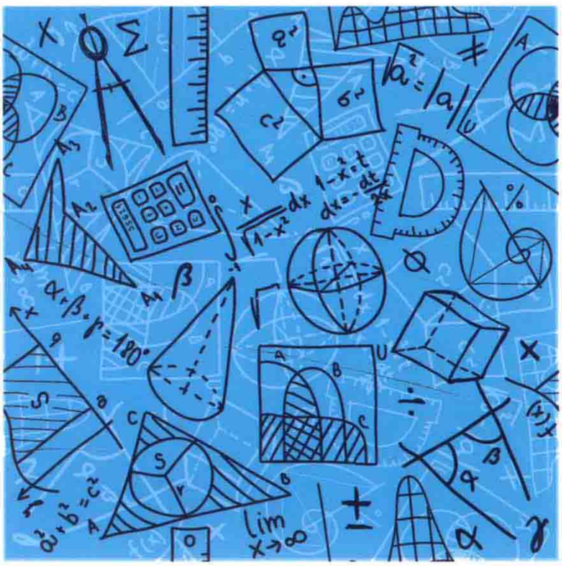
高等数学

Advanced Mathematics

【第二版】

叶小超 柯春梅 主编



厦门大学出版社
XIAMEN UNIVERSITY PRESS
国家一级出版社
全国百佳图书出版单位

高等数学

（第二版）

主　编　叶小超　柯春梅
副主编　蔡俊娟　洪丽华　董　韵

厦门大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

高等数学/叶小超,柯春梅主编.—2版.—厦门:厦门大学出版社,2014.1
ISBN 978-7-5615-4953-7

Ⅰ.①高…　Ⅱ.①叶…②柯…　Ⅲ.①高等数学-高等职业教育-教材　Ⅳ.①O13

中国版本图书馆CIP数据核字(2014)第014665号

厦门大学出版社出版发行
(地址:厦门市软件园二期望海路39号　邮编:361008)
http://www.xmupress.com
xmup @ xmupress.com
厦门集大印刷厂印刷
2014年1月第2版　2014年1月第1次印刷
开本:787×1092　1/16　印张:14.25
字数:342千字　印数:1～3 000册
定价:28.00元

内容简介

本书主要内容有：函数(含常用经济函数)；极限与连续；导数与微分；导数的应用(含导数在经济分析中的应用)；不定积分；定积分及其应用(含定积分在几何上和经济问题中的应用)；向量代数与空间解析几何；概率初步；Mathematica简介及实验．本教材适用于高职高专理工科专业和经管类等专业《高等数学》和《经济数学》课程用书．

前　言

高职高专院校培养符合社会各领域需求的高素质应用型技术人才,《高等数学》是高职高专院校理工科专业、经管类等专业必修的重要基础课程.本书根据高职高专学生的学习特点,注重学生数学思维能力和数学应用能力的培养,加强数学软件计算与应用,使学生获得所要求的基本概念、基本理论和基本技能,培养和提升学生的逻辑推理能力、抽象思维能力、自学能力及综合运用所学知识分析问题和解决问题的能力,并逐步形成创新意识和应用意识,为学习后继课程打好知识基础.

本书由厦门海洋职业技术学院叶小超、柯春梅担任主编;厦门海洋职业技术学院蔡俊娟、厦门软件学院洪丽华和厦门华厦学院董韵担任副主编;厦门海洋职业技术学院邹灵果、尚利霞、胡明洁参与编写.第1章由叶小超编写,第2章由柯春梅和董韵编写,第3章由胡明洁编写,第4章由尚利霞编写,第5章由柯春梅编写,第6章由邹灵果编写,第7章由蔡俊娟编写,第8章由蔡俊娟和洪丽华编写.全书由叶小超、柯春梅统稿和定稿.编写组还制作配备了教学课件和习题全解.

由于编者水平有限和时间仓促,错误和不足之处在所难免,恳请读者批评指正.

