取决于其自身的效用函数和收入预算，最大化厂商利益也仅仅需要考虑厂商自己的生产函数和成本预算，都不需要考虑其他人的影响。但是在博弈论的局势中，参与者是有限的，市场竞争通常是不充分的，而且市场信息也不完全是对称的，因此无论是最大化消费者个人效用，还是最大化厂商利益，除了考虑自身的因素外还需要考虑其他人的影响，以下两个例子可以说明两者的区别。

例 1.1：欧洲一个国家体育馆正进行一场冰球比赛，由于下雪太大，将体育馆的穹顶压塌了，观众们争先恐后地向大门涌去，如果你和你的女朋友也在现场看比赛，遇到这种情况，你应该如何选择逃生路线？按照传统微观经济学的观点，由于信息完全透明，均衡瞬间实现，涌向各出口人流一样多，所以你应该选择离你最近的大门逃生，因为这样做成本最小（路线最近），收益最大（脱离险境最快）。但是博弈论的观点认为在这样的突发事件中，现场混乱导致信息不完全或者不对称，涌向各出口的人群并不均衡，因此你的最佳逃生路线是选择人群较少出口。

例 1.2：打电话时掉线了，如果立刻再拨号，很可能对方也在回拨，结果电话遇忙打不通；如果你等待对方回拨，要是对方也在等你回拨，双方都在等待，电话也打不通。那么你应该如何反应呢？按照博弈论的观点，在考虑对方的选择情况下，确定你的最佳选择，因此这时你应该看和你通话的人是谁。如果是你的母亲，以母亲对子女的关心，可能很快就会回拨过来，你应该持机等待；但是如果是和你的女朋友通话，恐怕你的最佳选择就是立刻再拨过去，否则可能让女朋友不高兴。

在做行动抉择的时候，考虑其他人的选择是典型的博弈论做法。

1.2 博弈论的形成、发展与展望

严格来讲，博弈论其实并不是经济学的一部分，而是数学领域的一个分支，早先的博弈论家都是数学家。但是自从20 世纪80 年代以来，博弈论与经济学的融合促进了博弈论的成熟、飞跃和发展，博弈论被广泛运用在经济学领域，逐步渗透到微观经济学和产业组织理论研究的各个领域，成为经济理论和经济分析的核心方法。

博弈论的发展历史究竟从何时算起，恐怕谁也无法准确界定，中国古代“田忌赛马”的故事就是早期博弈思想应用的典型案例，“孙子兵法”更是充满了博弈思想，闪烁着博弈的智慧光芒。

现代博弈论的起点应该从20 世纪40 年代冯·诺依曼（Von Neumann）和莫根斯坦恩（Morgenstern）出版的名著《博弈论与经济行为》（The Theory of Cames and Economic Behavior）算起。在这部著作中，冯·诺依曼和莫根斯坦恩引入了博弈的展开型（Extensive Form）、策略型（Strateg Form）或称正规型（Normal Form）以及矩阵型（Matrix Form）三种表示方式，并定义了两人零和博弈的极小化极大解（Minmax Solution）和稳定集解两种解概念，从而建立了博弈论的研究方法和体系。该著作的出版，

一方面促进了博弈论与经济学的紧密联系，从而为经济学的研究和发展拓宽了新的视角，带来强大的工具；另一方面也为博弈论自身的研究和发展开创了广阔的前景。

进入20世纪50年代后，博弈论的发展迎来第二次高潮，这个时期的最重要事件是纳什（John Nash）将博弈论的研究领域拓展到非合作博弈，并提出了“纳什均衡”（Nash Equilibrium）解——非合作博弈理论的基础，同时也证明了纳什均衡存在性定理。1965年，塞尔腾（Selten）提出了子博弈完美均衡。1967年及之后的三年，海萨尼（Haisanyi），提出了解不完全信息博弈问题的标准方法和贝叶斯纳什均衡（Bayesian Nash Equilibrium）解概念。建立不完全信息（Incomplete Information）博弈论理论，将博弈论的研究框架进一步完善，从而构建了现代经济学和博弈论中具有重要地位的信息经济学基础。由于纳什、塞尔腾和海萨尼对博弈论的杰出贡献，1994诺贝尔基金会将当年度的诺贝尔经济学奖授予了他们三人。

