空气动力学的有限元法

简明讲义（36学时）

601 教研室

南京航空学院

1982.1.

空气动力学的有限元法

目　录

空气动力学的有限元法

第一章 微分方程及其近似解

§1－1 基本定义

如果函数 ϕ 可由函数 ϕ_1 和 ϕ_2 线性组合而得，例如

$$\phi = \alpha\phi_1 + \beta\phi_2 \qquad (1-1)$$

（式中 α，β 均为数），则称它们为线性空间R的元素。并且有如下性质

$$\left.\begin{aligned} &\phi_1 + \phi_2 = \phi_2 + \phi_1 \\ &(\alpha+\beta)\phi = \alpha\phi + \beta\phi \\ &\alpha(\phi_1 + \phi_2) = \alpha\phi_1 + \alpha\phi_2 \end{aligned}\right\} \qquad (1-2)$$

两函数 ϕ_1，ϕ_2 的内积用符号（ϕ_1，ϕ_2）表示，它们定义为

$$(\phi_1, \phi_2) = \int_{x_1}^{x_2} \phi_1(x)\phi_2(x)\,dx \qquad (1-3)$$

对实数，内积具有如下性质

$$\left.\begin{aligned} &(\phi_1, \phi_2) = (\phi_2, \phi_1) \\ &\alpha(\phi_1, \phi_2) = (\alpha\phi_1, \phi_2) \\ &(\phi_1, \phi_2 + \phi_3) = (\phi_1, \phi_2) + (\phi_1, \phi_3) \end{aligned}\right\} \qquad (1-4)$$

$$(\phi_1, \phi_1) > 0\text{，如果 } \phi_1 \neq 0$$

$$= 0\text{，如果 } \phi_1 = 0$$

算子A( )定义为当用其作用于函数u后会产生另一函数P，如P为实数或复数则称A( )为泛函数

一算子称为线性的，如果它满足如下等式

$$A(\alpha u_1 + \beta u_2) = \alpha A(u_1) + \beta A(u_2) \qquad (1-5)$$

现在让我们来考虑描述流场的微分方程问题。设微分方程为

$$Au = f \qquad \text{在流场区域}\Omega \qquad (1-6)$$

边界条件为

$B_i u = g_i \qquad i = 1, 2, \cdots\cdots k$ 在流场边界Γ上

如果算子A中最高阶导数是线性的，而较低阶导数是非线性的，则称算子A为拟线性的，方程为拟性性方程。以上定义也适用于算子B_i。

如果算子A和B_i均为线性算子则称方程（1－6）和（1－7）为线性方程。

如果在流场区域Ω内任意二元素u，v满足如下等式则称算子A为对称的。

$$(u, Av) = (v, Au)$$

或
$$\int_\Omega u A v \, d\Omega = \int_\Omega v A u \, d\Omega \tag{1-8}$$

如果算子A满足如下等式则称算子A为正的。

$$(u, Au) \geqslant 0 \tag{1-9}$$

或
$$\int_\Omega u A u \, du \geqslant 0$$

当（1－9）式中的等号只在$u \equiv 0$时成立，则称算子A为正定的。如果方程（1－6）中的元素u或v除满足（1－8）式外还满足齐次边界条件

$$B_i u = B_i v = 0 \tag{1-10}$$

则称方程（1－6），（1－7）为自伴的。如果还同时满足方程（1－9），则称方程（1－6），（1－7）为正的，如果只当$u \equiv 0$时方程（1－9）中的等式才成立，则称方程（1－6），（1－7）为正定的。

例1.

① $$\frac{d^2\psi}{dx^2} + \frac{d\psi}{dx} = 1 \tag{1-11}$$

方程（1－11）为线性方程，因为ψ及其导数均是线性的。

② $$\frac{d^2\psi}{dx^2} - \left(\frac{d\psi}{dx}\right)^2 = 3 \tag{1-12}$$

方程（1—12）为拟线性的。因为其最高阶导数 $\frac{d^3\psi}{dx^2}$ 是线性的（虽然低阶导数项是非线性的）。

③ $$\left(\frac{d^2\psi}{dx^2}\right)^2-\frac{d\psi}{dx}=8 \qquad (1-13)$$

方程（1—13）既不是线性也不是拟线性而是非线性的，因为其最高阶导数是非线性的

例2 $-\nabla^2 u=f$ 在区域Ω （1—14）

设边界条件为哥西型

$$\frac{\partial u}{\partial n}+\alpha u=0 \qquad \text{在边界}\Gamma\text{上} \qquad (1-15)$$

