高等院校应用型特色教材

大学数学
（微积分）

韩建玲 曾健民 主编
陈特清 廖晓花 孙德红 石莲英 副主编

清华大学出版社

大学数学
(微积分)

韩建玲 曾健民 主编
陈特清 廖晓花 孙德红 石莲英 副主编

清华大学出版社

内 容 简 介

本书共分 8 章,内容包括函数、极限与连续、一元函数微分学、一元函数积分学、微分方程、空间解析几何与向量代数、多元函数微积分学及其应用、多元函数积分学、无穷级数. 书后还附有习题答案和常用积分公式.

本书适用于应用型高等院校理工类和经济类各专业的公共数学课. 本书还配有学习辅导书,便于学生学习使用.

图书在版编目(CIP)数据

大学数学. 微积分/韩建玲,曾健民主编. --北京:清华大学出版社,2014
ISBN 978-7-302-36909-7

Ⅰ. ①大… Ⅱ. ①韩… ②曾… Ⅲ. ①高等数学-高等学校-教材 ②微积分-高等学校-教材 Ⅳ. ①O13 ②O172

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2014)第 131479 号

责任编辑:孟毅新
封面设计:傅瑞学
责任校对:刘 静
责任印制:沈 露

出版发行:清华大学出版社
网 址:http://www.tup.com.cn,http://www.wqbook.com
地 址:北京清华大学学研大厦 A 座 **邮 编**:100084
社 总 机:010-62770175 **邮 购**:010-62786544
投稿与读者服务:010-62776969,c-service@tup.tsinghua.edu.cn
质 量 反 馈:010-62772015,zhiliang@tup.tsinghua.edu.cn
印 刷 者:三河市君旺印务有限公司
装 订 者:三河市新茂装订有限公司
经 销:全国新华书店
开 本:185mm×260mm **印 张**:20.25 **字 数**:465 千字
版 次:2014 年 8 月第 1 版 **印 次**:2014 年 8 月第1次印刷
印 数:1~3000
定 价:48.00 元

产品编号:059855-01

前言

FOREWORD

随着我国经济、社会的发展，为了适应应用型高等数学教育的教学改革和教材建设的需求，我们组织了一批有丰富教学经验的教师编写了本书. 本书以应用、实用和适用为基本原则，淡化理论并突出实践. 在本书的编写过程中，我们结合应用型本科和高职高专的特点，对比较烦琐的定理、公式的推导和证明尽可能只给出结果或简单直观地给出几何说明；对例题的选择由浅入深，讲述尽可能深入浅出，力求具有一定的启发性和应用性.

数学是研究客观世界数量关系和空间形式的一门科学，大学数学是应用型本科和高职高专学生的一门必修课，不但对发展学生逻辑思维能力和空间想象能力有不可替代的作用，而且在其他领域与学科中也发挥着十分重要的作用. 大学数学是一门非常重要的基础课，不但内容丰富、理论严谨，而且应用广泛、影响深远，为学习后继课程和进一步扩大知识面奠定必要的基础，帮助学生培养综合利用所学知识分析问题和解决问题的能力，增强学生的自主学习能力和创新能力. 所以编写一本适合的应用型大学数学教材是一项十分有意义的工作.

在本书的编写过程中，我们参考了大量的同类图书，特别是参考了一些典型例题和习题，它们是各位老师教学经验的积累，对本书中例题和习题的编写起到了很大的帮助作用，特此说明并致谢. 本书中有的章节有加“ * ”的内容，属于附加内容，供有此需求的专业选用.

本书由闽南理工学院具有多年教学与实际工作经验的教师集体编写，由曾健民总体策划并撰写前言，由韩建玲和曾健民统稿. 本书第 1、7 章由陈特清编写，第 2、4、8 章由廖晓花编写，第 3、5 章由石莲英编写. 本书在编写过程中，得到了刘德凤、邱秀环、梁晓彬、钟艳林、王素娟、程书红、王昌忠、高小明、徐金平、郝俊灵、韩俊峰、师晶、温焕明、王洁丹、蔡小红、林美丽等老师的协助，在此表示衷心的感谢！

由于我们水平有限，书中难免有不足之处，敬请有关专家、学者及使用本书的老师和同学批评指正，以帮助我们不断改进.

编　者

2014 年 6 月

目录

CONTENTS

第1章

函数、极限与连续

初等数学研究的对象主要是一些有限的、孤立的、静止的事物，而高等数学则更多地研究运动的、相互联系的事物，而且往往要用无限的眼光来处理问题. 函数是数学中最重要的基本概念之一，是现实世界中各种变量相互依存关系的一种抽象，也是高等数学的主要研究对象；极限概念是在研究变量在某一过程中的变化趋势时引出的，是微积分的重要工具；高等数学中的许多重要概念，如连续、导数、定积分等都是建立在极限的基础之上，而极限方法也是我们研究函数的一种最基本的方法. 本章将介绍函数、极限及函数的连续性等基本概念和它们的一些性质.