从20世纪70年代开始，博弈论逐渐受到经济学家广泛关注，其在经济学研究领域中的应用也越来越多，逐渐成为经济理论和研究的核心方法，贯穿微观经济学、产业组织理论，并广泛深入到社会环境、福利管理等领域，拓展到宏观经济学、国际经济学等各个学科，可以说今天博弈论的研究和发展已经进入到了全盛时期，它成为诺贝尔奖获奖人数最多的经济学学科和领域，以致于有人说诺贝尔经济学奖偏爱博弈论。

博弈论的发展虽然令人瞩目，取得了辉煌的成就，但是博弈论的发展远未到尽头，仍有光辉的前景。首先在经济领域，博弈论的应用和研究正在进一步深化，如宏观经济的发展趋势的预测，宏观经济政策的科学制定以及经济全球化带来的国际经济领域内的研究都在延伸和发展。博弈论理论自身的发展和研究也在不断深化，在模型的抽象、博弈的规则、信息的结构等方面继续发展和完善，并在理性的种类和层次、博弈结构的不确定性和动态变化等方面进一步拓展研究的领域。

此外，博弈论并不仅限于经济学的研究，因为博弈论本质上是数学领域的一个分支，作为一种分析工具，是用来研究决策者之间冲突与合作。因此其研究领域涉及金融、贸易、法律、社会管理、政治甚至军事领域，由此也必将进一步推动博弈论理论的发展和完善，因此博弈论未来发展必定有更加光辉前景。

1.3 博弈论的应用与现代经济学

由于博弈论与现代主流经济学的融合，为经济学的研究提供了强有力的分析工具。博弈论广泛和深入的运用经验，几乎全部都在经济学领域，同时博弈论研究成果在经济学中的运用，反过来又进一步促进和带动了博弈论的自身发展。因此，可以说经济学研究的需求是推动博弈论的研究和发展的强大动力。

现代经济学是研究市场条件下稀缺资源的有效配置问题，但是在以往的经济学研究市场竞争环境下，经常有两个基本假定，即：市场经济是建立在完全竞争条件下的；在市场竞争中信息是完全透明的。在这种环境下的市场必然产生如下结果：

（1）由于市场充分竞争，作为经济活动的主体，无论是生产者还是消费者都是市场价格的被动接受者，生产者在生产时依据自己的生产函数和约束条件，来最大化企业的利润；而消费者在消费时根据自身对产品的偏好，根据效用函数和个人的预算约

束，来最大化个人的效用，商品的价格信号传递了所有的市场信息，因为各种生产和消费有关的信息都是透明的，因此无论是从事生产的生产者或是进行消费活动的消费者，只需要考虑个体自身的生产函数或效用函数以及商品价格，不需要操别的心，而整个经济活动中，市场的均衡包括产品市场的均衡和货币市场的均衡都是通过自由市场竞争在瞬间自主实现的，而作为经济活动主体消费者、生产者还有管理者的活动和联系，都是被动地通过市场活动实现的。因此，经济活动的主体“人”在经济活动中的主动作用缺失。

（2）市场的均衡是自然而然的事情，而且这个均衡是市场的常态，即使产生了失衡，也能够通过市场调节瞬间进入均衡状态，没有任何的时间延时。市场均衡是与生俱来的帕累托最优，是经济的和高效率的。

（3）市场机制和制度是最好的，生产者、消费者和管理者完全可以在这个机制下实现平等和效率的统一，以致于有些人甚至讲自由竞争的机制是最好的机制，政府对市场的最好管理就是什么都不要管。

由于现实的市场环境中远未达到充分竞争，各种形式的垄断情形随处可见，市场信息不对称的现象普遍存在，博弈论的研究就表明：当市场上商品良莠不齐的时候，由于信息不对称，最终将导致好产品退出市场，即所谓市场失效。此外还有公共产品和外部性问题等，都说明市场机制是不完善的。直到博弈论与主流经济学的融合，这些问题才逐步得到深入研究，而博弈论也为分析和解决这些问题提供了强有力的工具。

博弈论在微观经济学上的应用已是不言而喻，而博弈论在宏经济学中的影响也与日俱增。无论是宏观经济政策的制定，还是经济结构的调整，甚至促进社会和谐稳定的政策出台都有博弈思想的印记。当今经济全球化，各国的经济都相互影响，特别是欧美大国的经济危机，通货膨胀，任何国家都难以幸免。近年来美国为了刺激国内经济，不惜损人利己推出所谓一连串的量化宽松货币政策，导致全世界经济震荡，首当其冲的当数欧洲，广大发展中国家更是深受其害，因此世界各国纷纷针对美元扩展政策，在本国采取相应对策，以免受其害。

