阅卷组
组长书系

# 考研数学真题精选精解

## 概率论与数理统计200题

主 编 张天德 叶 宏 王春晓

紧跟大纲

全面透视最新命题趋势

全面收集

全真试题精心筛选

分类

编排梳理复习思路

深层详解

提供规范权威多样分析

山东科学技术出版社
www.lkj.com.cn

# 考研数学真题精选精解

## 概率论与数理统计200题

主　编　张天德　叶　宏　王春晓
副主编　林　慧　苗丽安

山东科学技术出版社

**图书在版编目(CIP)数据**

概率论与数理统计200题 / 张天德，叶宏，王春晓主编. —济南：山东科学技术出版社，2014
（考研数学真题精选精解）
ISBN 978-7-5331-7306-7

Ⅰ. ①概… Ⅱ. ①张… ②叶… ③王… Ⅲ. ①概率论—研究生—入学考试—题解②数理统计—研究生—入学考试—题解 Ⅳ. ①O21—44

中国版本图书馆CIP数据核字（2014）第064419号

**考研数学真题精选精解**
**——概率论与数理统计200题**

主编　张天德　叶　宏　王春晓

**出版者：山东科学技术出版社**
地址：济南市玉函路16号
邮编：250002　电话：(0531) 82098088
网址：www.lkj.com.cn
电子邮件：sdkj@sdpress.com.cn

**发行者：山东科学技术出版社**
地址：济南市玉函路16号
邮编：250002　电话：(0531) 82098071

**印刷者：山东新华印务有限责任公司**
地址：济南市世纪大道2366号
邮编：250104　电话：(0531)82079112

开本：787mm×1092mm　1/16
印张：5
版次：2014年5月第1版第1次印刷

**ISBN 978-7-5331-7306-7**
**定价：12.00元**

# 前　言

近几年国家教育部对硕士研究生入学考试数学大纲进行了一些修订，增加了一些新知识点，对考生的要求进一步增强。新的变化、新的要求，使数学在考研复习中的重要地位更加令人不敢忽视。一边是考试要求的不断提高，一边是众多学子因为数学分数过低而含泪折戟、败走麦城。数学，越来越成为广大考生在考研路上难以逾越的一道坎，难以释怀的一个结。

历年研究生数学考试试题，全面体现和反映了《全国硕士研究生入学统一考试数学考试大纲》的要求，体现了考试的重点、难点，也充分展示了重点题型。虽然每年的考研试题不尽相同，但是考试的知识范围和结构基本相同。熟悉历年试题及其解题方法不仅可以进一步掌握考试内容、考试要求，而且可以分析和提炼出考查重点，掌握命题规律，提高解题能力。

本书是一本理工类、经济类和农学门类考研学生备考数学的教材，由长期从事考研数学辅导和大学数学教学、研究的一线名师编写而成，在详细研究、系统整理历年研究生数学考试试题的基础上，根据试题类型和涉及的知识内容对其进行了分类，给出了典型的解题方法和常用技巧。每个试题前用数码标明该试题使用的年份、卷种、题分等信息。如某题前括号内的数码为2014104，表示此题为2014年数学一试卷中的一道4分题。

本书包含了近20年研究生入学考试概率论与数理统计的全部试题，通过全面分析考研命题特点，合理设计编排模式和知识点出场顺序，把握主要知识点以及知识点间的关联特性，感悟常用的解题思路与方法，我们总结出复习的范围、重点和应试解题的思路与技巧，独具匠心地设计、推出了这本高效、实用、新颖的考研数学复习教材《考研数学真题精选精解——概率论与数理统计200题》，将给您的数学复习带来令人欣喜的显著效果和快速提升。

本书最大的特点是紧跟最新考研数学大纲，深刻领会大纲精髓，全面覆盖考研知识点，在研究诸知识点相互关系和认知规律的基础上，研习和解答历年考研数学真题，对真题进行科学分类和详细解答，使广大考生能够通过对真题的认真演练，揭开考研数学的神秘面纱，达到考试时胸有成竹、应对自如的境界。本书各栏目特点：

**本章概括**　简洁概括本章学习及考查内容，切中本章考试重点，使广大考生在备考复习的过程中目标明确，有的放矢。

**考纲预览**　展示最新考试大纲要求，详尽解析考研数学最新大纲，便于考生统览全章，高屋建瓴，把握复习方向。

**真题详解** 提供了近20年试题及解析，详尽解析每道真题，精选相应试题供考生进行实战演练，将真题按知识点分类为小节，使考生能系统地掌握考点辐射的各种题型，举一反三，并用灵活的经典真题来掌握各个知识点，做到真正意义上的知识点灵活掌握。

**名师点拨** 考研辅导一线名师为您点拨，权威揭示数学方法，使考生在回顾重点知识点的同时，深入了解该知识点的内容和命题方向。

**方法综述** 资深考研辅导专家智慧结晶，以便帮助考生掌握各种基本题型的解题思路和方法，找到解决问题的关键、技巧和规律。

本书由张天德、叶宏、王春晓主编，林慧、苗丽安副主编。衷心希望我们精心打造的这本《考研数学真题精选精解——概率论与数理统计200题》能对您有所裨益。相信本书会为备考硕士研究生入学考试的学子带来好运！