编　者

2013年2月1日

目　录

第 1 章　极限与连续 ………… 1

1.1　函数 ………… 1

1.1.1　函数的概念 ………… 1

1.1.2　函数的几种特性 ………… 3

1.1.3　反函数 ………… 4

1.1.4　基本初等函数 ………… 4

1.1.5　复合函数与初等函数 ………… 8

1.1.6　常用经济函数 ………… 9

1.2　极限的概念 ………… 11

1.2.1　极限思想概述 ………… 11

1.2.2　数列的极限 ………… 11

1.2.3　函数的极限 ………… 12

1.3　无穷小量与无穷大量 ………… 14

1.3.1　无穷小量 ………… 14

1.3.2　无穷大量 ………… 14

1.3.3　无穷小量的性质 ………… 15

1.3.4　无穷小量的阶 ………… 15

1.4　极限的性质与四则运算 ………… 16

1.4.1　极限的性质 ………… 16

1.4.2　极限的四则运算 ………… 16

1.5　两个重要极限 ………… 18

1.5.1　第一个重要极限 ………… 18

1.5.2　第二个重要极限 ………… 19

1.6　函数的连续性 ………… 20

1.6.1　连续函数的概念 ………… 21

1.6.2　初等函数的连续性 ………… 21

1.6.3　函数的间断点 ………… 22

1.6.4　闭区间上连续函数的性质 ………… 22

本章小结 ………… 23

习题 1 ………… 28

第 2 章　导数与微分 ………… 31

2.1　导数概念 ………… 31

2.1.1　速度与边际 ………… 31

2.1.2　导数的定义 ………… 32

2.1.3 简单初等函数的导数 …… 33
2.1.4 左导数与右导数 …… 34
2.1.5 导数的实际意义 …… 34
2.1.6 可导与连续的关系 …… 35
2.2 求导法则 …… 36
2.2.1 和、差、积、商的求导法则 …… 36
2.2.2 基本初等函数的导数公式 …… 37
2.2.3 复合函数的求导法则 …… 38
2.3 隐函数求导方法 …… 39
2.3.1 隐函数及其求导方法 …… 39
2.3.2 对数求导法 …… 40
2.4 高阶导数 …… 40
2.5 微分及其简单应用 …… 41
2.5.1 微分的概念 …… 41
2.5.2 微分的几何意义 …… 43
2.5.3 微分的基本公式及运算法则 …… 43
2.5.4 微分在近似计算中的应用 …… 45
本章小结 …… 46
习题 2 …… 51
第 3 章 导数的应用 …… 53
3.1 微分中值定理及洛必达法则 …… 53
3.1.1 微分中值定理 …… 53
3.1.2 洛必达法则 …… 55
3.2 函数的单调性及其极值 …… 57
3.2.1 函数的单调性 …… 57
3.2.2 函数的极值 …… 58
3.3 函数的最值 …… 60
3.3.1 函数的最大值与最小值 …… 60
3.3.2 最大值与最小值的应用举例 …… 61
3.4 利用导数研究函数 …… 63
3.4.1 曲线的凹凸性与拐点 …… 63
3.4.2 曲线的渐近线 …… 64
3.4.3 函数图形的描绘 …… 65
3.5 导数在经济分析中的应用 …… 66
3.5.1 边际分析 …… 66
3.5.2 弹性与弹性分析 …… 68
*3.6 二元函数的概念 …… 69
3.6.1 二元函数的概念 …… 69
3.6.2 二元函数的极限与连续 …… 70
3.6.3 偏导数 …… 72

本章小结 …… 74
习题 3 …… 80
第 4 章　不定积分 …… 83
4.1　不定积分的概念与性质 …… 83
4.1.1　原函数与不定积分的概念 …… 83
4.1.2　基本积分表 …… 85
4.1.3　不定积分的性质 …… 86
4.2　换元积分法 …… 88
4.2.1　第一换元法(或称凑微分法) …… 88
4.2.2　第二换元法 …… 92
4.3　分部积分法 …… 94
4.4　常微分方程简介 …… 96
4.4.1　微分方程的基本概念 …… 97
4.4.2　可分离变量的一阶微分方程 …… 98
4.4.3　一阶线性微分方程 …… 99
4.4.4　$y^{(n)}=f(x)$型的微分方程的通解 …… 101
4.4.5　微分方程应用举例 …… 102
本章小结 …… 103
习题 4 …… 105
第 5 章　定积分及其应用 …… 109
5.1　定积分的概念与性质 …… 109
5.1.1　引出定积分概念的三个实例 …… 109
5.1.2　定积分的概念 …… 111
5.1.3　定积分的性质 …… 113
5.2　微积分的基本公式 …… 113
5.2.1　变上限定积分 …… 113
5.2.2　微积分基本公式(牛顿—莱布尼茨公式) …… 114
5.3　定积分的计算 …… 115
5.3.1　定积分的直接积分法 …… 115
5.3.2　定积分的凑微分法 …… 116
5.3.3　定积分的换元积分法 …… 116
5.3.4　定积分的分部积分法 …… 117
5.4　广义积分 …… 118
5.4.1　无限区间上的广义积分 …… 118
5.4.2　无界函数的广义积分 …… 120
5.5　定积分的应用 …… 121
5.5.1　定积分的微元法 …… 121
5.5.2　定积分在几何上的应用 …… 122
5.5.3　定积分在经济上的应用 …… 126
本章小结 …… 128