第2章　数学知识复习

2.1　集合与度量空间

(1) 集合(Set)是指某种具有共同性质的事物组成的一个整体。集合中的事物称为集合的元素。如集 A，其元素为 a_1，a_2，…，则记 $A=\{a_1, a_2, \cdots\}$ 或 $A=\{a_i\}$，$\forall i=1, 2, \cdots$

(2) 若 a 是 A 的一个元素，则 $a\in A$，反之 $a\bar{\in} A$。若有 A 和 B 两个集，且 A 的所有元素都属于 B，并且包括 $A=B$，则记 $A\subseteq B$，并称 A 是 B 的子集，若不存在 $A=B$，则记 $A\subset B$，并称 A 是 B 的真子集。

(3) 集合的运算，设 A 和 B 是两个集。

$C=B\cup A$，表示 C 中的元素要么属于 A，要么属于 B，称 C 为 A 与 B 的"和"或"并"。

$C=B\cap A$，表示 C 中的元素既属于 A 又属于 B，称 C 是 A 与 B 的交集，或称 C 是 A 与 B 的"交"。

$C=B\setminus A$，表示 C 中的元素是从 B 中的元素减去 A 的元素，称 C 是 B 减去 A 的余集。

(4) 在度量空间中，满足 $\rho(x, x_0)<r$ 的所有点 $x\in R$ 称为开球，记为 $B(x_0, r)$，以 x_0 为心，半径为 ε 的开球称为点 x_0 的邻域，记 $0_\varepsilon(x_0)$。

集合 A 中一个点 a，如果在它的任何一领域中（不管 ε 多么小），总是有无限个 A 的点，则 a 是 A 的极限点。

如果有一序列 $\{x_n\}$，当有一个 $\varepsilon>0$，总是可以找到一个 N_ε，当 $n>N_\varepsilon$ 时有 $|x_n-x|<\varepsilon$，就称 x 是 $\{x_n\}$ 的极限，记为 $\lim\limits_{n\to\infty}\rho(x, x_n)=0$，就说序列 $\{x_n\}$ 收敛于 x。

(5) 集 A 是闭的，因为 A 本身包括了它自己的全部极限点，换句话说：A 内部的所有收敛的子序列都收敛于 A。闭集包括它自己的边界点。

集 B 是开的，如果 B 内部有收敛的子序列的极限点，不属于 B，则称集 B 是开的。开集不包括它自己的边界点。

例2.1：区间 $[0, 1]$ 是闭的，而区间 $(0, 1)$ 是开的，因为我们取一个序列：$\{x_n\}=(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \cdots\frac{1}{n}, \cdots)$，当 n 趋于无穷大时，它的两个收敛子序列 $x_n=\frac{1}{n}$ 和 $x_n^{\cdot}=(1-\frac{1}{n})$ 的极限分别是 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$ 以及 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n^{\cdot}=\lim\limits_{n\to\infty}(1-\frac{1}{n})=1$，而

$0 \in [0,\ 1]$及$1 \in [0,\ 1]$，所以区间$[0,\ 1]$是闭的；而$0\ \bar{\in}\ (0,\ 1)$和$1\ \bar{\in}\ (0,\ 1)$，所以区间$(0,\ 1)$是开的。

（6）若集A是闭的，且是有界的，则称A是紧集。

（7）集A中任意两个元素x和y，如果有任意的$\alpha \in [0,\ 1]$，使$\alpha \cdot x + (1-\alpha)y = z \in A$，则称$A$是凸集（图2.1）。

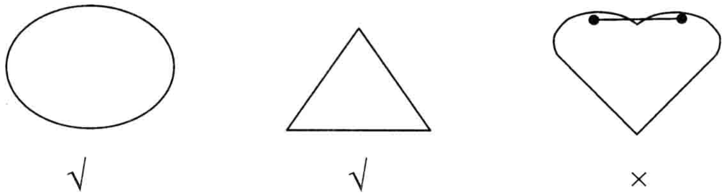

图2.1

2.2 函数和对应

（1）对于集合X和Y，如果存在一个关系f，在f的映射下，把X集中的元素x与Y集的元素y一一对应起来，即$y=f(x)$，则称f是X到Y的函数，记f：$X \to Y$。