编 者

# Foreword

# 序

纵观考研数学辅导教材市场，鱼龙混杂，既有结构严谨、内容翔实的名家名作，也不乏毫无新意的平庸之作、东拼西凑的剽窃之作，张天德教授的这本《考研数学真题精选精解——概率论与数理统计 200 题》令我耳目一新。

张天德教授近年来一直在全国十几个城市的大型考研辅导班授课，深受全国各地考生的欢迎。同时张教授也是我国硕士研究生入学考试数学阅卷组的负责人，之前已有数十本教材出版。为了创作一本实用的考研数学辅导教材，正确引导广大考生进行研究生入学考试的总复习，张教授结合他十几年的考研辅导经验，投入了大量心血，搜集相关资料，写成了针对广大考研学生的《考研数学真题精选精解——概率论与数理统计 200 题》一书。

浏览过后，我觉得这本书特点鲜明，对真题进行了科学的分类和规范、详细的解答，书中近 20 年的考研真题及详解无一不是张教授多年教学和研究心血的结晶。

历年研究生数学考试试题，全面体现和反映了《全国硕士研究生入学统一考试数学考试大纲》的要求，体现了考试的重点、难点，也充分展示了重点题型。作为多年从事考研数学辅导和参与命题工作的老师，我深知在考研数学复习中，一定量的真题训练是必不可少的，真题的掌握和吃透应是备考的必由之路，而对历年真题进行科学分类和全面解析正是本书的重点也是本书的特色所在。

张教授从近 20 年数学考试的试卷中精选出真题进行了解析，这些题目是历年来研究生考试数学试题的精华，集中反映了数学试题的考核重点和典型题型。张教授的这本《考研数学真题精选精解——概率论与数理统计 200 题》正是切合了广大考研学生的需要，可以有效地帮助考生解决真题复习这一备考过程中的重要问题。

这本书的栏目设置也颇有新意。本章概括、考纲预览、真题详解、名师点拨、方法综述，这五大新颖的栏目详尽解析了考研数学最新大纲，简洁概括了各章学习及考查的重点内容，使广大考研学生能够深入了解各个知识点的内容和命题方向，从而把握备考的重点和难点，找到解决问题的关键、技巧和规律，解决考研学子在考研复习过程中的问题，使考研数学的备考复习更加有效。

我认为这本书不愧为一本实用、新颖的考研数学复习教材，也是编者多年进行大学数学教学和考研辅导实践经验的总结。这本书不仅可作为硕士研究生入学考试应试者的复习用书，也可作为正在学习概率论与数理统计的高等院校学生的参考书。

作为广大考研学生的“老”朋友，我十分高兴地向大家推荐这本具有较高实用价值的图书，相信对广大考生考研数学备考会有一定帮助。

清华大学数学科学系

胡金德

# 目　录

# 第一章　随机事件及其概率

**本　章　概　括**

随机事件及其概率是整个概率论的基础，对后面的随机变量以及随机变量数字特征的理解与计算起着极大的作用.

## 第一节　随机事件与概率基本公式

### 考纲预览

**考试内容**……………………………………

随机事件与样本空间　事件的关系与运算　完备事件组　概率的概念　概率的基本性质　古典型概率　几何型概率　条件概率　概率的基本公式

**考试要求**……………………………………

1. 了解样本空间(基本事件空间)的概念，理解随机事件的概念，掌握事件的关系与运算.

2. 理解概率、条件概率的概念，掌握概率的基本性质，会计算古典型概率和几何型概率，掌握概率的加法公式、减法公式、乘法公式、全概率公式以及贝叶斯公式.

### 真题详解

**一、事件的表示及关系** ……………………………

**1.** (2001403)对于任意二事件 $A$ 和 $B$，与

$$A \cup B = B$$

不等价的是______.

(A) $A \subset B$　　(B) $\overline{B} \subset \overline{A}$

(C) $A\overline{B} = \varnothing$　　(D) $\overline{A}B = \varnothing$

**解：** 由 $A \cup B = B$ 则 $A \subset B$，故 $\overline{A}B$ 非空.

故应选(D).

**【名师点拨】** 本题考查随机事件的关系及运算，有时可以通过举例或画图的方式来辅助分析.

**2.** (2000303,2000403)在电炉上安装了 4 个温控器，其显示温度的误差是随机的．在使用过程中，只要有两个温控器显示的温度不低于临界温度 $t_0$，电炉就断电．以 $E$ 表示事件"电炉断电"，而 $T_{(1)} \leqslant T_{(2)} \leqslant T_{(3)} \leqslant T_{(4)}$ 为 4 个温控器显示的按递增顺序排列的温度值，则事件 $E$ 等于______.

(A) $\{T_{(1)} \geqslant t_0\}$　　(B) $\{T_{(2)} \geqslant t_0\}$

(C) $\{T_{(3)} \geqslant t_0\}$　　(D) $\{T_{(4)} \geqslant t_0\}$

**解：** $\{T_{(1)} \geqslant t_0\}$ 表示四个温控器显示温度均不低于 $t_0$

$\{T_{(2)} \geqslant t_0\}$ 表示至少三个温控器显示温度均不低于 $t_0$

$\{T_{(3)} \geqslant t_0\}$ 表示至少二个温控器显示温度均不低于 $t_0$

$\{T_{(4)} \geqslant t_0\}$ 表示至少一个温控器显示温度均不低于 $t_0$

故应选(C).