习题 5 …… 133
第 6 章 向量代数与空间解析几何 …… 136
6.1 空间直角坐标系 …… 136
6.1.1 空间直角坐标系 …… 136
6.1.2 空间点的坐标 …… 137
6.1.3 空间两点间的距离公式 …… 137
6.2 向量及其线性运算 …… 138
6.2.1 向量的概念 …… 138
6.2.2 向量的线性运算 …… 138
6.3 向量的数量积与向量积 …… 140
6.3.1 向量的分解与向量的坐标 …… 140
6.3.2 向量线性运算的坐标表示法 …… 140
6.3.3 向量的模与方向余弦的坐标表示式 …… 141
6.3.4 两向量的数量积 …… 142
6.3.5 两向量的向量积 …… 143
6.4 平面和空间直线及其方程 …… 144
6.4.1 平面及其方程 …… 144
6.4.2 空间直线及其方程 …… 146
6.5 曲面和曲线及其方程 …… 148
6.5.1 曲面方程的概念 …… 148
6.5.2 球面 …… 148
6.5.3 柱面 …… 149
6.5.4 旋转曲面 …… 150
6.5.5 空间曲线的一般方程与参数方程 …… 150
6.5.6 空间曲线在坐标面上的投影 …… 151
本章小结 …… 152
习题 6 …… 156
第 7 章 概率初步 …… 158
7.1 随机事件与概率 …… 158
7.1.1 随机事件 …… 158
7.1.2 随机事件的概率 …… 161
7.1.3 概率加法公式 …… 162
7.1.4 条件概率 …… 163
7.1.5 乘法公式 …… 163
7.1.6 全概率公式 …… 164
7.1.7 贝叶斯公式 …… 164
7.1.8 事件的独立性 …… 165
7.2 随机变量及其分布 …… 167
7.2.1 随机变量 …… 167
7.2.2 离散型随机变量 …… 167

7.2.3 连续型随机变量 …… 170
7.2.4 随机变量的分布函数 …… 172
7.3 随机变量的数字特征 …… 174
7.3.1 数学期望 …… 174
7.3.2 方差 …… 175
本章小结 …… 176
习题 7 …… 182
第 8 章 Mathematica 简介及实验 …… 186
8.1 Mathematica 简介 …… 186
8.1.1 Mathematica 的基本知识 …… 186
8.1.2 Mathematica 系统操作 …… 186
8.1.3 简单操作 …… 188
8.2 求数列和函数极限的实验 …… 191
8.2.1 求数列极限 …… 191
8.2.2 求函数极限 …… 192
8.3 导数与微分的实验 …… 193
8.3.1 实验目的 …… 193
8.3.2 实验操作 …… 193
8.4 不定积分和定积分的实验 …… 195
8.4.1 试验目的 …… 195
8.4.2 内容和步骤 …… 195
附录 积分表 …… 199
参考答案 …… 207
参考书目 …… 216

第 1 章　极限与连续

本章导读

微积分学的研究对象是变动的量，注重变量的本质和规律. 极限概念是在研究变量在某一过程中的变化趋势时引出的，它是微积分学的重要基本概念之一，微积分中连续、导数、定积分和级数等概念都是用极限来定义的. 这一章我们在对函数概念进行复习和补充的基础上将介绍函数极限与连续的概念，求函数极限的方法，以及函数连续性的判定和应用.

学习目标：

- 了解反函数、函数的单调性、奇偶性、有界性、周期性的概念；左、右极限的概念；无穷小、无穷大的概念；闭区间上连续函数的性质；了解常用经济函数.
- 理解函数、基本初等函数、复合函数、初等函数、分段函数的概念；函数极限的定义；无穷小的性质；函数在一点连续的概念；初等函数的连续性.
- 熟练掌握基本初等函数的性质及图形，掌握复合函数的复合过程，极限四则运算法则.
- 能建立简单实际问题中的函数关系（包括常用经济函数），对无穷小进行比较，用两个重要极限求极限，求连续函数和分段函数的极限，判定函数的连续性.

1.1　函数

函数是微积分学研究的对象，在本课程中应用广泛. 我们在中学已经学习过函数的概念、性质、图像及其应用，现在我们进行复习和归纳.

1.1.1　函数的概念

1. 概念

常量：在考察过程中不发生变化，只取一个固定的值，我们把它称作常量.