（2）对于函数$f(x)$，在区间$[a,\ b]$上有

$$f[\alpha x_1 + (1-\alpha)x_2] \geqq \alpha f(x_1) + (1-\alpha)f(x_2),\alpha \in [0,1]$$

则称$f(x)$是$[a,\ b]$区间上的凹函数，如等号关系不存在，则称$f(x)$是$[a,\ b]$上的严格凹函数。

（3）如果对于集合X和Y，存在一个关系F，把集X中的每一个点x，通过关系F映射到集Y上的点都是Y上的一个子集，即$F(x) \in Y$，于是一个x点可能对应Y上的多个点，则我们就称F是一个点到集合的“对应”或者“集函数”，记F：$X \Rightarrow Y$。

上半连续：在空间$X \times Y$上，如果一个序列$\{(x_i,y_i)\}_{i=1}^{\infty}$，对于任意一个$i$，都有$x_i \in X$和$y_i \in F(x_i)$，当序列$\{x_i\}_{i=1}^{\infty}$收敛于某一个$\bar{x}$的时候，总是有$\{y_i\}_{i=1}^{\infty}$收敛于$\bar{y} \in F(\bar{y})$，我们就说，对应$F$：$X \Rightarrow Y$是上半连续的；当对应$F$：$X \Rightarrow Y$是上半连续的，则存在集$\{(x,y) \mid x \in X, y \in F(x)\}$是在$X \times Y$上的一闭子集。

如果存在一个函数f：$X \to Y$是$X \times Y$上的一个连续函数，而且在X中的每一个x，都有$F(x) = \{f(x)\}$，那么F：$X \Rightarrow Y$是一个点到一个集合的上半连续对应。

这个定义的几何意义是：f是一个单值函数，即$y=f(x)$，并且是一个连续函数，比如$y=x^2$。但是对于每一个$x \in X$的函数值$y=f(x)$，有一个对应$F(x)=\{f(x)\}$，这样的对应$F(x)$就一定是上半连续的，如图2.2所示。上半连续的定义要求对应$F(x)$在$X \times Y$上的图必须是闭的。

2.3 概率与数学期望

2.3.1 条件概率

在空间Ω内，A和B是两个事件，事件A和B都发生的联合概率是

$$p(A,B) = p(A \mid B)p(B) = p(B \mid A)P(A)$$

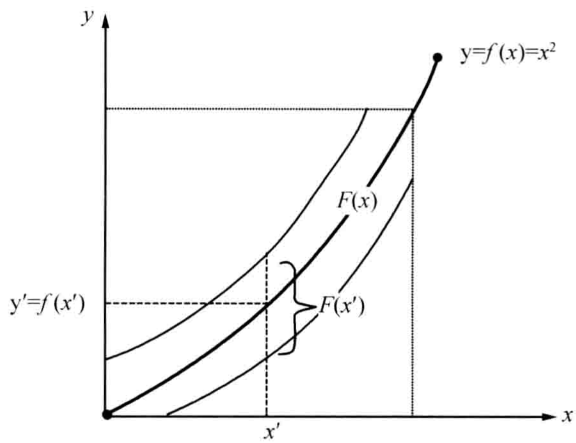

图 2. 2

$p(A \mid B)$是表示在发生事件 B 的条件下，事件 A 发生的条件概率；$p(B \mid A)$ 是表示在发生事件 A 的条件下，事件 B 发生的条件概率。显然条件概率 $p(A \mid B)$ 为

$$p(A \mid B) = \frac{p(A,B)}{p(B)}$$

条件概率 $p(B \mid A)$ 为：

$$p(B \mid A) = \frac{p(A,B)}{p(A)}$$

2.3.2　贝叶斯法则

（1）设事件 θ^R 发生的先验概率是 $p(\theta^R) \geqslant 0$，并且 $\sum_{R=1}^{K} p(\theta^R) = 1$，当给定 θ^R 之后，如果事件 a^h 发生的条件概率是 $p(a^h \mid \theta^R) \geqslant 0$，并且 $\sum_{h} p(a^h \mid \theta^R) = 1$，那么我们就可以得到事件 a^h 发生的总概率是：

$$\begin{aligned} p(a^h) &= p(a^h \mid \theta^1)p(\theta^1) + p(a^h \mid \theta^2)p(\theta^2) + \cdots + p(a^h \mid \theta^K)p(\theta^K) \\ &= \sum_{R=1}^{K} p(a^h \mid \theta^R)p(\theta^R) \end{aligned}$$