算子$A=-\nabla^2$ 是线性的，现在来证明方程组（1—14），（1—15）是自伴和正定的。

根据格林公式

$$\int_\Gamma v\frac{\partial u}{\partial n}d\Gamma=\int_\Omega \nabla u\cdot\nabla v\,d\Omega+\int_\Omega v\nabla^2 u\,d\Omega \qquad (1-16)$$

（1—8）式左边，即$\int_\Omega uAv\,d\Omega$可写成

$$\int_\Omega uAv\,d\Omega=\int_\Omega \nabla u\cdot\nabla v\,d\Omega-\int_\Gamma u\frac{\partial v}{\partial n}d\Gamma \qquad (1-17)$$

同理（1—8）式右边可写成

$$\int_\Omega vAu\,d\Omega=\int_\Omega \nabla u\cdot\nabla v\,d\Omega-\int_\Gamma v\frac{\partial u}{\partial n}d\Gamma \qquad (1-18)$$

由于u和v都满足边界条件（1—15），所以（1—17），（1—18）两式右边的最后一项是相等的，因此有

$$\int_\Omega uAv\,d\Omega=\int_\Omega vAu\,d\Omega \qquad (1-19)$$

令（1—17）式中的$u=v$，并将边界条件（1—15）式代入（1—17）式得

$$\int_{\Omega} uAu\,d\Omega=\int_{\Omega}(\nabla u)^2\,d\Omega+\int_{\Omega}\alpha u^2\,d\Omega \tag{1-20}$$

对$\alpha>0$，（1—20）式右边是正的，而且仅当$u\equiv 0$时才为零，所以算子A在$\alpha>0$时是正定的。由于边界条件（1—15）式是齐次的，因此方程组（1—14），（1—15）是自伴正定的。

§1—2 变分原理 二次泛函的极值理论

微分方程

$$Au=f \quad 在\Omega区域 \tag{1-21}$$

设A为对称正定算子，f为给定已知函数，可以证明使二次泛函数

$$J(u)=(Au,u)-2(f,u) \tag{1-22}$$

为极小的u_0值是微分方程(1)的解，即

$$Au_0=f \tag{1-23}$$

因为，如果u_0满足方程（1—23），则从（1—22）式得

$$J(u)=(Au,u)-2(Au_0,u)$$

由于算子A是对称正定的，因此有$(Au_0,u)=(u,Au_0)$和$(u,Au_0)=(Au,u_0)$。故

$$\begin{aligned}J(u)&=(Au,u)-(Au_0,u)-(u,Au_0)\\&=(Au,u)-(Au_0,u)-(Au,u_0)\\&=(Au,u)-(Au_0,u)-(Au,u_0)+(Au_0,u_0)\\&\quad-(Au_0,u_0)=(A(u-u_0),(u-u_0))-\\&\quad-(Au_0,u_0)\end{aligned} \tag{1-24}$$

方程（1—24）中的(Au_0,u_0)项与u无关而为常数，由于A是正定算子，因此方程（1—24）中右边第一项

$$(A(u-u_0),u-u_0)\geqslant 0 \tag{1-25}$$

而且仅当$u-u_0=0$时才有

$$(A(u-u_0),\ u-u_0)=0$$

因此，从(1—24)式得

$$J(u)\geqslant J(u_0) \tag{1—26}$$

所以u_0是二次泛函$J(u)$的极小值。也就是说，若A为对称正定算子则我们求微分方程(1—21)的解与求二次泛函数(1—22)式的极小值是等价的，此即二次泛函数的极值理论。这个理论是很重要的，因为许多数学物理问题，其直接的数学形式就是求意义更广的二次泛函的极小值，只是对解作了某些光滑性假设之后，才归结到微分方程。其次，即便是熟知的微分方程边值问题，我们也宁愿把它化为某一二次泛函数的极小值问题，因为从极值问题出发，建立数值解法往往更灵活方便。

