FINANCIAL MATHEMATICS AND FINANCIAL ENGINEERING

金融数学与金融工程

张永林◎编著

清华大学出版社

FINANCIAL MATHEMATICS AND FINANCIAL ENGINEERING

金融数学与金融工程

FINANCIAL MATHEMATICS AND FINANCIAL ENGINEERING

金融数学与金融工程

张永林◎编著

清华大学出版社
北 京

内容简介

本书是现代金融学基础，内容包括金融数学和金融工程方面的基本概念、模型、方法和应用，内容适应现代经济发展需要，接近现代金融学的前沿领域。

本书以基本概念、模型和方法为主，去理论化、简明和实务是本书的宗旨和特色。本书可供高等院校经济、管理和应用数学专业本科三、四年级和研究生一年级师生使用，也可满足经济和金融专业从业人员的需求。

图书在版编目(CIP)数据

金融数学与金融工程/张永林编著. --北京：清华大学出版社，2014
ISBN 978-7-302-36821-2

Ⅰ. ①金… Ⅱ. ①张… Ⅲ. ①金融－经济数学－高等学校－教材 ②金融工程－高等学校－教材 Ⅳ. ①F830

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2014)第 123552 号

责任编辑：左玉冰
封面设计：汉风唐韵
责任校对：宋玉莲
责任印制：刘海龙

出版发行：清华大学出版社
网　　址：http://www.tup.com.cn，http://www.wqbook.com
地　　址：北京清华大学学研大厦 A 座　　**邮　　编**：100084
社 总 机：010-62770175　　**邮　　购**：010-62786544
投稿与读者服务：010-62776969，c-service@tup.tsinghua.edu.cn
质 量 反 馈：010-62772015，zhiliang@tup.tsinghua.edu.cn
印 装 者：河北新华第一印刷有限责任公司
经　　销：全国新华书店
开　　本：185mm×260mm　　**印　　张**：14.5　　**字　　数**：395 千字
版　　次：2014 年 7 月第 1 版　　**印　　次**：2014 年 7 月第1 次印刷
印　　数：1～4000
定　　价：38.00 元

产品编号：055359-01

序

PREFACE

一、关于现代金融和金融工程

金融学属于应用经济学。现代金融是解决不确定环境下如何在时间上最优配置资源，以及分析市场和经济组织在资源配置中的作用。金融学的主要问题是：资产价值评估问题——金融市场如何确定资产的价格；个体理财问题——个体（家庭）如何进行金融/财务决策；公司财务问题——公司如何进行金融/财务决策。近 20 年来，以货币管理、金融中介机构、投资银行、公司金融和金融工程为代表的金融实务，其发展都超越了经济学的其他领域。金融工程是其中发展最热门的专业，更是就业前景最好的专业。

现在，金融学和金融工程已经不再只是被当作方法论来掌握和运用，更被作为金融技术去研究、创新和发展。其典型代表是保险精算、各种金融分析软件和大数据金融。这些金融高技术不仅成为当代西方经济和金融研究的制高点，更成为西方金融管理者的垄断性职业。

从 20 世纪 80 年代开始，现代金融学重点进入金融市场、金融创新和金融工程的研究领域。

二、关于本书内容的安排及考虑

本书内容涵盖了现代金融和金融工程的模型基础，涵盖了金融实务的数学分析方法。

1. 前 3 章是关于现代金融数学的基础和方法介绍，其中主要是围绕现代金融发展、金融工程专业发展和金融事务要求来介绍和讨论有关的数学方法与基础。其内容和任务是使读者了解和掌握金融思想与数学思维的结合（第 1 章中的泰勒级数与债券期限结构），金融分析与数学方法的结合（第 2 章中的凸函数与金融最优化问题），金融实务与数学模型的结合（第 3 章中的时间序列分析与资产市场的价格波动）。