**【名师点拨】** 事件的表示并非考试的重点，极少单独出题，但是准确合理地表示事件是后面解应用题的基础.

## 二、古典概率与几何概率

**3.** (1996306)考虑一元二次方程 $x^2+Bx+C=0$，其中 $B$、$C$ 分别是将一枚骰子接连掷两次先后出现的点数，求该方程有实根的概率 $p$ 和有重根的概率 $q$.

**解**：一枚骰子掷两次，其基本事件总数为36，方程有实根的充分必要条件是 $B^2\geqslant 4C$，或 $C\leqslant B^2/4$

易见

| $B$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 使 $C\leqslant B^2/4$ 的基本事件个数 | 0 | 1 | 2 | 4 | 6 | 6 |
| 使 $C=B^2/4$ 的基本事件个数 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 |

由此可见，使方程有实根的基本事件个数为

$$1+2+4+6+6=19$$

因此 $p=\dfrac{19}{36}$

方程有重根的充分必要条件是 $B^2=4C$ 或 $C=B^2/4$，满足此条件的基本事件共有 2 个，

因此 $q=\dfrac{2}{36}=\dfrac{1}{18}$.

**【名师点拨】**古典概型近几年很少单独命题，但是作为基础知识还是要适当关注．解此类题目要注意基本事件数不遗漏、不重复．

**4.** (2007104，2007304，2007404)在区间(0，1)中随机地取两个数，则这两个数之差的绝对值小于 $\frac{1}{2}$ 的概率为______.

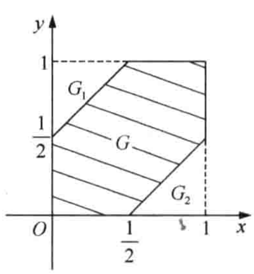


图 4

**解**：这是一个几何型概率的计算题．设所取的两个数分别为 $x$ 和 $y$，则以 $x$ 为横坐标以 $y$ 为纵坐标的点 $(x,y)$ 随机地落在边长为1的正方形内，如图 4 所示．

设事件 $A$ 表示"所取两数之差的绝对值小于 $\frac{1}{2}$"，则样本空间

$$\Omega=\{(x,y):0<x<1,0<y<1\};$$

事件 $A$ 的样本点集合为区域 $G$ 中所有的点，而 $G=\{(x,y):0<x<1,0<y<1,|y-x|<\frac{1}{2}\}$．区域 $\Omega$ 的面积 $S_\Omega=1$，区域 $G$ 的面积

$$S_G=S_\Omega-S_{G_1}-S_{G_2}=1-\frac{1}{4}=\frac{3}{4}.$$

因此 $P(A)=\dfrac{S_G}{S_\Omega}=\dfrac{3}{4}$.

故应填 $\frac{3}{4}$.

**【名师点拨】**几何概率是考研数学中的常考内容：若样本空间是一个几何区域，且每个样本点的出现具有等可能性，则

$$P(A)=\frac{m(A)}{m(\Omega)},$$

其中 $m(A)$、$m(\Omega)$ 为测度．几何概率可以与第二章、第三章的均匀分布相结合，根据题意选择合适的方法，例如 83 题、85 题也可以用几何概率计算．

## 三、概率基本公式及条件概率

**5.** (2012104，2012304)设 $A,B,C$ 是随机事件，$A$ 与 $C$ 互不相容，$P(AB)=\frac{1}{2}$，$P(C)=\frac{1}{3}$，则 $P(AB\mid\overline{C})=$______.

**解**：
$$P(AB\mid\overline{C})=\frac{P(AB\overline{C})}{P(\overline{C})}=\frac{P(AB)-P(ABC)}{1-P(C)}=\frac{P(AB)}{1-P(C)}=\frac{3}{4}.$$

**【名师点拨】**本题考查了条件概率公式，减法公式，逆事件概率公式以及事件的互斥关系，具有一定的综合性，属于常考题型．

**6.** (2014104，2014304)设随机事件 $A$ 与 $B$ 相互独立，且 $P(B)=0.5$，$P(A-B)=0.3$，则 $P(B-A)=$______.

(A)0.1　(B)0.2　(C)0.3　(D)0.4

**解**：$P(A-B)=P(A)-P(AB)$

$=P(A)-P(A)P(B)$

$=P(A)[1-P(B)]=P(A)\times 0.5$

$\xlongequal{令} 0.3$，

所以 $P(A)=0.6$.

则

$$P(B-A)=P(B)-P(AB)$$

$=P(B)-P(A)P(B)$

$=P(B)[1-P(A)]=0.5\times 0.4$

$=0.2$.

故应选(B).

7. (1998103)设 $A$、$B$ 是两个随机事件，且

$0<P(A)<1,P(B)>0$，

$P(B\mid A)=P(B\mid \overline{A})$，

则必有______.