例如：圆周率 π 是个永远不变的量；某种商品的价格；某个班的学生人数在一段时间内保持不变；

变量：在所考察过程中是变化的，可以取不同数值，我们把它称作变量.

例如：一天中的气温；生产过程中的产量都是在不断变化的.

定义 1.1　设 x 和 y 是两个变量，若当变量 x 在非空数集 D 内任取一数值时，变量 y 依照某一规则 f 总有一个确定的数值得与之对应，则称变量 y 为变量 x 的**函数**，记作 $y=f(x)$. 这里，x 称为**自变量**，y 称为**因变量**或**函数**. 其中 f 是函数符号，它表示 y 与 x 的对应法则. 有时函数符号也可以用其他字母来表示，如 $y=g(x)$ 或 $y=\varphi(x)$.

定义域：集合 D 称为函数的定义域，或自变量 x 的取值范围.

值域：相应的 y 的值的集合称为函数的值域.

当自变量 x 在其定义域内取定某确定的值 x_0 时，因变量 y 按照所给函数关系 $y=f(x)$ 求出的对应值 y_0 叫做当 $x=x_0$ 时的函数值，记作 $y|_{x=x_0}$ 或 $f(x_0)$.

函数的定义域和对应关系 f 称为函数的两个要素.

两个函数相同的充分必要条件是这两个函数的两要素完全相同.

例 1 求下列函数的定义域.

(1) $f(x)=\dfrac{1}{x^2+2x}$；　　(2) $f(x)=\sqrt{x^2-4}$；

(3) $f(x)=\arcsin(\dfrac{x}{2})+\ln(4x+2)$.

解 (1) 在分式中，分母不能为零，即 $x^2+2x\neq 0$，所以可以得到定义域为：

$D=(-\infty,-2)\cup(-2,0)\cup(0,+\infty)$；

(2) 在偶次根式中，被开方式必须大于等于零，即 $x^2-4\geqslant 0$，所以得到定义域为：

$D=(-\infty,-2]\cup[2,+\infty)$；

(3) 在反正弦函数和对数函数中，自变量 x 满足 $\begin{cases}-1\leqslant\dfrac{x}{2}\leqslant 1\\ 4x+2>0\end{cases}$，所以得到定义域为：

$D=\left(-\dfrac{1}{2},2\right]$.

例 2 下列哪些函数与函数 $y=x$ 是相同的函数？

(1) $y=(\sqrt{x})^2$；　　(2) $y=\dfrac{x^2}{x}$；　　(3) $y=\sqrt{x^2}$；　　(4) $y=|x|$.

解 只有(3) $y=\sqrt{x^2}$ 与 $y=x$ 是相同的函数. 其他函数都与 $y=x$ 不同，原因是(1)、(2)函数的定义域与 $y=x$ 的定义域不同，(4) 函数的对应关系与 $y=x$ 不同.

2. 函数的表示法

函数的表示方法有：解析法、列表法、图像法.

把两个变量之间的函数关系用一个等式来表示，这种表示函数的方法叫做**解析法**.

通过列出自变量与对应函数值的表格来表示函数关系的方法叫做**列表法**.

用图像来表示两个变量之间的函数关系的方法叫做**图像法**.

3. 分段函数

例 3 **【案例】**航空公司对旅客托运行李收费的规定：经济舱旅客可免费托运行李 20 千克，超出部分每千克按经济舱全票价的 1.5% 加收费用. 设某航线经济舱票价为 a 元.

(1) 请建立旅客托运行李费用与行李重量的函数关系式；

(2) 若两名旅客托运行李重量分别是 18 千克和 41 千克，经济舱票价 $a=1000$ 元，求这两名旅客行李托运费各是多少？

解 (1) 设旅客托运行李重量 x(千克)，行李托运收费 y(元)，则 y 与 x 的函数关系式：

$$y=f(x)=\begin{cases}0, & 0\leqslant x\leqslant 20\\ a\times 1.5\%(x-20), & x>20\end{cases};$$

(2) 当 $x=18$，($x\in[0,20]$) 时，对应的 $y=f(18)=0$(元)，

当 $x=41$，($x>20$) 时，

$y=f(41)=1000\times 1.5\%\times(41-20)=15\times 21=315$(元).

像案例中，把定义域分成若干部分，函数关系用不同的解析式分段表示，称这样的函数为

分段函数. 分段函数是由几个关系式合起来表示一个函数，而不是几个函数，对于自变量 x 在定义域内的某个值，分段函数 y 只能确定唯一的值. 分段函数的定义域是各段自变量取值集合的并集. 如函数：

$y = f(x) = \begin{cases} -x-1, & x < 0 \\ 2x^2, & x \geqslant 0 \end{cases}$ 是分段函数，定义域 $x \in \mathrm{R}$，值域 $y \in (-1, +\infty)$，图像见图 1-1.