2. 第 4 章和第 5 章是介绍金融工程和现代金融的概念基础和方法论基础。其中，第 4 章主要介绍现代金融概念性基础，第 5 章主要介绍方法论与模型基础。第 4 章用了最简洁、明了和清晰的结构介绍了现代有关的金融市场的概念和基础。第 5 章的内容对于数学专业或理工专业的读者来说是很轻松的，但对于其中的经济思想和金融分析的掌握与理解则是难点；对于非数理专业的读者来说正好相反。

3. 第6章至第9章的内容属于金融工程、金融创新和金融实务。其中,第6章主要介绍金融衍生品创新、定价和市场;第7章主要介绍债券衍生品创新和定价;第8章主要介绍现代公司金融与企业投资;第9章主要介绍现代金融工程基础与实务。从现代金融的发展来看,第6章到第7章的内容不论金融专业的哪个方向,都是必要的基础。尤其是模型,它是所有金融专业的读者必备的知识。从第9章的金融工程和实务的内容中就可以看到数学方法和金融模型的不可或缺性。

三、关于本书的学习和使用

1. 尽可能地简单、去理论化、好学和实用是本书的宗旨。本书的所有方法和模型都是从数学和金融学的基础开始,尽量追寻实际背景和原始出处,强调数学方法和金融模型的来龙去脉,强调对金融原理、思想和问题的深刻理解,强调经济思想与数学思维的结合。比如第9章金融工程中的现金流分析和第7章中利率期限结构模型,其实就是泰勒级数的运用,更是我们在高中都学过的等比级数的深化和发展。这是现代金融与数学美妙的结合。

2. 目前国内研究生的招生和教学计划都没有要求基于测度论的概率论和随机过程,以及泛涵分析和拓扑学等高深数学,而现在要学习国内的有关著作恰恰都需要这些数学基础。

阅读本书只需具有本科的高等数学、线性代数和不基于测度论的数理统计与概率论方面的数学知识。

3. 本书每章都有引言,其作用是该章内容的简要介绍、综述和要点提示。这些工作是为各章节的内容提供引导。

4. 本书除第3章外都选配了少量的练习,意在读者可以通过这些练习来复习和检查所掌握的基础。作者不主张在本科阶段基础上做过多的习题。因为现在金融专业,尤其是金融工程以及相关专业,不论是从兴趣爱好出发还是作为职业,都已经高度技术化(数学、编程、软件等),甚至是高端技术的行业和领域,所以不论是金融和经济等专业的本科阶段知识还是数学等专业的本科阶段知识都是远远不够用的。即便本书选择了一些最基本和最简单的练习,初学者做起来也要费一定力气。因此编者认为,如果基础知识和专业知识尚不具备,做再多的练习也是无用功。从目前发展来看,如果从事一般的金融专业研究和工作,应该至少具备完整数学专业本科知识和金融研究生专业知识才能够应对发展的需要,特别是现代互联网金融和金融工程创新需要更高深的数学和金融知识。

四、寄语

金融工程的概念有狭义和广义之分。狭义的金融工程主要是指利用先进的数学及通信工具,在各种现有基本金融产品的基础上,进行不同形式的组合分解,以设计出符合客户需要的金融产品。广义的金融工程则是指一切利用工程化手段来解决金融问题的技术开发,它不仅包括金融产品设计,还包括金融产品定价、交易策略设计、金融风险管理等各个方面。本书采用的是广义的金融工程概念,因此从事现代经济专业的实务工作者也被称作“金融工程师”。现代金融的所有领域和方面,一个共同的特点和基本共性就是数学

与模型。其中的道理非常简单,就是因为最基本的任务需要考虑和解决投资的风险、收益和价值评估问题,所以在学习金融工程时,数学是不可或缺的。

发展非常迅猛的大数据金融和网络金融不仅给现代金融和金融工程产生了复杂和崭新的内容,也创造了非常重要的方法和工具。比如各种金融软件、数据库和模型,都要求金融从业人员掌握非常深厚的数学基础知识和金融相关知识。大数据金融,就是互联网金融,互联网金融背后就是大数据,所以大数据、原材料、工人、厂房将来都是现代金融和金融工程的研究内容。在大数据时代,金融创新的快速发展给现代金融研究和金融业的发展创造了无限的前景。