(A)$P(A\mid B)=P(\overline{A}\mid B)$

(B)$P(A\mid B)\neq P(\overline{A}\mid B)$

(C)$P(AB)=P(A)P(B)$

(D)$P(AB)\neq P(A)P(B)$

**解**：由 $P(B\mid A)=P(B\mid \overline{A})$ 得

$$\frac{P(AB)}{P(A)}=\frac{P(B\overline{A})}{1-P(A)}=\frac{P(B)-P(AB)}{1-P(A)}$$

即　$P(AB)=P(A)P(B)$

故应选(C).

**【名师点拨】**本题可直接选择(C). 因为由题设 $P(B\mid A)=P(B\mid \overline{A})$ 知 $A$、$B$ 相互独立，即 $P(AB)=P(A)P(B)$.

8. (1996303)已知 $0<P(B)<1$ 且

$P[(A_1+A_2)\mid B]=P(A_1\mid B)+P(A_2\mid B)$，

则下列选项成立的是______.

(A)$P[(A_1+A_2)\mid \overline{B}]=P(A_1\mid \overline{B})+P(A_2\mid \overline{B})$

(B)$P(A_1B+A_2B)=P(A_1B)+P(A_2B)$

(C)$P(A_1+A_2)=P(A_1\mid B)+P(A_2\mid B)$

(D)$P(B)=P(A_1)P(B\mid A_1)+P(A_2)P(B\mid A_2)$

**解**：由已知及等式

$P[(A_1+A_2)\mid B]$

$=P(A_1\mid B)+P(A_2\mid B)-P(A_1A_2\mid B)$

推得　$P(A_1A_2\mid B)=0$

从而有

$$P(A_1A_2B)=0$$

于是

$$P(A_1B+A_2B)=P(A_1B)+P(A_2B)$$

(B) 正确.

故应选(B).

**【名师点拨】**本题也可利用条件概率定义：

$$\frac{P(A_1B+A_2B)}{P(B)}=\frac{P(A_1B)}{P(B)}+\frac{P(A_2B)}{P(B)}$$

$(P(B)\neq 0)$，故

$$P(A_1B+A_2B)=P(A_1B)+P(A_2B)$$

9. (2006104,2006404)设 $A,B$ 为随机事件，且 $P(B)>0,P(A\mid B)=1$，则必有______.

(A)$P(A\cup B)>P(A)$

(B)$P(A\cup B)>P(B)$

(C)$P(A\cup B)=P(A)$

(D)$P(A\cup B)=P(B)$

**解**：因为 $P(A\mid B)=1$，故 $\dfrac{P(AB)}{P(B)}=1$，即

$P(AB)=P(B)$

则 $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)$

$=P(A)$.

故应选(C).

10. (1996403)设任意两事件 $A$、$B$，$A\subset B$，$P(B)>0$，则______.

(A)$P(A)<P(A\mid B)$

(B)$P(A)\leqslant P(A\mid B)$

(C)$P(A)>P(A\mid B)$

(D)$P(A)\geqslant P(A\mid B)$

**解**：$A\subset B\Rightarrow AB=A$

故 $P(A\mid B)=\dfrac{P(AB)}{P(B)}=\dfrac{P(A)}{P(B)}\geqslant P(A)$

$(0<P(B)\leqslant 1)$.

故应选(B).

11. (2009304)设事件 $A$ 与事件 $B$ 互不相容，则

(A)$P(\overline{A}\,\overline{B})=0$.

(B)$P(AB)=P(A)P(B)$.

(C)$P(A)=1-P(B)$.

(D)$P(\overline{A}\cup\overline{B})=1$.

**解**：因为 $A$、$B$ 互不相容，所以 $P(AB)=0$.

则 $P(\overline{A}\cup\overline{B})=1-P(AB)=1$.

故应选(D).

四、全概率公式和贝叶斯公式 ……………………

12. (1997103)袋中有 50 个乒乓球，其中 20 个是黄球，30 个是白球，今有两人依次随机地从袋中各取一球，取后不放回，则第二个人取得黄球的概率是______.

**解**：设 $A$ 表示第一次取的是白球，$B$ 表示第二次取的是黄球.

则 $P(A)=\frac{3}{5}$，$P(\overline{A})=\frac{2}{5}$

且 $P(B\mid A)=\frac{20}{49}$，$P(B\mid\overline{A})=\frac{19}{49}$

由全概率公式知

$$P(B)=P(A)P(B\mid A)+P(\overline{A})P(B\mid\overline{A})$$
$$=\frac{3}{5}\times\frac{20}{49}+\frac{2}{5}\times\frac{19}{49}=\frac{2}{5}$$

故应填$\frac{2}{5}$.

**【名师点拨】**本题可以由抽签原理(抽签与先后次序无关)直接得到结论.例如，第二人取得黄球与第一人取到黄球概率同为$\frac{2}{5}$.

13. (1996103)设工厂 $A$ 和工厂 $B$ 的产品的次品率分别为 1% 和 2%，现从由 $A$ 和 $B$ 的产品分别占 60% 和 40% 的一批产品中随机抽取一件，发现是次品，则该次品属 $A$ 生产的概率是______.