（2）当我们观察到事件 a^h 已经发生之后，人们判断事件 θ^R 发生的后验概率是 $p(\theta^R \mid a^h)$，根据联合概率公式，这时事件 a^h 和 θ^R 发生的联合概率是

$$p(a^h, \theta^R) = p(a^h \mid \theta^R)p(\theta^R) = p(\theta^R \mid a^h)\, p(a^h)$$

由上式可知，a^h 和 θ^R 发生的联合概率，等于 θ^R 发生的先险概率 $P(\theta^R)$乘以给定 θ^R 之后 a^h 发生的条件概率 $p(a^h \mid \theta^R)$，同时也等于事件 a^h 发生的总概率乘以给定 a^h 发生情况下事件 θ^R 发生的后验概率 $p(\theta^R \mid a^h)$，故

$$p(\theta^R \mid a^h) = \frac{p(a^h \mid \theta^R)p(\theta^R)}{p(a^h)} = \frac{p(a^h \mid \theta^R)p(\theta^R)}{\sum_{i=1}^{k} p(a^h \mid \theta^i)p(\theta^i)} \text{（贝叶斯法则）}$$

2.3.3　数学期望

（1）离散型：$E(x) = \sum_{i=1}^{R} p(x_i)x_i$。

(2) 连续型：$E(x) = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)\,\mathrm{d}x$ 。

2.4 偏好、效用函数和期望效用

2.4.1 偏好

如集 M 中任意一个对偶$(a,\ b)$存在一个二元关系 Φ 满足以下条件：

(1) 自反性：$a\Phi a$。

(2) 传递性：若 $a\Phi b$ 且 $b\Phi c$，则有 $a\Phi c$。

(3) 反对称性：如果 $a\Phi b$ 且 $b\Phi a$，则唯一的可能是 $a = b$ 或 $a \backsim b$。

(4) 完备性：任意一对偶$(a,\ b) \in M$，要么 $a\Phi b$，反之 $b\Phi a$，两者只能取其一。

(5) 连续性：如果 $f\Phi g$ 且 $g\Phi h$，则存在某一个数 $\alpha \in [0,\ 1]$使得

$$g \backsim \alpha f + (1 - \alpha)h$$

(6) 独立性：如果有 f，g，h 且 $f\Phi g$ 且 $\alpha \in [0,\ 1]$，则有

$$\alpha f + (1 - \alpha)h\,\Phi \alpha g + (1 - \alpha)h$$

则称关系 Φ 为偏好，记$\geq$，如 $a \geq b$ 表示相对 b 来说更偏好于 a，或者说 a 至少和 b 一样好。$a > b$ 表示 a 严格的好于 b，$a \backsim b$ 表示 a 与 b 相比一样好毫无差异。

如果 $a > b$，则必有 $a \geq b$，而且 $b \neq a$。如果 $a \backsim b$，则必有 $a \geq b$，而且 $b \geq a$。

2.4.2 序数效用函数(ordinal utility function)

在闭的且凸的集 M 上，定义一个满足以上的一个偏好关系，均存在 M 上一个连续的效用函数 $u(\cdot)$，即 u：$M \to R$。设 x，$y \in M$，则 u 满足下述条件：

$$u(x) \geqslant u(y) \Leftrightarrow x \geq y$$

$$u(x) = u(y) \Leftrightarrow x \sim y$$

则满足完备性和自反性的 u：$M \to R$ 是序数效用函数。

(1) 说明：

① $u(x) = 2u(y)$ 并不表示 x 的好处是 y 的两倍。

② $u(x) - u(y) > u(y) - u(z)$ 并不表示从 $y \to x$ 所增加的好处，要比从 $z \to y$ 所增加的好处大。

③ $u(x)$ 是对应于偏好$\geq$关系的序数性效用函数，如果 $\Phi(x)$ 是严格单增函数，则 $\Phi(x) = \theta[u(x)]$，也是对应于偏好$\geq$的序数效用函数。

(2) 为了满足需求理论，我们需要提出以下假设：

①效用函数 $u(x)$ 是二阶可微的。

② 效用函数 $u(x)$ 是严格凹的，则保证集合$\{x \in X \mid x > z\}$ 是凸集，且该集合与集合$\{x \in X \mid u(x) > u(z)\}$ 是等价的。