张永林

2014 年 5 月

目 录
CONTENTS

第1章 现代金融与数学方法

CHAPTER 1

引言

本章我们将从基本原理开始介绍现代金融中的数学方法基础，即微积分的运用。我们都知道微分学提供一种方法来决定一个变量相对于一个或多个其他变量的变化而变化的程度，并且决定这种变化率是增加、减少还是不变，于是就可以运用微分学提供的这种方法在金融领域求出债券价格的利率敏感性。

概括地说，微积分在金融中的运用就是经典的边际分析，本章我们以泰勒级数和微分中值定理与债券定价为例来介绍传统微积分数学知识在金融中的运用，在后面债券定价模型中我们还通过著名的利率期限结构理论来认识微积分在金融中的重要应用价值。

大家都知道，微分中值定理是数学中非常抽象的内容，尽管其有美妙和精彩的数学逻辑，但是因为初学者找不到其更多的实际应用而往往被当做"高雅艺术"。就是在自然世界和科学中也没有发现更多的用武之地，但是在现代金融中，它们已经被运用到债券价格中，与重要的"利率期限结构"联系起来，即运用微分中值定理发现利率期限结构模型。

随机过程在后面的"维纳-伊藤"过程中还有非常经典的运用。

1.1 微积分与现代金融

1.1.1 Taylor 级数与债券价格

使用更简单和直观的函数去近似一个抽象函数是非常有用的数学思想和方法，泰勒级数展开就提供了这样一种方法。这种数学方法在金融中被广泛运用，例如，考虑每年付息的 2 年期债券的价格，价格 P 作为到期收益率 y 的函数可以表示为

$$P = f(y) = \frac{CF_1}{(1+y)} + \frac{CF_2}{(1+y)^2}$$

类似函数的图解表示就是价格收益率曲线，如图 1.1 所示。函数 $f(y)$ 非常复杂，而且债券中规定的到期的现金流的数目越多就越复杂，如果我们有一种对 $f(y)$ 的近似就会使问题变得容易。

泰勒级数是多项式表达式(包括一个常数和 Y 的幂函数),它给我们提供了一种近似方法,根据它们的特性,近似值通常在基本变量(本节内的 y)值的一个有限范围内有效,可以选取任何喜欢的点去近似 f,用 y 表示该点。选定点以后我们就固定它(因此 y 是某种固定的变量!),并且考虑 y 有一个小的变化,即 $y+h$。此处 h 非常小,可以取负值,所以 h 是变量。

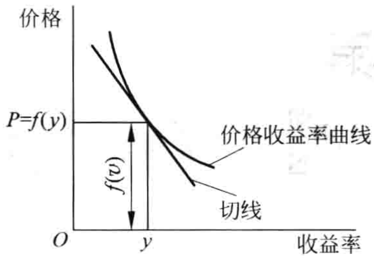

图 1.1 债券的价格收益率曲线

下面列出在 y 点泰勒级数对 $f(y)$ 的近似值。常数近似值表示为 $P_0(y)$,一次近似值表示成 $P_1(y)$,二次表示成 $P_2(y)$,依次类推。

$$P_0(y+h)=f(y)$$

$$P_1(y+h)=f(y)+f'(y)\times h$$

$$P_2(y+h)=f(y)+f'(y)\times h+\frac{f''(h)}{2}\times h^2$$

$$P_3(y+h)=f(y)+f'(y)\times h+\frac{f''(h)}{2}\times h^2+\frac{f'''(h)}{6}\times h^3$$

$$P_4(y+h)=f(y)+f'(y)\times h+\frac{f''(h)}{2}\times h^2+\frac{f'''(h)}{6}\times h^3+\frac{f^{iv}(h)}{24}\times h^4 \quad (1.1)$$