**解**：$C$ 表示取到的是次品，

$P(A)=0.6$，$P(B)=0.4$

$P(C\mid A)=1\%$，$P(C\mid B)=2\%$

由贝叶斯公式

$$P(A\mid C)=\frac{P(AC)}{P(C)}$$
$$=\frac{P(A)P(C\mid A)}{P(A)P(C\mid A)+P(B)P(C\mid B)}$$
$$=\frac{0.6\times\frac{1}{100}}{0.6\times\frac{1}{100}+0.4\times\frac{2}{100}}=\frac{3}{7}$$

故应填$\frac{3}{7}$.

**【名师点拨】**贝叶斯公式不一定单独记忆，可以利用全概率公式作转换而得到，也可以利用条件概率公式推导.

14. (1998309)设有来自三个地区的各 10 名、15 名和 25 名考生的报名表，其中女生的报名表分别为 3 份、7 份和 5 份，随机地取一个地区的报名表，从中先后抽出两份.

(1) 求先抽到的一份是女生表的概率 $p$；

(2) 已知后抽到的一份是男生表，求先抽到的一份是女生表的概率 $q$.

**解**：设

$H_i=\{$报名表是第 $i$ 区考生的$\}$ $(i=1,2,3)\}$，

$A_j=\{$第 $j$ 次抽到的报名表是男生表$\}$ $(j=1,2)$，

则 $P(H_1)=P(H_2)=P(H_3)=\frac{1}{3}$

$P(A_1\mid H_1)=\frac{7}{10}$，

$P(A_1\mid H_2)=\frac{8}{15}$

$P(A_1\mid H_3)=\frac{20}{25}$

$$(1)\ p=P(\overline{A}_1)=\sum_{i=1}^{3}P(H_i)P(\overline{A}_1\mid H_i)$$
$$=\frac{1}{3}(\frac{3}{10}+\frac{7}{15}+\frac{5}{25})=\frac{29}{90}.$$

(2) 由全概率公式得

$P(A_2\mid H_1)=\frac{7}{10}$，$P(A_2\mid H_2)=\frac{8}{15}$

$P(A_2\mid H_3)=\frac{20}{25}$

$P(\overline{A}_1A_2\mid H_1)=\frac{7}{30}$，$P(\overline{A}_1A_2\mid H_2)=\frac{8}{30}$

$P(\overline{A}_1A_2\mid H_3)=\frac{5}{30}$

$$P(A_2)=\sum_{i=1}^{3}P(H_i)P(A_2\mid H_i)$$
$$=\frac{1}{3}[\frac{7}{10}+\frac{8}{15}+\frac{20}{25}]=\frac{61}{90}$$

$$P(\overline{A}_1A_2)=\sum_{i=1}^{3}P(H_i)P(\overline{A}_1A_2\mid H_i)$$
$$=\frac{1}{3}[\frac{7}{30}+\frac{8}{30}+\frac{5}{30}]=\frac{2}{9}$$

因此，$q=P(\overline{A}_1\mid A_2)=P(\overline{A}_1A_2)/P(A_2)$

$$=\frac{\frac{2}{9}}{\frac{61}{90}}=\frac{20}{61}.$$

【名师点拨】全概率公式是第一章较重要的考点之一，除了可以单独命题之外，也可以与其他内容综合命题．例如在 2014，2009，2008 年的考研数学中，将全概率公式与随机变量的分布结合在一起，有较强的综合性．

15．(2005104，2005304，2005404)从数 1，2，3，4 中任取一个数，记为 $X$，再从 $1,2,\cdots,X$ 中任取一个数，记为 $Y$，则 $P\{Y=2\}=$ ______．

**解**：本题涉及到两次试验，想到用全概率公式，第一次试验的各种结果即为完备事件组

$$
\begin{aligned}
P\{Y=2\} &= P\{X=1\}P\{Y=2\mid X=1\} \\
&\quad + P\{X=2\}P\{Y=2\mid X=2\} \\
&\quad + P\{X=3\}P\{Y=2\mid X=3\} \\
&\quad + P\{X=4\}P\{Y=2\mid X=4\} \\
&= \frac{1}{4}\times\left(0+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)=\frac{13}{48}
\end{aligned}
$$

故应填$\frac{13}{48}$．

【名师点拨】此题也可以将$(X,Y)$视为二维随机变量，利用第三章的知识先求出联合分布律，再得出边缘概率 $P\{Y=2\}$，方法较繁琐．

### 方 法 综 述

本节内容以考查概念与计算为主，题型主要是选择题、填空题，单独以计算题形式出现的可能性较小，以本节知识作为工具和其他知识结合起来综合命题的可能性较大．

虽然本节内容不是考试的重点，但它是整个概率论部分的基础．所以一定要重视．对概念要深刻理解，对公式要熟练掌握．

## 第二节 事件的独立性

### 考 纲 预 览

**考试内容**……………………………………

事件的独立性　　独立重复试验

**考试要求**……………………………………

理解事件的独立性的概念，掌握用事件独立性进行概率计算；理解独立重复试验的概念，掌握计算有关事件概率的方法．

### 真 题 详 解

16．(2003304)将一枚硬币独立地掷两次，引进事件：$A_1=\{$掷第一次出现正面$\}$，$A_2=\{$掷第二次出现正面$\}$，$A_3=\{$正、反面各出现一次$\}$，$A_4=\{$正面出现两次$\}$，则事件 ______．