例：Poisson方程的第一边值问题(Dirichlet边值问题)

$$-\Delta u=f(x,y),\ (x,y)\in\Omega \tag{1—27}$$

$$u|_{\Gamma}=0 \tag{1—28}$$

其中
$$A=\Delta=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}$$

按(1—22)式作泛函数

$$J(u)=\frac{1}{2}(-\Delta u,u)-(f,u)=\frac{1}{2}\iint_{\Omega}(-\Delta u)u\,dx\,dy-\iint_{\Omega}f\cdot u\,dx\,dy \tag{1—29}$$

利用格林公式可得

$$\iint_{\Omega}(-\Delta u)v\,dx\,dy=\iint_{\Omega}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y}\right)dx\,dy-\int_{\Gamma}\frac{\partial u}{\partial n}v\,d\Gamma \tag{1—30}$$

其中n表示曲线边界Γ的单位外法向，$\frac{\partial u}{\partial n}$是u沿n方向的偏导数。

对$u=v$且满足齐次边界条件(1-28)，则

$$\iint_\Omega(-\Delta u)u\,dxdy=\iint_\Omega\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right]dxdy$$

(1-31)

因此，Poisson方程在齐次Dirichlet边界条件下的泛函数为

$$J(u)=\frac{1}{2}\iint\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right]dxdy-\iint_\Omega f\cdot u\,dxdy$$

(1-32)

$$=\frac{1}{2}\iint_\Omega\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2-2f\cdot u\right]dxdy \qquad (1.33)$$

令 $a(u,u)=\iint_\Omega\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right]dxdy$，则上式可写成

$$J(u)=\frac{1}{2}a(u,u)-(f,u) \qquad (1-34)$$

从(1-30)式可见，(1-33)式也是Poisson方程在齐次Neumann边界条件($\frac{\partial u}{\partial n}|_\Gamma=0$)下的泛函数。

§1-3 Ritz方法

前节讨论了如何化微分方程的边值问题为相应泛函数的极值问题。本节讨论如何求泛函数的极值。这里介绍一种最重要的近似解法——Ritz法。

将u用一组线性无关的基函数φ_i来近似：

$$\tilde{u}=\sum_{i=1}^{n}c_i\varphi_i \qquad (1-34)$$

或用重复下标写成

$$\tilde{u}=c_i\varphi_i \qquad i=1,\cdots\cdots,n$$

重复下标表示对下标范围进行求和，如$n=3$上式表示$\tilde{u}=c_1\varphi_1+c_2\varphi_2+c_3\varphi_3$。Ritz方法是确定系数$c_i$使$J(u)$取极小值。由于

$$J(\tilde{u})=\frac{1}{2}(A\tilde{u},\tilde{u})-(f,\tilde{u})$$

将（1－34）式代入上式得

$$J(\tilde{u})=\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n}(A\varphi_i,\varphi_j)c_i c_j-\sum_{j=1}^{n}c_j(f,\varphi_j)$$

为了使J(u)取极小值，令

$$\frac{\partial J(\tilde{u})}{\partial c_j}=0$$

得 $$\sum_{i=1}^{n}(A\varphi_i,\varphi_j)c_i=(f,\varphi_j),\quad j=1,2,\cdots,n \tag{1-35}$$

式（1－35）是关于c_i的n阶线性代数方程组。从此方程组求解得c_i后代入（1－34）式就可获得近似解$\tilde{u}$

例：　方程 $$\begin{cases}u''+u=-x, & 0<x<1\\ u(0)=u(1)=0\end{cases} \tag{1-36}$$

选择基函数$\varphi_i(x)(i=1,2\cdots)$使每一$\varphi_i(x)$满足齐次边界条件互相线性独立，通常有两种选取$\varphi_i$的方法，一种是选$\varphi_i$为三角多项式：

$$\varphi_i(x)=\sin(i\pi x),\quad i=1,2,\cdots$$

另一种是选φ_i为代数多项式

$$\varphi_i(x)=w(x)x^{i-1},\quad i=1,2,\cdots \tag{1-38}$$

为使$\varphi_i(x)$满足（1－36）式的边界条件，令

$$w(x)=x(1-x)$$

将近似解$\tilde{u}$表成

$$\tilde{u}(x)=\sum_{i=1}^{n}c_i\varphi_i(x)=x(1-x)(c_1+c_2x+\cdots+c_nx^{n-1}) \tag{1-39}$$

对n＝1的一次近似：

$$\begin{cases} \varphi_1(x)=x(1-x) \\ \tilde{u}_1(x)=c_1\varphi_1(x) \end{cases} \tag{1-40}$$