注意:$f'''(h)$表示 y 在 $y=h$ 点时 $f(y)$的三阶导数,$f^{iv}(h)$是 $y=h$ 点处的四阶导数。同时应注意到分母 2、6、24 等是阶乘数,$2!=(2\times1)$,$3!=(3\times2\times1)$,$4!=(4\times3\times2\times1)$等。

此处并没有表明这些近似值是最好的一次近似值或最好的二次近似值等,只是表示它们是这样建立的,以使:P_0 在 $y=y$ 处和 f 有相同的数值;P_1 在 $y=y$ 处和 f 有相同的数值和相同的一阶导数;P_2 和 f 有相同的数值,相同的一阶导数和相同的二阶导数等。

如何理解和解释这种近似的金融含义呢?请看图 1.1。

$f(y)$的高度在曲线上给出一点等于 P,现在要在 y 变化很小时,近似 $P=f(y)$,我们可以加一个一次近似值,就是 $P=f(y+h)+f(y)+f'(y)h$。作为一次近似值,Y 值的变化可以通过沿直线而非曲线移动取近似值。

因此,对 Y 的任何变化,近似值都是不准确的,除非是最小变化。可以通过取二次近似值提高近似程度,也就是对一次近似值加上二阶导数,因此 $P=f(y)+f'(y)\times h+\frac{f''(h)}{2!}\times h^2$。

为了说明一次和二次近似的应用,我们首先应用这个原理去估计债券价格的变化,然后再求债券价格的波动性。

请注意,这种类似的数学方法运用我们在后面还会经常看到,比如资产收益曲线和证券市场线。

1.1.2 使用泰勒级数估计债券价格变化

图 1.1 给出了债券收益率和价格关系的图解表示,该曲线被称为债券的价格收益率

曲线,是非线性和负斜率的。虽然建模描述收益率变化所导致的价格变化可能十分复杂,但是根据对泰勒级数的理解,我们可以用某些阶泰勒级数来近似价格收益率函数。例如,可以选用债券价格对收益率的一阶导数、二阶导数和三阶导数等形式作近似。实际上,下面将看到,两阶段的泰勒级数就提供了由于收益率的微小变化而导致债券价格变化的很好度量。如果把泰勒级数的各部分都除以债券价格,就得到债券价格波动性的有用的度量。

现在以 1 年后支付 100 的 1 年期零息债券为例,说明如何使用泰勒级数近似表示债券价格变化。如果到期收益率是 10%,现价就是 90.909 0,因此 $P=f(0.10)=90.9090$。如果 y 从 0.10 变化到 0.11 时,债券价格是多少呢?我们可以给出该变化的一次近似,把一阶导数乘以收益率变化再加到常数上得到

$$90.9090+h\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}y}$$

由于 $P=f(y)=P=100/(1+y)$,所以

$$\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}y}=\frac{-100}{(1+y)^2}\tag{1.2}$$

因此,当 $y=0.10$ 时

$$\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}y}=\frac{-100}{1.10^2}=-82.6446$$

从而,$y=0.11$ 时 P 的一次近似即 $P=f(0.11)$是

$$90.9090-0.01\times 82.6446=90.0826$$

实际上如果到期收益率确实立即增加到 11%,债券价格将只下降到 90.09,因此一次近似是不准确的。从图 1.1 可以看出一次近似高估了债券价格的向下运动。

可以通过二次近似改善该近似值,此时

$$P(y+h)=f(y)+\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}y}h+\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}^2P}{\mathrm{d}y}h^2\tag{1.3}$$

继续计算之前必须重申对负指数的理解,$1/y$ 等于 y^{-1},$1/y^2$ 等于 y^{-2},将其一般化为

$$\frac{1}{y^n}=y^{-n}\tag{1.4}$$

因此

$$1/(1+y)^1=(1+y)^{-1};\ 1/(1+y)^2=(1+y)^{-2};\ 1/(1+y)^T=(1+y)^{-T}\cdots$$

在求二阶导数时要使用到这些规则。由于二阶导数只是一阶导数的微分,因此先求一阶导数

$$\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}y}=\frac{-100}{(1+y)^2}=-100\times\frac{1}{(1+y)^2}$$