(A)$A_1,A_2,A_3$ 相互独立

(B)$A_2,A_3,A_4$ 相互独立

(C)$A_1,A_2,A_3$ 两两独立

(D)$A_2,A_3,A_4$ 两两独立

**解**：按照相互独立与两两独立的定义进行验算即可，注意应先检查两两独立，若成立，再检验是否相互独立．

因为$P(A_1)=\frac{1}{2},P(A_2)=\frac{1}{2}$

$$P(A_3)=\frac{1}{2},P(A_4)=\frac{1}{4}$$

且
$$
\begin{aligned}
&P(A_1A_2)=\frac{1}{4},P(A_1A_3)=\frac{1}{4} \\
&P(A_2A_3)=\frac{1}{4},P(A_2A_4)=\frac{1}{4} \\
&P(A_1A_2A_3)=0
\end{aligned}
$$

可见有
$$
\begin{aligned}
&P(A_1A_2)=P(A_1)P(A_2) \\
&P(A_1A_3)=P(A_1)P(A_3) \\
&P(A_2A_3)=P(A_2)P(A_3) \\
&P(A_1A_2A_3)\neq P(A_1)P(A_2)P(A_3) \\
&P(A_2A_4)\neq P(A_2)P(A_4)
\end{aligned}
$$

故 $A_1,A_2,A_3$ 两两独立但不相互独立；$A_2,A_3,A_4$ 不两两独立更不相互独立．

故应选(C).

【名师点拨】用排除法更简单:

因为 $A_3$ 和 $A_4$ 互斥,即 $A_3A_4=\varnothing$,则 $A_3$ 与 $A_4$ 不独立,故排除(B)、(D).

若(A)对,则(C)也对,因为单项选择,故(A)不正确,只能选(C).另外,本题应假设硬币均匀,否则结论不一定成立.

**17.** (2000403)设 $A,B,C$ 三个事件两两独立,而 $A,B,C$ 相互独立的充分必要条件是______.

(A) $A$ 与 $BC$ 独立

(B) $AB$ 与 $A\cup C$ 独立

(C) $AB$ 与 $AC$ 独立

(D) $A\cup B$ 与 $A\cup C$ 独立

**解:**由 $P(AB)=P(A)P(B)$,

$P(AC)=P(A)\cdot P(C)$,

$P(BC)=P(B)\cdot P(C)$ 知,

$A,B,C$ 相互独立 $\Leftrightarrow P(ABC)=P(A)P(B)P(C)\Leftrightarrow P(ABC)=P(A)P(BC)\Leftrightarrow A$ 与 $BC$ 独立.

故应选(A).

【名师点拨】以上两题主要考查"相互独立"与"两两独立"的区别.这种题型在考研数学中经常出现、值得考生关注.

**18.** (2002408)设 $A,B$ 是任意二事件,其中 $A$ 的概率不等于0和1,证明:

$$P(B\mid A)=P(B\mid\overline{A})$$

是事件 $A$ 与 $B$ 独立的充分必要条件.

**证明:**由 $A$ 的概率不等于0和1,知题中两个条件概率都存在.

(1) 必要性.由事件 $A$ 与 $B$ 独立,知事件 $\overline{A}$ 与 $B$ 也独立,因此

$$P(B\mid A)=P(B),P(B\mid\overline{A})=P(B),$$

从而

$$P(B\mid A)=P(B\mid\overline{A}).$$

(2) 充分性.由 $P(B\mid A)=P(B\mid\overline{A})$,可见

$$\frac{P(AB)}{P(A)}=\frac{P(\overline{A}B)}{P(\overline{A})}=\frac{P(B)-P(AB)}{1-P(A)}$$

$$P(AB)[1-P(A)]=P(A)P(B)-P(A)P(AB)$$

$$P(AB)=P(A)P(B)$$

因此 $A$ 和 $B$ 独立.

**19.** (1994303)设 $0<P(A)<1,0<P(B)<1$, $P(A\mid B)+P(\overline{A}\mid\overline{B})=1$,则______.

(A) 事件 $A$ 和 $B$ 互不相容

(B) 事件 $A$ 和 $B$ 互相对立

(C) 事件 $A$ 和 $B$ 互不独立

(D) 事件 $A$ 和 $B$ 相互独立

**解:**因为

$$P(A\mid B)+P(\overline{A}\mid\overline{B})=P(A\mid B)+1-P(A\mid\overline{B})=1,$$

所以

$$P(A\mid B)-P(A\mid\overline{B})=0,$$

$$P(A\mid B)=P(A\mid\overline{B}),$$

$$\frac{P(AB)}{P(B)}=\frac{P(A\overline{B})}{P(\overline{B})},$$

$$P(AB)[1-P(B)]=P(B)P(A\overline{B})$$

$$P(AB)=P(B)[P(AB)+P(A\overline{B})]=P(B)P[A(B+\overline{B})]=P(B)P(A).$$

故应选(D).