将$\varphi_1(x)$和$f=-x$代入(1-37)式积分后得

$$-\frac{3}{10}c_1=-\frac{1}{12} \qquad \therefore \ c_1=\frac{5}{18}$$

将c_1值和$\varphi_1(x)$代入(1-40)式得u的一次近似解

$$\tilde{u}_1(x)=\frac{5}{18}x(1-x)$$

对$n=2$的二次近似:

$$\varphi_1(x)=x(1-x), \ \varphi_2(x)=x^2(1-x)$$

$$\tilde{u}_2(x)=c_1\varphi_1(x)+c_2\varphi_2(x) \tag{1-41}$$

将$\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$和$f=-x$代入(1-37)式积分后得两个关于系数c_1, c_2的方程:

$$\begin{cases} -\frac{3}{10}c_1-\frac{3}{20}c_2=-\frac{1}{12} \\ -\frac{3}{20}c_1-\frac{13}{105}c_2=-\frac{1}{20} \end{cases}$$

解之得$c_1=\frac{71}{369}$, $c_2=\frac{7}{41}$。将此c_1, c_2值和$\varphi_1(x)$ $\varphi_2(x)$代入(1-41)式得u的二次近似解

$$\tilde{u}_2(x)=x(1-x)\left(\frac{71}{369}+\frac{7}{41}x\right) \tag{1-42}$$

边值问题(1-36)的精确解为

$$u(x)=\frac{\sin x}{\sin 1}-x \tag{1-43}$$

下表列出$\tilde{u}_1(x)$, $\tilde{u}_2(x)$和精确解$u(x)$在$x=\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}$处

的函数值

x	u	$\tilde{u}_1$	$\tilde{u}_2$
$\frac{1}{4}$	0.044	0.052	0.044
$\frac{1}{2}$	0.070	0.069	0.069
$\frac{3}{4}$	0.060	0.052	0.060

从此表可见。二次近似解已具有足够精度了。

§1－4 带权余数法（Weighted Residual Method）

带权余数法是一种逼近微分（或积分）方程组解的数值方法，设方程的形式为

$$A(u)=f \qquad x\in\Omega \tag{1-44}$$

边界条件：

$$B(u)=g \qquad x\in s \tag{1-45}$$

其中x代表空间座标x_1，x_2和x_3，s是区域Ω的界面函数u由一组基函数$\varphi_k(x)$的组合来近似

$$\tilde{u}=\sum_{k=1}^{N}u_k\varphi_k(x) \tag{1-46}$$

式中u_k是待定系数。φ_k是一组线性无关的函数。

将式（1－46）代入式（1－44）得误差函数ε：

$$\varepsilon=A(\tilde{u})-f\neq 0 \tag{1-47}$$

这样的误差函数称为余数。对精确解$\varepsilon=0$。我们在平均意义下使此误差为零，即使余数的带权积分等于零：

$$(\varepsilon,w_i)=0,\quad i=1,2\cdots\cdots N \tag{1-48}$$

其中w_i是一组权函数。随着权函数w_i的不同选择就有不同的带权余数法，兹分述于下

〔一〕 配置点法

该法是使近似函数（1－46）式在选定的有限个点处满足方程（1－44）。设所选定的点为

$x = x_i$， $i = 1, 2, \cdots\cdots, N$

则余数 $\varepsilon = A(\tilde{u}) - f = [u_k A(\varphi_k(x))]_{x=x_i} - f = 0$

如果用（1－48）式来表示，则配置点法就相当于取脉冲函数 $\delta(x-x_i)$ 作为权函数，因此对配置点法（1－48）式变成

$$(([u_k A(\varphi_k(x))]_{x=x_i} - f), \delta(x-x_i)) = 0$$

$$i = 1, 2, \cdots\cdots, N \qquad (1-50)$$

例： $$A(u) = \frac{d^2 u}{dx^2} + u + x = 0 \qquad (1-51)$$

边界条件： $u = 0$， $x = 0$，

$u = 0$， $x = 1$，

设u的近似函数表成

$$u = x(1-x)(u_1 + u_2 x + \cdots\cdots) \qquad (1-52)$$

则对任意x都满足边界条件。如果在近似函数中只取两项，即对二次近似

$$\tilde{u} = x(1-x)(u_1 + u_2 x) \qquad (1-53)$$

则 $\varepsilon = A(\tilde{u}) - f = x + (-2 + x - x^2)u_1 + (2 - 6x + x^2 - x^3)u_2$ 若我们选 $x = \frac{1}{4}$， $x = \frac{1}{2}$ 为配置点，则得确定系数 u_1 u_2 的方程组为

$$\begin{pmatrix} \frac{29}{16} & -\frac{35}{64} \\ \frac{7}{4} & \frac{7}{8} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} \qquad (1-54)$$