1.1 函数

1.1.1 集合初步

1. 集合的概念

集合是数学中的一个基本概念. 集合论是德国伟大的数学家康托于 19 世纪 70 年代创立的，它是现代数学的基石. 我们先通过例子来说明集合这个概念. 例如，一个学校的全体女生构成一个集合，图书馆的数学类藏书构成一个集合，全体自然数构成一个集合等. 一般地，所谓**集合**（简称**集**）是指具有某种特定性质的事物的总体，用大写拉丁字母 $A,B,C,\cdots$ 表示. 组成集合的事物称为集合的**元素**（简称**元**），用小写拉丁字母 $a,b,c,\cdots$ 表示. 如果 a 是集合 A 的元素，则说 a 属于 A，记作 $a\in A$；否则记作 $a\notin A$. 一个集合，若它只含有限个元素，则称为**有限集**，否则称为无限集.

表示集合的方法通常有两种：一种是**列举法**，就是把集合的全体元素一一列举出来. 例如，由元素 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 组成的集合 A 可表示为

$$A=\{a_1,a_2,\cdots,a_n\}$$

另一种是**描述法**，若集合 M 是由具有某种性质 P 的元素 x 的全体所组成，则 M 可表示为

$$M = \{x \mid x \text{ 具有性质 } P\}$$

例如，集合 B 是方程 $x^2-1=0$ 的解集，则 B 可表示为

$$B = \{x \mid x^2 - 1 = 0\}$$

下面介绍几个常用数集.

全体非负整数即自然数构成的集合，称为**自然数集**，记作 $\mathbf{N}$，即

$$\mathbf{N} = \{0,1,2,\cdots,n,\cdots\}$$

全体正整数的集合为

$$\mathbf{N}^+ = \{1,2,3\cdots,n,\cdots\}$$

全体整数构成的集合称为**整数集**，记作 $\mathbf{Z}$，即

$$\mathbf{Z} = \{\cdots,-n,\cdots,-2,-1,0,1,2,\cdots,n,\cdots\}$$

全体有理数构成的集合称为**有理数集**，记作 $\mathbf{Q}$，即

$$\mathbf{Q} = \left\{\frac{p}{q} \,\middle|\, p \in \mathbf{Z}, q \in \mathbf{N}^+ \text{ 且 } p \text{ 与 } q \text{ 互质}\right\}$$

全体实数构成的集合称为**实数集**，记作 $\mathbf{R}$. $\mathbf{R}^*$ 表示除了数 0 外的实数集，$\mathbf{R}^+$ 表示正实数集.

若集合 A 的所有元素都是集合 B 的元素，即对任意 $x\in A$，则必有 $x\in B$，则称 A 是 B 的**子集**，记作 $A\subseteq B$（读作 A 包含于 B）或 $B\supseteq A$（读作 B 包含 A）.

如果集合 A 与集合 B 互为子集，即 $A\subseteq B$ 且 $B\subseteq A$，则称集合 A 与集合 B **相等**，记作 $A=B$. 例如：

$$A = \{1,3\}$$
$$B = \{x \mid x^2 - 4x + 3 = 0\}$$

则 $A=B$.

若 $A\subseteq B$ 且 $A\neq B$，则称 A 是 B 的**真子集**，记作 $A\subsetneqq B$. 例如，$\mathbf{N}\subsetneqq\mathbf{Z}\subsetneqq\mathbf{Q}\subsetneqq\mathbf{R}$.

不包含任何元素的集合称为**空集**，记作 $\varnothing$. 例如，集合 $\{x \mid x\in\mathbf{R} \text{ 且 } x^2+1=0\}$ 就是空集. 空集是任何集合的子集.

2. 集合的运算

设 A,B 是两个集合，由所有属于 A 或者属于 B 的元素组成的集合称为 A 与 B 的**并集**（简称**并**），记作 $A\cup B$，即

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ 或 } x \in B\}$$

设 A,B 是两个集合，由所有既属于 A 又属于 B 的元素组成的集合称为 A 与 B 的**交集**（简称**交**），记作 $A\cap B$，即

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ 且 } x \in B\}$$

设 A,B 是两个集合，由所有属于 A 但不属于 B 的元素组成的集合称为 A 与 B 的**差集**（简称**差**），记作 $A\backslash B$，即

$$A\backslash B = \{x \mid x \in A \text{ 且 } x \notin B\}$$

如果我们研究某个问题限定在一个大的集合 I 中进行，则所研究的其他集合 A 都是 I 的子集. 此时，我们称集合 I 为**全集**或**基本集**；称 $I\backslash A$ 为 A 的**余集**或**补集**，记作 A^C. 例