【名师点拨】以上两题的结论可以记住并且当作事件独立性的判别法直接使用.一般地,下列四个条件均可作为判断独立的充要条件:

(1) $P(AB)=P(A)P(B)$

(2) $P(B\mid A)=P(B)\quad(P(A)>0)$.

(3) $P(B\mid A)=P(B\mid\overline{A})\quad(0<P(A)<1)$

(4) $P(B\mid A)+P(\overline{B}\mid\overline{A})=1\quad(0<P(A)<1)$

**20.** (2000103)设两个相互独立的事件 $A$ 和 $B$ 都不发生的概率为 $\frac{1}{9}$,$A$ 发生 $B$ 不发生的概率与 $B$ 发生 $A$ 不发生的概率相等,则 $P(A)=$______.

**解:**由题设 $A$、$B$ 相互独立,即

$$P(AB)=P(A)P(B),$$

且

$$P(\overline{A}\,\overline{B})=\frac{1}{9},P(A\overline{B})=P(\overline{A}B),$$

即有

$$\begin{cases} P(\overline{A}\,\overline{B}) = P(\overline{A})P(\overline{B}) = \frac{1}{9} \\ P(A) - P(AB) = P(B) - P(AB) \end{cases}$$

也即

$$\begin{cases} [1-P(A)][1-P(B)] = \frac{1}{9} \\ P(A) = P(B) \end{cases}$$

$\Rightarrow [1-P(A)]^2 = \frac{1}{9}$

解得 $P(A) - 1 = \pm \frac{1}{3}$，$P(A) = \frac{4}{3}$ 或 $P(A) = \frac{2}{3}$

由于 $P(A) \leqslant 1$，故 $P(A) = \frac{2}{3}$.

故应填$\frac{2}{3}$.

**【名师点拨】**本题可直接利用独立的性质：$A$ 与 $B$，$A$ 与 $\overline{B}$，$\overline{A}$ 与 $B$，$\overline{A}$ 与 $\overline{B}$ 中有一对相互独立，则其余三对也相互独立. 因此

$P(\overline{A}\,\overline{B}) = P(\overline{A})P(\overline{B})$，

$P(A\overline{B}) = P(A)P(\overline{B})$，

$P(\overline{A}B) = P(\overline{A})P(B)$.

**21.** (1999103)设两两相互独立的三事件 $A,B$ 和 $C$ 满足条件：

$ABC = \varnothing$，

$P(A) = P(B) = P(C) < \frac{1}{2}$，

且已知 $P(A \cup B \cup C) = \frac{9}{16}$，则 $P(A) =$ ______.

**解：**$\frac{9}{16} = P(A \cup B \cup C)$

$= P(A) + P(B) + P(C) - P(AB) - P(AC) - P(BC) + P(ABC)$

$= P(A) + P(B) + P(C) - P(A)P(B) - P(A)P(C) - P(B)P(C)$

(因为 $A,B,C$ 两两相互独立)

设 $P(A) = P$，则上式写成

$\frac{9}{16} = 3P - 3P^2$，解得 $P = \frac{1}{4}$.

故应填$\frac{1}{4}$.

**22.** (1996403)一实习生用一台机器接连独立地制造3个同种零件，第 $i$ 个零件是不合格品的概率 $p_i = \frac{1}{i+1}$ $(i = 1,2,3)$，以 $X$ 表示3个零件中合格品的个数，则 $P\{X = 2\}$ = ______.

**解：**设 $A_i$ 表示第 $i$ 个零件是不合格品，则

$$P(A_i) = p_i = \frac{1}{i+1} \quad (i = 1,2,3)$$

$P\{X = 2\}$

$= P(A_1\overline{A}_2\overline{A}_3 + \overline{A}_1A_2\overline{A}_3 + \overline{A}_1\overline{A}_2A_3)$

$= P(A_1)P(\overline{A}_2)P(\overline{A}_3) + P(\overline{A}_1)P(A_2)P(\overline{A}_3) + P(\overline{A}_1)P(\overline{A}_2)P(A_3)$

$= \frac{1}{2}(1-\frac{1}{3})(1-\frac{1}{4}) + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}(1-\frac{1}{4}) + \frac{1}{2}(1-\frac{1}{3})\frac{1}{4} = \frac{11}{24}$

故应填$\frac{11}{24}$.

**23.** (1998403)设 $A,B,C$ 是三个相互独立的随机事件，且 $0 < P(C) < 1$. 则在下列给定的四对事件中不相互独立的是______.

(A) $\overline{A+B}$ 与 $C$　　(B) $\overline{AC}$ 与 $\overline{C}$

(C) $\overline{A-B}$ 与 $\overline{C}$　　(D) $\overline{AB}$ 与 $\overline{C}$

**解：**$A$、$B$、$C$ 相互独立时，(A)、(C)、(D) 显然独立，应选(B).

事实上，由 $0 < P(C) < 1$ 知 $C$ 并非必然事件与不可能事件故$\overline{AC}$ 与 $\overline{C}$ 不独立.

故应选(B).