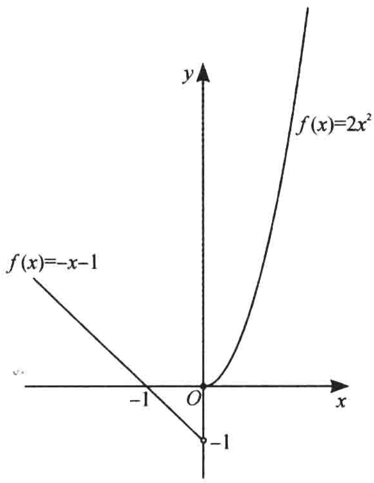


图 1-1

例 4　设函数 $f(x) = \begin{cases} 1-\sin x & x \leqslant 0 \\ 2x+1 & x > 0 \end{cases}$，求 $f(-\pi)$，$f(1)$ 及函数的定义域.

解　因 $x = -\pi$ 对应的函数式是 $y = 1 - \sin x$，则 $f(-\pi) = 1 - \sin(-\pi) = 1$；$x = 1$ 对应的函数式是 $y = 2x + 1$，则 $f(1) = 3$；该函数的定义域为 $x \in \mathrm{R}$.

1.1.2　函数的几种特性

1. 函数的有界性

定义 1.2　设函数 $y = f(x)$ 在集合 D 上有定义，若存在一个正数 M，对于所有的 $x \in D$，恒有 $|f(x)| \leqslant M$，则称函数 $f(x)$ 在 D 上是有界的；若不存在这样的正数 M，则称函数 $f(x)$ 在 D 上是无界的.

要注意以下两点：

① 当一个函数 $y = f(x)$ 在 (a,b) 内有界时，正数 M 的取法不是唯一的.

例如：$y = \sin x$ 在区间 $(-\infty, +\infty)$ 内是有界的，有 $|\sin x| \leqslant 1$，M 亦可取 2.

② 有界性是依赖于区间的.

例如：$y = \dfrac{1}{x}$ 在区间 $(1,2)$ 内是有界的，但在区间 $(0,1)$ 内则无界的.

2. 函数的奇偶性

定义 1.3　设函数 $y = f(x)$ 的定义域 D 关于原点对称，对于任一 $x \in D$，若

①$f(-x) = f(x)$ 成立，则称函数 $y = f(x)$ 是**偶函数**，它的图像关于 y 轴对称；

②$f(-x) = -f(x)$ 成立，则称函数 $y = f(x)$ 是**奇函数**，它的图像关于原点对称.

例 5　判断下列函数的奇偶性：

(1)$f(x) = 3x^4 - 5x^2 + 7$；　　(2)$f(x) = 2x^2 + \sin x$；

(3)$f(x) = \dfrac{\cos x}{x}$.

解　(1)$x \in \mathrm{R}$，$f(-x) = 3(-x)^4 - 5(-x)^2 + 7 = 3x^4 - 5x^2 + 7 = f(x)$ 所以该函数为偶函数；

(2)$x \in \mathrm{R}$，$f(-x) = 2(-x)^2 + \sin(-x) = 2x^2 - \sin x \neq f(x)$；且 $f(-x) \neq -f(x)$ 所以该函数为非奇非偶函数；

(3)$x \in (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$，$f(-x) = \dfrac{\cos(-x)}{-x} = -\dfrac{\cos x}{x} = -f(x)$ 所以该函数为奇函数.

3. 函数的单调性

定义 1.4　设函数 $y = (x)$ 在区间 (a,b) 内有定义，若对于 (a,b) 内的任意两点 x_1 和 x_2，

当 $x_1 < x_2$ 时,

① 有 $f(x_1) < f(x_2)$ 成立,则称函数 $f(x)$ 在(a,b) 内是单调增加的(或称单调递增);

② 有 $f(x_1) > f(x_2)$ 成立,则称函数 $f(x)$ 在(a,b) 内是单调减少的(或称单调递减).

注:函数的递增、递减统称为函数是单调的,从几何图形来看,递增函数的图形从左到右是逐渐上升的;递减函数的图形从左到右是逐渐下降的.