相当于

$$-100\times(1+y)^{-2}$$

微分时就变成

$$-2\times(-100)\times(1+y)^{-3}$$

因此零息债券价格对收益率的二阶导数就是

$$\frac{\mathrm{d}^2P}{\mathrm{d}y^2}=\frac{200}{(1+y)^3}$$

当 $y=0.10$ 时

$$\frac{d^2P}{dy^2}=\frac{200}{1.10^3}\approx 150.2630$$

因此，二次近似值变成

$$90.0826+\frac{1}{2}(150.2630\times 0.01^2)=90.0826+0.5\times 0.0150=90.0901$$

取小数点后四位时它等于实际值。

1.1.3 使用微分度量债券价格风险

泰勒级数除以债券价格后的一阶项被称为修正久期(modified duration)，二阶项被称为凸性(convexity)，更高阶项在衡量债券价格敏感性时通常不是很重要的。

1. 债券价格波动性

现在用本章所介绍的一些数学方法和概念来研究债券的价格波动性。因为债券的到期收益率等于年度化的内部收益率，内部收益率使未来现金流的现值等于现期债券价格。

附息债券的现值的计算公式为

$$P_{CB}=\frac{CF_1}{(1+y)}+\frac{CF_2}{(1+y)^2}+\frac{CF_3}{(1+y)^3}+\cdots+\frac{CF_n}{(1+y)^n} \tag{1.5}$$

其中，y 是周期性的到期收益率，也就是反映现金流周期性的内部收益率。

这条曲线的切线的斜率就是价格对收益率的一阶导数。一阶导数再除以价格反映了收益率变化1%时，债券价格变化的百分比，被称为“修正久期”。

为了理解如何计算整个债券的一阶导数 dP/dy，我们首先计算单一现金流的现值。

$$P=CF_T\times\frac{1}{(1+y)^T} \tag{1.6}$$

其中，$1/(1+y)^T$ 是贴现因子，它等于1个货币单位用适当的即期利率进行 T 期贴现后的现值。显然，用1个货币单位的现值乘以将来到期的货币单位的数目就得到预期未来现金流的现值。

现在可以使用微分方法计算 dP/dy，但首先要把式(1.6)变形为

$$P=CF_T\times(1+y)^{-T} \tag{1.7}$$

dP/dy 就是

$$\frac{dP}{dy}=(-T)CF_T\times(1+y)^{-(1+T)} \tag{1.8}$$

因为通常在可能的情况下都把指数变成正的形式，上式右边就变成

$$\frac{(-T)CF_T}{(1+y)^{(T+1)}} \tag{1.9}$$

由于附息债券可以看成是零息债券的投资组合，上述方法可以推广到计算附息债券价格对收益率的一阶导数。首先求每期现金流的 dP/dy，然后再把这些一阶导数相加得到整个债券的 dP/dy。例如，考虑附息债券的价格方程

$$P_{CB}=\frac{CF_1}{(1+y)}+\frac{CF_2}{(1+y)^2}+\frac{CF_3}{(1+y)^3}+\cdots+\frac{CF_n}{(1+y)^n}$$

也可以表示为

$$P_{CB}=CF_1(1+y)^{-1}+CF_2(1+y)^{-2}+CF_3(1+y)^{-3}+\cdots+CF_n(1+y)^{-n}$$

根据计算零息债券 $\mathrm{d}P/\mathrm{d}y$ 的方法，每个现金流的 $\mathrm{d}P/\mathrm{d}y$ 分别是

$$\text{对 } CF_1,\quad \frac{\mathrm{d}P_1}{\mathrm{d}y}=\frac{(-1)CF_1}{(1+y)^2}$$

$$\text{对 } CF_2,\quad \frac{\mathrm{d}P_2}{\mathrm{d}y}=\frac{(-2)CF_2}{(1+y)^3}$$

$$\text{对 } CF_3,\quad \frac{\mathrm{d}P_3}{\mathrm{d}y}=\frac{(-3)CF_3}{(1+y)^4}$$