③ 由于效用函数 $u(x)$ 是随效用单调增加的，所以 $u'(x) > 0$ 。

④由于效用函数 $u(x)$ 是边际效用递减的，所以 $u''(x) < 0$。

2.4.3 无差异曲线

无差异曲线表示具有等效用函数值的 x 组成的集合或曲线，即 $U = \{x \in X \mid u(x) = A\}$ 。通常用两种物品的数量 x_1、x_2 来组成无差异曲线，在同一条无差异曲线上的物品组合

(x_1, x_2) 给与人们的效用是相同的和无差别的。此外，用不同的 x_1、x_2 组合具有等效用的曲线，这并不失一般性。通常人们选购物品时，会把待选择的商品量看作 x_1，而把其他商品统统归入 x_2 时去比较。比如某人要去购买一台电视机 (x_1)，那么他就可能放弃购买一些其他物品 (x_2)。如图 2.3 所示。

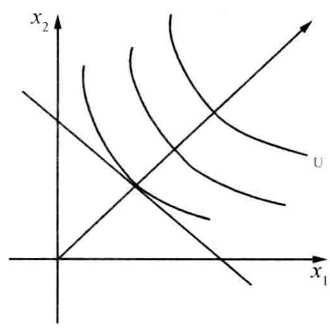

图 2.3

2.4.4　基数效用函数

人们在选择彩票 L(lotteries) 时，需要寻找到一个效用函数 $u: L \to R$，来表示对彩票之间的偏好关系。如果有一张彩票 L_p，其可能获得的收益为 $(x_i)_{i \in M}$，而其获得每一个收益 x_i 的概率为 p_i，所以彩票 L_p 可以表示如下：

$$L_p: \{(x_i), (p_i)\}_{i \in M}, 且 \sum_{i=1}^{M} p_i = 1$$

另外，为了表示一些与状态相关的彩票，在一定状态下的偏好关系，我们规定如下：设事件空间 Ω，事件 $S \subseteq \Omega$，当事件 S 发生时，可能出现的任意状态 $t \in S$；在任意状态 $t \in S$ 情况下，使用如下符号表示与状态相关彩票的偏好关系或顺序：用"$a \geq_S b$"表示，在事件 S 发生的情况下，相对于 b 来说我们更偏好于 a，或者说 a 至少和 b 一样好；"$a >_S b$"表示在事件 S 发生的情况下，我们认为 a 严格好于 b；而"$a \sim_S b$"则表示在事件 S 发生的情况下，对于我们来说 a 与 b 是一样好的，彼此毫无差异。此外，对于一个状态相关彩票 L_p，在状态 t 发生的情况下，其可能得到收益 x 的概率，用在状态 t 发生时可望得到收益 x 的条件概率 $p(x \mid t)$ 来表示。

状态相关彩票 L_p 的表示如下：

$$L_p: \{(x_i), (p(x_i \mid t))\}_{i \in M}, 且 \sum_{i=1}^{M} p(x_i \mid t) = 1$$

对于这样的彩票具有如下公理和性质：

①自反性：$L_p \geq L_p$。

②传递性：若 $L_f \geq L_g$，且 $L_g \geq L_h$，则必有 $L_f \geq L_h$。

③完备性：有两支彩票 L_f 和 L_g，要么 $L_f \geq L_g$，反之则 $L_g \geq L_f$，二者必居其一。

④连续性：如果有 $L_f \geq L_g$，且有 $L_g \geq L_h$，则一定存在某一个正数 $\alpha \in [0, 1]$，使得

$$L_g \sim \alpha L_f + (1 - \alpha) L_h$$

⑤相关性：若彩票与状态 t 相关，则只有那些可能的状态与决策或偏好有关，在给定事件 S 时，对那些只在 S 之外有差异的彩票，而在 S 内的任意状态 $t \in S$ 情况下无差异，那么对于决策者来说，这些彩票是相同的，即当 $p(\cdot \mid t) = g(\cdot \mid t), \forall\ t \in S$，则有 $L_f \sim_S L_g$。

⑥客观替代性：如果 $l \geq_S f$ 以及 $g \geq_S h$，则存在一个 $\alpha \in [0, 1]$，使得下式成立：

$$\alpha l + (1 - \alpha) g \geq_S \alpha f + (1 - \alpha) h$$

⑦主观替代性：如果 $f \geq_S g$ 和 $f \geq_T g$，且 $S \cap T = 0$，则有如下式子成立：

$$f \geq_{S \cup T} g$$