例如,函数 $y = x^2$ 在区间$[0,+\infty)$ 上单调增加,在区间$(-\infty,0]$ 上是单调减少的,所以在区间$(-\infty,+\infty)$ 内,函数 $y = x^2$ 不是单调函数,见图 1-2. 又例如,函数 $y = x^3$ 在$(-\infty,+\infty)$ 内是单调增加的函数,见图 1-3.

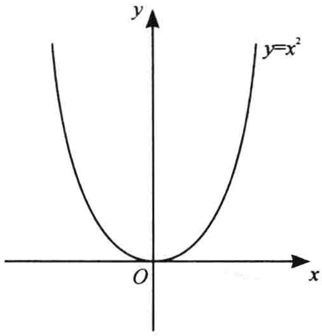


图 1-2

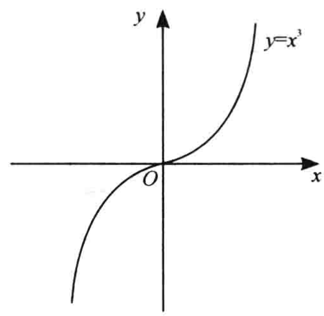


图 1-3

4. 函数的周期性

定义 1.5　设函数 $y = f(x)$ 在集合 D 上有定义,若存在不为零的常数 T,对于任意 $x \in D$,使 $f(x+T) = f(x)$ 恒成立,则称此函数为周期函数,常数 T 称为函数的周期. 满足这个等式的最小正数 T 称为函数的最小正周期,简称周期.

例如,$y = \sin x$ 的周期为 2π;$y = \tan \frac{x}{3}$ 周期为 3π.

1.1.3　反函数

定义 1.6　设函数 $y = f(x)$ 是 x 的函数,其值域为 M,若对于 M 中的每一个 y 值,都有唯一确定的且满足 $y = f(x)$ 的 x 值与之对应,则得到一个定义在 M 上的以 y 为自变量,x 为因变量的新函数. 我们称之为 $y = f(x)$ 的反函数,记作 $x = f^{-1}(y)$.

习惯上,我们把总是用 x 表示自变量,用 y 表示函数,因此通常把反函数 $x = f^{-1}(y)$ 改写为 $y = f^{-1}(x)$.

互为反函数的函数间具有:

① 函数 $y = f(x)$ 与反函数 $y = f^{-1}(x)$ 的图形关于直线 $y = x$ 对称.

② 函数的定义域是反函数的值域,函数的值域是反函数的定义域.

1.1.4　基本初等函数

基本初等函数是指下列六类函数:

(1) 常函数　　$y = C$(C 为常数);

(2) 幂函数　　$y = x^a$(a 为常数);

(3) 指数函数　　$y = a^x$($a > 0, a \neq 1$);

(4) 对数函数　$y = \log_a x(a > 0, a \neq 1)$；

(5) 三角函数　$y = \sin x$，　$y = \cos x$，

$y = \tan x$，　$y = \cot x$，

$y = \sec x$，　$y = \csc x$；

(6) 反三角函数　$y = \arcsin x$，　$y = \arccos x$，

$y = \arctan x$，　$y = \text{arccot}\, x$.

1. 常函数 $y = C$(C 为常数)

定义域为$(-\infty, +\infty)$，值域为$\{C\}$，是偶函数．见图 1-4.

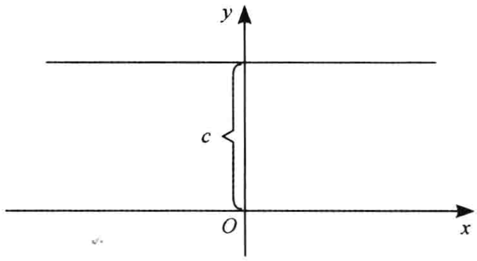


图 1-4

2. 幂函数 $y = x^a$(a 为常数)

幂函数的定义域要看 a 的取值而定，例如当 $a = 2$ 时，$y = x^2$ 的定义域为$(-\infty, +\infty)$；而当 $a = \frac{1}{2}$ 时，$y = x^{\frac{1}{2}}$ 即 $y = \sqrt{x}$ 的定义域为$[0, +\infty)$；又当 $a = -\frac{1}{2}$ 时，$y = x^{-\frac{1}{2}}$ 即 $y = \frac{1}{\sqrt{x}}$ 的定义域为$(0, +\infty)$．但不论 a 取什么值，幂函数 $y = x^a$ 在$(0, +\infty)$内总有意义.

常见幂函数 $y = x, y = x^2, y = x^{\frac{1}{2}}$ 的图形(见图 1-5)及 $y = x^{-1}, y = x^{-2}, y = x^{-\frac{1}{2}}$ 的图形(见图 1-6).