……

$$\text{对 } CF_n,\quad \frac{\mathrm{d}P_n}{\mathrm{d}y}=\frac{(-n)CF_n}{(1+y)^{n+1}} \tag{1.10}$$

$\mathrm{d}P/\mathrm{d}y=\mathrm{d}P_1/\mathrm{d}y+\mathrm{d}P_2/\mathrm{d}y+\cdots+\mathrm{d}P_n/\mathrm{d}y$。按微分规则把所有的单个导数合在一起就得到

$$\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}y}=\frac{(-1)CF_1}{(1+y)^2}+\frac{(-2)CF_2}{(1+y)^3}+\frac{(-3)CF_3}{(1+y)^4}+\cdots+\frac{(-n)CF_n}{(1+y)^{n+1}} \tag{1.11}$$

整理式(1.11)并把方程两边同除以 P(实际是乘以 $1/P$)，得到

$$\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}y}\cdot\frac{1}{P}=\frac{1}{(1+y)}\left[\frac{(-1)CF_1}{(1+y)^2}+\frac{(-2)CF_2}{(1+y)^3}+\frac{(-3)CF_3}{(1+y)^4}+\cdots+\frac{(-n)CF_n}{(1+y)^{n+1}}\right]\frac{1}{P} \tag{1.12}$$

方括号内的表达式就是久期，它是根据 Macaulay(1938)命名的。公式的右边被称作修正久期，在债券市场上常被用作债券利率风险的指标。修正久期可以理解成收益率在下一瞬间发生 1%变化时债券价格变化的近似百分比。

请注意，在计算久期时，使用到期收益率作为贴现率，这就相当于假设利率期限结构是水平的。因为不论期限长短对所有现金流都使用同一利率进行贴现，从而也就假设期限结构只是平行移动。

2. 修正久期的数据实例

为了说明计算修正久期时微分的应用，设想一个 2 年期债券，每半年付息 5%，到期收益率是每年 8%，价格和现金流方式是

$$P=\frac{5}{(1.04)}+\frac{5}{(1.04)^2}+\frac{5}{(1.04)^3}+\frac{105}{(1.04)^4}$$

$$=4.8077+4.6228+4.4450+89.7544=103.6299$$

首先，计算公式(1.12)的方括号中的值

$$\frac{(-1)\times 5}{(1.04)}+\frac{(-2)\times 5}{(1.04)^2}+\frac{(-3)\times 5}{(1.04)^3}+\frac{(-4)\times 5}{(1.04)^4}$$

$$=-4.0877+(-9.2456)+(-13.335)+(-359.0175)$$

$$=-386.4058 \tag{1.13}$$

乘以 $1/(1+y)$得

$$\frac{1}{1.04}\times(-386.4058)=\frac{-386.4058}{1.04}=-371.5440$$

最后,除以债券价格 103.629 9 得

$$\frac{-371.5440}{103.6299}=-3.5853$$

修正久期是与现金流周期有关的,债券市场的习惯是使用年久期,并且省略负号。由于本例中债券每年付息 2 次,所以年久期可以通过把计算值除以 2 求得,即 3.585 3/2=1.792 6。

修正久期可以被看成是表明债券的相对利率敏感性,尤其是债券价格变化的百分比可以看成负的修正久期乘以到期收益率的变化。在上面的债券分析中,收益率上升0.5%时,债券价格将下降 0.5%×1.792 6=0.896 3%。

1.1.4 约束条件下的最大化和最小化:拉格朗日乘数

在商业和金融业中,我们经常需要求函数在一定限制条件下的最大值和最小值。例如,在投资组合管理中,我们经常希望知道在最大风险水平下的期望收益。我们使用拉格朗日乘数来解决这个问题。