如，在实数集 $\mathbf{R}$ 中，集合 $A=\{x|0<x\leqslant 2\}$ 的余集就是

$$A^C=\{x\,|\,x\leqslant 0\text{ 或 }x>2\}$$

3. 集合运算的法则

(1) 交换律：$A\cup B=B\cup A$，$A\cap B=B\cap A$；

(2) 结合律：$(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C)$，$(A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C)$；

(3) 分配律：$(A\cup B)\cap C=(A\cap C)\cup(B\cap C)$，$(A\cap B)\cup C=(A\cup C)\cap(B\cup C)$；

(4) 对偶律：$(A\cup B)^C=A^C\cap B^C$，$(A\cap B)^C=A^C\cup B^C$.

*4. 直积(笛卡儿乘积)

设 A，B 是任意两个集合，在集合 A 中任意取一个元素 x，在集合 B 中任意取一个元素 y，组成一个有序对 (x,y)，把这样的有序对作为新元素，它们全体组成的集合称为集合 A 与集合 B 的**直积**(或**笛卡儿乘积**)，记作 $A\times B$，即

$$A\times B=\{(x,y)\,|\,x\in A\text{ 且 }y\in B\}$$

例如，$\mathbf{R}\times\mathbf{R}=\{(x,y)|x\in\mathbf{R}\text{ 且 }y\in\mathbf{R}\}$ 即为 xOy 面上全体点的集合，$\mathbf{R}\times\mathbf{R}$ 常记作 $\mathbf{R}^2$.

5. 区间和邻域

(1) 有限区间

设 $a<b$，称数集 $\{x|a<x<b\}$ 为**开区间**，记作 (a,b)，即

$$(a,b)=\{x\,|\,a<x<b\}$$

类似地，$[a,b]=\{x|a\leqslant x\leqslant b\}$ 称为**闭区间**，$[a,b)=\{x|a\leqslant x<b\}$ 和 $(a,b]=\{x|a<x\leqslant b\}$ 都称为**半开区间**. 其中，a 和 b 称为区间的**端点**，$b-a$ 称为**区间的长度**.

(2) 无限区间

只有一个端点的区间称为无限区间. 例如：

$$(a,+\infty)=\{x\,|\,x>a\}\qquad [a,+\infty)=\{x\,|\,x\geqslant a\}$$

$$(-\infty,b)=\{x\,|\,x<b\}\qquad (-\infty,b]=\{x\,|\,x\leqslant b\}$$

我们可以用数轴来表示区间，如图 1-1-1 所示.

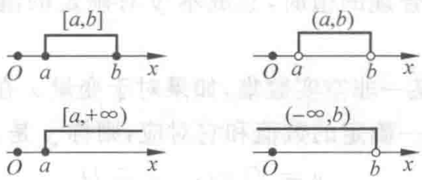

图 1-1-1

实数集 $\mathbf{R}$ 也可以记作 $(-\infty,+\infty)$，其中 ∞ 只是一个数学符号，由英国数学家沃利斯(1616—1703)于 1655 年引入，读作“无穷大”. 注意，我们不能把它当做实数看.

(3) 邻域

邻域是一个经常用到的概念. 以点 a 为中心的任何开区间称为点 a 的**邻域**，记作 $U(a)$.

设 δ 是一正数，则称开区间 $(a-\delta,a+\delta)$ 为点 a 的 δ 邻域，记作 $U(a,\delta)$，即

$$U(a,\delta)=\{x \mid a-\delta<x<a+\delta\}=\{x \| x-a \|<\delta\}$$

其中，点 a 称为**邻域的中心**，δ 称为**邻域的半径**（图 1-1-2）. 有时用到的邻域不包含中心，点 a 的 δ 邻域去掉中心 a 后，称为点 a 的**去心 δ 邻域**，记作 $\mathring{U}(a,\delta)$，即 $\mathring{U}(a,\delta)=\{x|0<|x-a|<\delta\}$（图 1-1-3）.

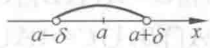

图　1-1-2

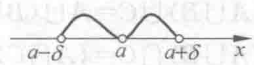

图　1-1-3

1.1.2　函数的概念

1. 常量与变量

在日常生活、生产活动和经济活动中，人们经常会遇到各种各样的量，如温度、浓度、产量、成本、面积等. 宇宙间一切事物都在不断地变化，变化是绝对的，不变是相对的. 在观察事物的过程中，变化着的量称为变量；相对不变的量称为常量. 例如，一段时间内银行的资金运作过程中，借贷资金的数额不断变化，是变量；而利率不变，是常量.