解得 $u_1 = \frac{6}{31}$， $u_2 = \frac{40}{217}$

将u_1，u_2之值代入（1—53）式得二次近似的解

$$\tilde{u}=\frac{x(1-x)}{217}(42+40x) \qquad (1-55)$$

这个结果与上述变分法所得的二次近似结果是很接近的。

〔二〕 最小二乘法

在此方法中，要求余数对其自身的内积为极小，我们定义F为

$$F=(\varepsilon,\ \varepsilon)=(A(\tilde{u})-f,\ A(\tilde{u})-f)$$

$$(1-56)$$

如果近似函数为

$$\tilde{u}=\sum_{k=1}^{N}u_k\varphi_k \qquad (1-57)$$

将F对u_i微分并令

$$\frac{\partial F}{\partial u_i}=0\ ,\quad i=1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ N \qquad (1-58)$$

得

$$\frac{\partial F}{\partial u_i}=\frac{\partial}{\partial u_i}(\varepsilon,\ \varepsilon)=\frac{\partial}{\partial u_i}\ A(\sum_{k=1}^{N}u_k\varphi_k),$$

$$A(\sum_{k=1}^{N}u_k\varphi_k))-2(A(\sum_{k=1}^{N}u_k\varphi_k),\ f)+(f,\ f)\}$$

$$i=1,\ 2,\ \cdots,\ N \qquad (1-59)$$

从N个方柱就可解得N个未知参数u_k。

当A是线性算子时，上式简化成

$$2(A(\sum_{k=1}^{N}u_k\varphi_k),\ A(\varphi_i))-2(A(\varphi_i),\ f)=0$$

$$(1-60)$$

或 $$(A(\sum_{k=1}^{N}u_k\varphi_k)-f,\ A(\varphi_i))=0 \qquad (1-61)$$

例：方程与边界条件仍为（1—51）式。对二次近似

$$\tilde{u}=x(1-x)u_1+x^2(1-x)u_2 \tag{1—62}$$

$$\varepsilon=x+(-2+x-x^2)u_1+(2-6x+x^2-x^3)u_2 \tag{1—63}$$

将ε取平方后对u_1和u_2取偏导数并令其等于零得到如下两方方程

$$\int_0^1 \varepsilon(-2+x-x^2)dx=0$$

$$\int_0^1 \varepsilon(2-6x+x^2-x^3)dx=0 \tag{1—64}$$

将（1—63）式代入上式积分后得

$$\begin{bmatrix} 202 & 101 \\ 707 & 1572 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 55 \\ 399 \end{bmatrix}$$

求解得

$$u_1\simeq 0.1875，\quad u_2\simeq 0.1695 \tag{1—65}$$

将（1—65）式代入（1—62）式就可获得二次近似解$\tilde{u}$。对$x=\frac{1}{4}$，$\frac{1}{2}$，$\frac{3}{4}$所计算得的$\tilde{u}$值与精确解之比较见下表

x	$\tilde{u}$	$u_{精}$
0.25	0.043	0.044
0.5	0.068	0.070
0.75	0.059	0.060

这个结果与变分法和配置点法的结果也是很接近的。

〔三〕Galarkin法

该法是一种特殊的带权余数法，它取基函数φ_i作为权函数。因此，对Galerkin法，（1—48）式变为

$$(\varepsilon,\varphi_i)=0\ ,\ i=1,2,\cdots,N \tag{1—66}$$

从以上N个方程就可确定得N个待定系数u_k。

例：方程与边界条件仍为（1—51）式$\varphi_i(x)$之值见（1—38）式。对$N=2$应用（1—66）式后得下列两方程

$$\left.\begin{aligned}&\int_0^1 \varepsilon x(1-x)\,dx=0\\&\int_0^1 \varepsilon x^2(1-x)\,dx=0\end{aligned}\right\}\qquad(1-67)$$