假设我们要最大化下面的函数:

$$R=5X+2X^2-4Y \tag{1.14}$$

同时受到约束:

$$2X+Y=20 \tag{1.15}$$

第一步,把约束函数变形,使一边等于 0,即

$$20-2X-Y=0$$

然后把约束条件乘以一个非特定变量 λ,即拉格朗日乘数:

$$\lambda(20-2X-Y) \tag{1.16}$$

与原函数一起构造一个新函数:

$$L(X,Y,\lambda)=5X+2X^2-4Y-\lambda(20-2X-Y) \tag{1.17}$$

这个新函数就是拉格朗日函数,把它对所有变量,包括 λ 微分,有

$$\frac{\partial L}{\partial X}=5+4X+2\lambda=0 \quad 因此 \quad 5+4X=-2\lambda$$

$$\frac{\partial L}{\partial Y}=-4+\lambda=0 \quad 因此 \quad \lambda=4$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda}=20-2X-Y=0 \quad 因此 \quad 2X+Y=20$$

求解:

$$\lambda=4$$

$$5+4X=-2\lambda$$

所以 $5+4X=-8$

$$4X=-13$$

所以 $X=-\frac{13}{4}=-3.25$

$$2X + Y = 20$$
$$2(-3.25) + Y = 20$$
$$-7.5 + Y = 20$$
$$Y = 27.5$$

1.2 概率论与现代金融

概率是度量某一事件发生的可能性的方法。它的值介于0(一定不会发生)和1(一定会发生)之间。概率分布是不确定事件发生的可能性(概率)的一种数学模型。

概率在金融分析中具有非常重要的作用,因为,几乎所有的金融决策结果都是不确定的。例如,因为股票价格每天都在变化,所以大多数人预期上市交易股票的未来价格是不确定的。我们可以预测股票的未来价格是什么样的,但我们也承认股票的真实价格可能与此不同。在极端情况下,提供固定利息率的银行或建房互助协会的利息可能也是不确定的,因为银行或建房互助协会可能会倒闭,这样我们将不会得到到期利息。我们一般认为银行或建房互助协会不会倒闭,否则我们将不会把钱存到那里。但无论如何,经验告诉我们这些类型的机构有时确实会倒闭,因此,我们能够得到的利息的数额也存在着某种程度的不确定性。

概率分布(probability distributions)描述了一个随机变量相关的概率是如何分布在这个变量的所有可能值中的。它们在决策的制订过程中是很重要的,因为它们使我们能够评价围绕所有事件的不确定性的数值,由此,它们能够被用于金融决策的制订过程中。

在本书中我们关注的是两组概率分布。第一组是要讨论的对象,包括对描述资产收益率行为有用的那些概率分布。这些分布的知识能够使我们评价金融投资组合的风险,以及正确地对诸如期权之类的金融衍生工具进行定价。这些分布包括对数正态分布、正态分布、二项式分布、Poisson 分布和 Pareto-Levy 分布。

第二组由某些描述性统计量的概率分布(被称为抽样分布)构成,这些统计量用于检验所作出的假设的显著性。这些分布包括 Student-t 分布,χ^2一分布和 F 分布。

本节的目的是对概率在现代金融中的运用做基本的介绍,然后再引进某些能应用于资产收益率分布的概率模型。关于概率理论,我们将先阐释概率方法;然后介绍一些用于计算概率的法则;接着讨论随机变量代数运算;最后将讨论很多能够广泛应用于金融领域的概率分布以及应用的实例。

1.2.1 概率方法

1. 古典概率或先验概率方法

当可能的不确定结果的范围是已知的和具有等可能性的情况下,可能应用古典概率或先验概率方法。我们可以应用逻辑判断来确定每种结果的概率。

我们考虑扔一个质地均匀的硬币,也就是说,扔硬币出现的是这个硬币的正面还是反面具有等可能性。鉴于硬币的构造,可能结果的范围仅限于2种(正面或反面)。结果是