一个量是变量还是常量，不是固定不变的. 在一定的条件下，常量和变量可以互相转化.

2. 函数的定义

在某个变化过程中，往往出现多个变量，这些变量不是彼此孤立的，而是相互影响、相互制约的，一个量或一些量的变化必将引起另一个量或另一些量的变化. 倘若这些影响是确定的，是遵循某一规则的，那么我们就说这些变量之间存在着函数关系.

例如，生产某种产品的固定成本为 5000 元，每生产一件产品，成本增加 40 元，则该产品的总成本 y 与产量 x 之间的关系可以表示为

$$y=40x+5000$$

当产量 x 取任何一个合理的值时，总成本 y 有确定的值与它对应，我们说总成本 y 是产量 x 的函数.

定义 1-1-1　设 D 是某一非空实数集，如果对于变量 x 在 D 中的每一个取值，变量 y 按照一定的法则 f，总有唯一确定的数值和它对应，则称 y 是 x 的函数，记作

$$y=f(x),\quad x\in D$$

这里，称 x 为自变量，y 为因变量或函数. f 是函数符号，它表示 x 与 y 的对应法则. 集合 D 称为函数的**定义域**，记作 D_f；所有相应的 y 值所组成的集合称为函数的**值域**，记作 R_f 或 $f(D)$.

注：

(1) 函数的概念中涉及 5 个因素：①自变量；②定义域；③因变量；④对应法则；⑤值域. 在这 5 个因素中最重要的是定义域和因变量关于自变量的对应法则，这两者常称为

函数的二要素. 只有定义域与对应法则都相同的两个函数才是相同的函数.

*(2) 在定义 1-1-1 中，我们用"唯一确定"来表明所讨论的函数都是单值的. 所谓单值函数就是对于 D 中每一个 x，有且只有一个 y 的值与之对应. 而对于 D 中每一个 x，有多于一个 y 的值与之对应的函数，称为多值函数. 本书我们只讨论单值函数，请读者注意.

例 1-1-1 设 $f(x)=\frac{1}{x}\sin\frac{1}{x}$，求 $f\left(\frac{3}{\pi}\right)$，$f(-x)$，$f\left(\frac{1}{x}\right)$，$f(x^2+1)$.

解

$$f\left(\frac{3}{\pi}\right)=\frac{\pi}{3}\sin\frac{\pi}{3}=\frac{\sqrt{3}\pi}{6},\quad f(-x)=\frac{1}{-x}\sin\frac{1}{-x}=\frac{1}{x}\sin\frac{1}{x}$$

$$f\left(\frac{1}{x}\right)=x\sin x,\quad f(x^2+1)=\frac{1}{x^2+1}\sin\frac{1}{x^2+1}$$

例 1-1-2 设 $f(x+1)=x^2-3x$，求 $f(x)$.

解 令 $t=x+1$，则 $x=t-1$，于是有

$$f(t)=(t-1)^2-3(t-1)=t^2-5t+4$$

所以

$$f(x)=x^2-5x+4$$

例 1-1-3 求函数 $f(x)=\sqrt{x^2-x-6}+\lg(16-x^2)$ 的定义域.

解 $\sqrt{x^2-x-6}$ 的定义域为 $x^2-x-6\geqslant 0$，解得 $x\geqslant 3$ 或 $x\leqslant -2$；而 $\lg(16-x^2)$ 的定义域是 $16-x^2>0$，解得 $-4<x<4$. 所求函数的定义域是这两个函数的定义域的公共部分，即 $x\in(-4,-2]\cup[3,4)$.

例 1-1-4 下列各对函数是否为同一函数？

(1) $f(x)=x$，$g(x)=\sqrt{x^2}$；

(2) $f(x)=\sin^2 x+\cos^2 x$，$g(x)=1$；

(3) $y=f(x)$，$u=f(t)$.

解 (1) 不相同. 因为对应法则不同，事实上 $g(x)=|x|$.

(2) 相同. 因为定义域与对应法则都相同.

(3) $y=f(x)$ 与 $u=f(t)$ 是表示同一函数，因为对应法则相同，函数的定义域也相同.

由此可知一个函数由定义域与对应法则完全确定，而与用什么字母表示无关.

3. 函数的表示法

表示函数的方法有许多，最常见的有表格法、图像法及解析法(又称公式法).

(1) 表格法：把自变量的一系列数值与对应的函数值列成表来表示它们的对应关系.

(2) 图像法：用一条平面曲线表示自变量与函数的对应关系，它是函数关系的几何表示.

(3) 解析法：用数学式子表示自变量与函数的对应关系.

例如，某邮局规定邮寄信件重量不超过 50 克支付邮资 0.8 元；超过 50 克部分按