将（1—63）式之ε值代入上式，积分后得方程组

$$\begin{bmatrix}\frac{3}{10} & \frac{3}{20}\\ \frac{3}{20} & \frac{13}{105}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}u_1\\ u_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{1}{12}\\ \frac{1}{20}\end{bmatrix}\qquad(1-68)$$

解得 $u_1=\dfrac{71}{369}$， $u_2=\dfrac{7}{41}$

将此u_1，u_2值代入（1—53）式得u的二次近似解

$$\tilde{u}=x(1-x)\left(\frac{71}{369}+\frac{7}{41}x\right)\qquad(1-69)$$

计算结果与精确解之比较见下表

x	u	$u_{精}$
0.25	0.044	0.044
0.50	0.070	0.070
0.75	0.060	0.060

从此表可见Galerkin法的二次近似解的精度是相当高的。

第二章 有限元的插值函数

有限元法是从前述的Ritz Galerkin 法发展起来的，它与传统的Ritz ，Galerkin法的主要区别在于有限元法将方程的定义域Ω划分成许多元素，各元素之间的边界由节点相互连接起来，如图 2 — 1 所示，根据定义域和边界情况，对平面域，元素形状可以是三角形，四边形，曲边三角形和曲边四边形等等；对空间域，元素形状可以是四面体，也可以是六面体等等如图 2 — 2 所示。方程的近似解是