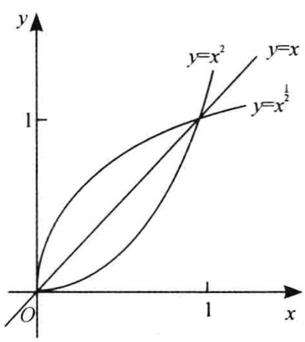


图 1-5

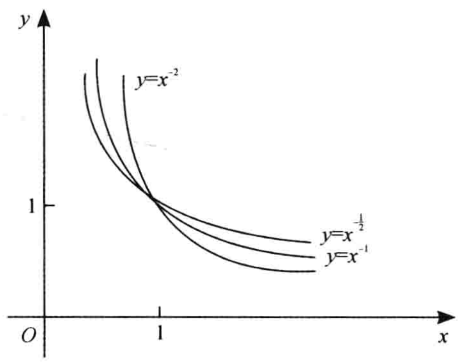


图 1-6

3. 指数函数 $y = a^x(a > 0, a \neq 1)$

定义域为$(-\infty, +\infty)$，值域为$(0, +\infty)$，不论 a 取何值，总有 $a^0 = 1$，所以函数曲线总在 x 轴上方且经过点$(0,1)$.

当 $a > 1$ 时，$y = a^x$ 单调增加；当 $0 < a < 1$ 时，$y = a^x$ 单调减少．见图 1-7.

在工程问题中常常使用以常数 $\mathrm{e} = 2.7182818\cdots$ 为底的指数函数 $y = \mathrm{e}^x$.

4. 对数函数 $y = \log_a x(a > 0, a \neq 1)$

对数函数 $y = \log_a x$ 是指数函数 $y = a^x$ 的反函数，其定义域为$(0, +\infty)$，值域为$(-\infty, +\infty)$，所以 $y = \log_a x$ 的图形总在 y 轴的右方且经过点$(1,0)$．对数函数的图形可以从它所对应的指数函数的图形按反函数作图的一般规则作出，关于直线 $y = x$ 作对称于曲线 $y = a^x$ 的图形就得函数 $y = \log_a x$ 的图形，见图 1-8.

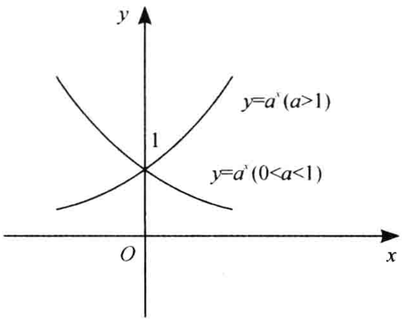


图 1-7

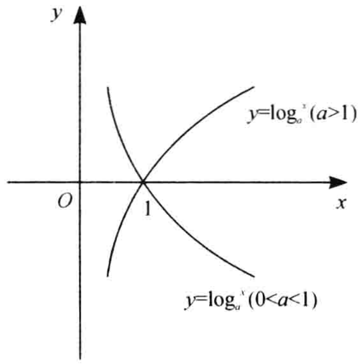


图 1-8

当 $a > 1$ 时，$y = \log_a x$ 单调增加；当 $0 < a < 1$ 时，$y = \log_a x$ 单调减少.

在工程问题中常常使用以常数 e 为底的对数函数 $y = \log_e x$，叫做自然对数函数，简记为 $y = \ln x$.

5. **三角函数**

常用三角函数有 $y = \sin x, y = \cos x, y = \tan x, y = \cot x$.

正弦函数 $y = \sin x$ 与余弦函数 $y = \cos x$ 定义域均为$(-\infty, +\infty)$，均以 2π 为周期，值域都是闭区间$[-1,1]$，所以它们都是有界函数. 正弦函数是奇函数，余弦函数是偶函数，见图 1-9 及图 1-10.