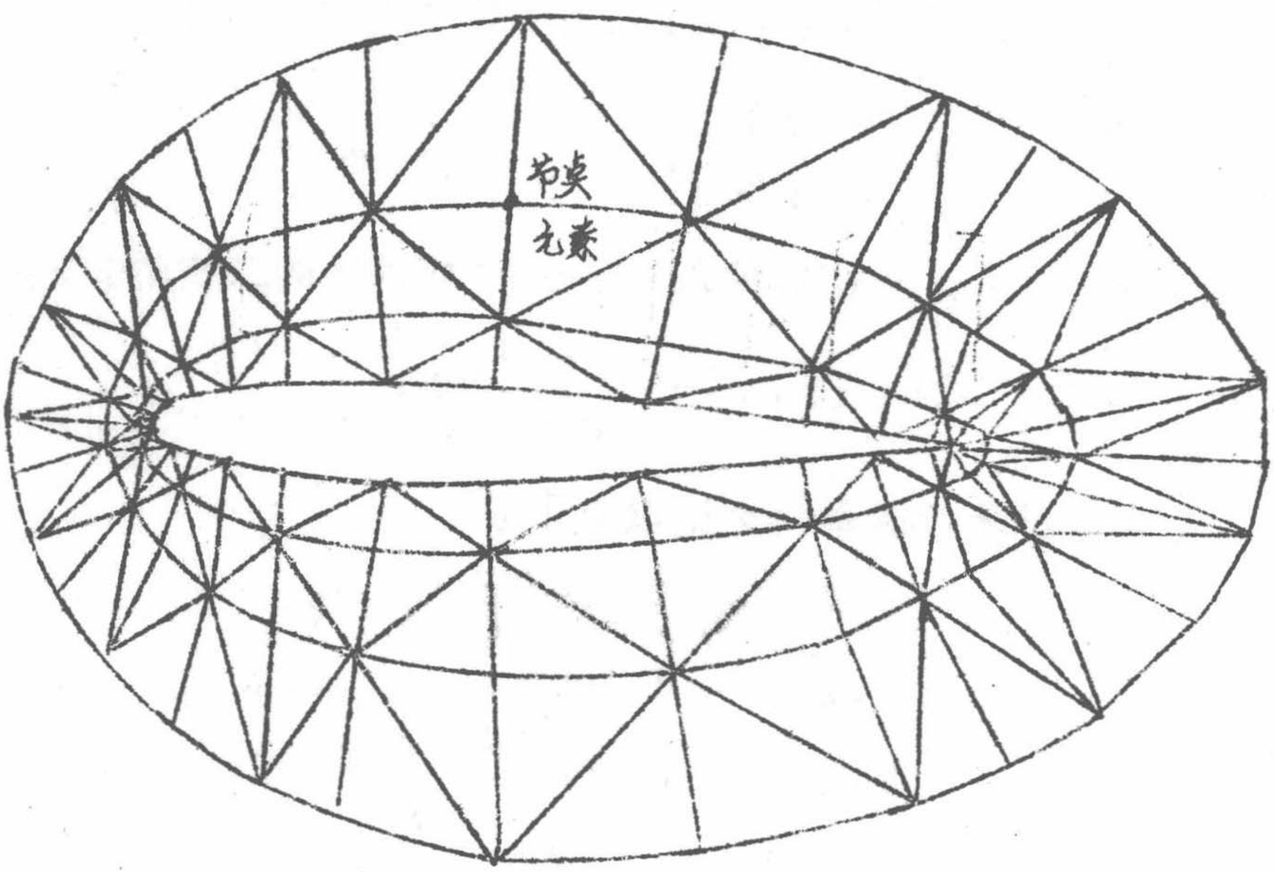

图 1

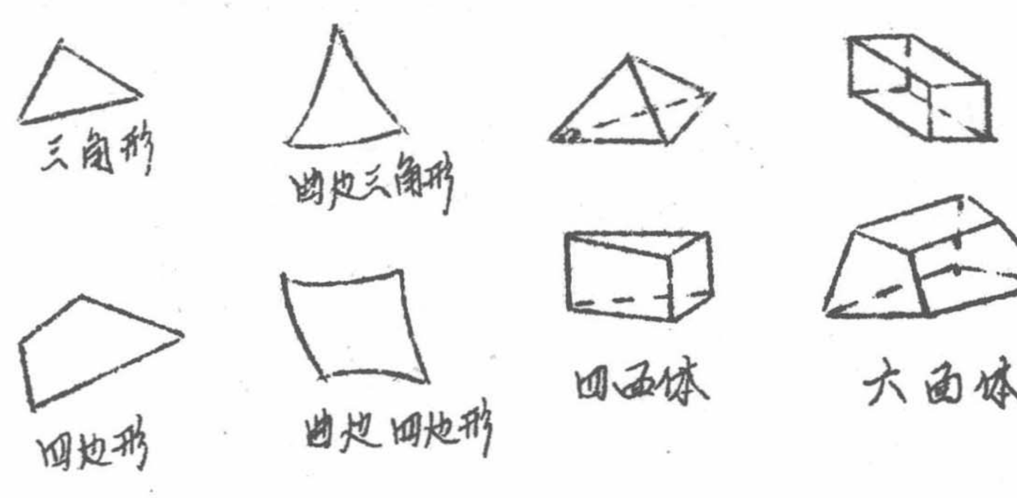

图 2

对元素来建立的，这就克服了传统的Ritz和Galerkin法在整个定义域内确定满足边界条件的基函数的困难。未知函数u在每一元素内通过元素的插值函数Φ用元素节点处的函数值u_i或其导数值$u_{i,j}$来近似。这里$i=1$，2……，k是元素节点总数。$j=1$，2，……，n，n是空间维数，$u_{i,j}$ 表示u_i对座标分量j的偏导数。当利用方程的变分原理或带权余数法来建立元素节点函数u_i及其导数$u_{i,j}$的方程组（有限元方程组）时，如果泛函数J(u)或余数ε与权函数内积后所出现导数的最高阶次为m阶时，为了减小误差，要求函数u直至它的m－1阶导数都要在元素内及其边界上连续，此即所谓m阶连续性要求。因此，对一阶连续性要求，就要保证函数u在元素内及其边界上连续，（例如对$\nabla^2 u=0$的方程，其泛函或余数与权函数内积后所出现的导数的最高阶次为m＝1。所以它只要求一阶连续性），对二阶连续性要求，就要保证函数u及其一阶导数在元素内及其边界上连续。由此可见，有限元插值函数是由元素形状和对连续性阶次的要求所确定。

§2－1 一维元素的插值函数

在一维元素中用以近似变量u的多项式可写成

$$u=a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+\cdots\cdots \tag{2-1}$$

或用重复符号表示成

$$u=a_0+a_ix^i \tag{2-2}$$

线性变化时，$i=1$；二次变化时，$i=2$；其余类推。a_0，a_i是常数。当u呈线性变化时，每一元素只需二节点，每个节点分别位于元素的两端，如图2－3所示。令$\xi=\dfrac{x}{l}$，（在中点$\xi=0$，在节点1，2分别为$\xi=-1$和$\xi=1$（图2－3b））则式（2－1）变成