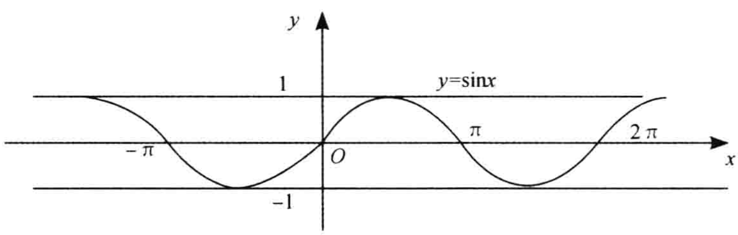


图 1-9

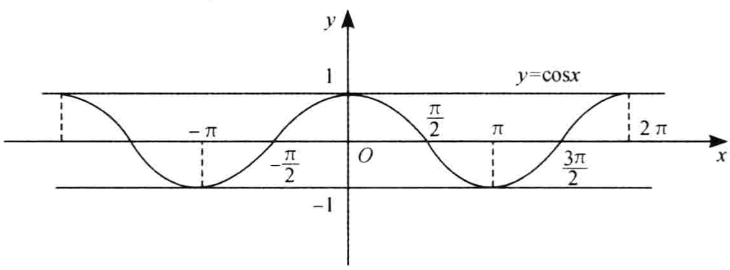


图 1-10

正切函数 $y = \tan x$ 的定义域为$\{x \mid x \neq k\pi + \frac{\pi}{2}, k \in \mathrm{Z}\}$，值域为$(-\infty, +\infty)$，周期为 π 且为奇函数，见图 1-11.

余切函数 $y = \cot x$ 的定义域为$\{x \mid x \neq k\pi, k \in \mathrm{Z}\}$，值域为$(-\infty, +\infty)$，周期为 π 且为奇函数，见图 1-12.

此外，正割函数 $y = \sec x$ 及余割函数 $y = \csc x$ 分别为余弦函数和正弦函数的倒函数，即

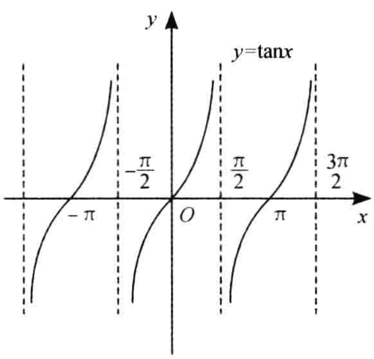


图 1-11

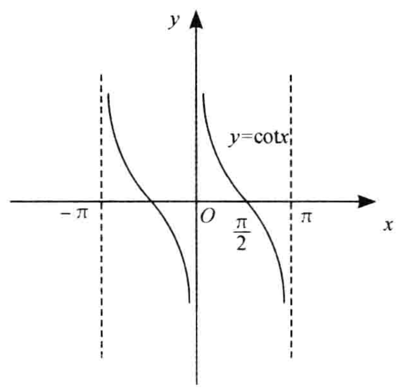


图 1-12

$$\sec x = \frac{1}{\cos x}, \csc x = \frac{1}{\sin x}.$$

所以它们都是以 2π 为周期的函数，并且在开区间 $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ 内都是无界函数，总有 $\sec x \geqslant 1$ 及 $\csc x \geqslant 1$.

6. 反三角函数

反三角函数是三角函数的反函数，常用的反三角函数有：

① 反正弦函数　正弦函数 $y = \sin x$ 在定义域 $x \in \mathbf{R}$ 上时，不存在反函数. 但在区间 $x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ 上反对应关系是单值的，从而存在反函数，称为反正弦函数，记为 $y = \arcsin x$，其定义域为 $x \in [-1,1]$，值域为 $y \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$. 其图像见图 1-13.

② 反余弦函数　余弦函数 $y = \cos x$ 在定义域 $x \in \mathbf{R}$ 上时，不存在反函数. 但在区间 $x \in [0,\pi]$ 上反对应关系是单值的，从而存在反函数，称为反余弦函数，记为 $y = \arccos x$，其定义域为 $x \in [-1,1]$，值域为 $y \in [0,\pi]$. 其图像见图 1-14.

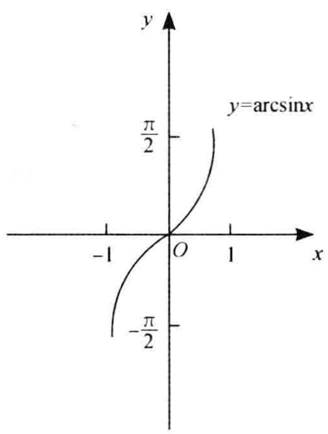


图 1-13

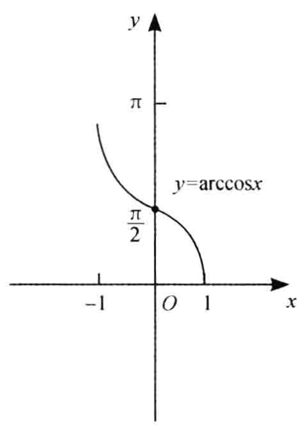


图 1-14

③ 反正切函数　正切函数 $y = \tan x$ 在定义域 $\{x \mid x \neq k\pi + \frac{\pi}{2}, k \in \mathbf{Z}\}$ 上时，不存在反