**【名师点拨】**利用多个事件相互独立的性质非常方便. 例如：$A$、$B$、$C$、$D$ 相互独立时，$A$、$B$ 作任意运算得到的事件 $\sigma_1(A,B)$ 与 $C$、$D$ 作任意运算得到的事件 $\sigma_2(C,D)$ 相互独立.

**24.** (2003404) 对于任意二事件 $A$ 和 $B$，______.

(A) 若 $AB \neq \varnothing$，则 $A,B$ 一定独立

(B) 若 $AB \neq \varnothing$，则 $A,B$ 有可能独立

(C) 若 $AB = \varnothing$，则 $A,B$ 一定独立

(D) 若 $AB = \varnothing$，则 $A,B$ 一定不独立

**解：**由独立的定义可排除(A)(C)(D)

故应选(B).

**【名师点拨】**本题考查独立与互斥之间的关系.许多考生错误的选择了(D),实际上"独立不互斥,互斥不独立"针对的是$P(A)\neq 0$,$P(B)\neq 0$的情形,而本题针对的是"任意"事件$A$和$B$,故应选(B).

**25.** (2007104,2007304,2007404)某人向同一目标独立重复射击,每次射击命中目标的概率为$p(0<p<1)$,则此人第4次射击恰好第2次命中目标的概率为______.

(A)$3p(1-p)^2$　　(B)$6p(1-p)^2$

(C)$3p^2(1-p)^2$　　(D)$6p^2(1-p)^2$

**解**:设事件$A=$"第4次射击恰好第2次命中目标",则$A$表示共射击4次,其中前3次只有1次击中目标,且第4次击中目标.因此

$$P(A)=C_3^1p(1-p)^2\cdot p=3p^2(1-p)^2.$$

故应选(C).

**【名师点拨】**要注意本题与"4次射击命中2次"的区别.

## 方法综述

本节是常考内容,主要考查独立性的判断及应用,经常以选择题的方式来考查两个事件及多个事件的独立性,另外,运用事件的独立性解应用题也是常考题型.

考生复习本节内容时,对于多个事件的独立性,要分清"相互独立"与"两两独立"的区别.运用二项概率公式时,能否将应用题目转化成贝努里概型往往是解决问题的关键.

# 第二章 随机变量及其概率分布

## 本 章 概 括

随机事件是对随机试验结果的一种定性描述.为更好地研究随机试验,需要将试验结果数量化,由此引入了随机变量的概念并研究其概率分布,这是概率论的中心内容.

## 考 纲 预 览

**考试内容**……………………………………………

随机变量及其概率分布 随机变量的分布函数的概念及其性质 离散型随机变量的概率分布 连续型随机变量的概率密度 常见随机变量的概率分布 随机变量函数的概率分布

**考试要求**……………………………………………

**1**.理解随机变量及其概率分布的概念.理解分布函数 $F(x)=P\{X\leqslant x\}(-\infty<x<+\infty)$ 的概念及性质.会计算与随机变量有关的事件的概率.

**2**.理解离散型随机变量及其概率分布的概念,掌握 $0-1$ 分布、二项分布、超几何分布、泊松(Poisson)分布及其应用.

**3**.了解泊松定理的结论和应用条件,会用泊松分布近似表示二项分布.

**4**.理解连续型随机变量及其概率密度的概念,掌握均匀分布、正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$、指数分布及其应用,其中参数为 $\lambda(\lambda>0)$ 的指数分布的密度函数为

$$f(x)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda x}, & x>0\\ 0, & x\leqslant 0.\end{cases}$$

**5**.会求随机变量函数的分布.

## 真 题 详 解

### 一、离散型随机变量的概率分布 ……………

**26**.(2008104,2008304,2008404)设随机变量 $X$ 服从参数为 1 的泊松分布,则 $P\{X=EX^2\}=$______.

**解**:因为 $X$ 服从参数为 1 的泊松分布,而 $DX=EX^2-(EX)^2$,所以 $EX^2=2$,

故 $P\{X=2\}=\dfrac{1}{2}e^{-1}$.

故应填 $\dfrac{e^{-1}}{2}$.

**27**.(1995308,1995408)假设一厂家生产的每台仪器以概率 0.7 可以直接出厂,以概率 0.3 需进一步调试,经调试后以概率 0.8 可以出厂,以概率 0.2 定为不合格品不能出厂,现该厂新生产了 $n(n\geqslant 2)$ 台仪器(假设各台仪器的生产过程相互独立).求

(1) 全部能出厂的概率 $\alpha$;

(2) 其中恰好有两件不能出厂的概率 $\beta$;

(3) 其中至少有两件不能出厂的概率 $\theta$.

**解**:设 $A=\{$仪器需进一步调试$\}$,$B=\{$仪器能出厂$\}$

则 $$\begin{aligned}P(B)&=P(\bar{A}+AB)\\&=P(\bar{A})+P(AB)\\&=1-P(A)+P(A)P(B\mid A)\\&=0.94.\end{aligned}$$

由二项概率公式可知:

(1)$\alpha=0.94^n$

(2)$\beta=C_n^2\cdot 0.94^{n-2}\cdot 0.06^2$

(3)$\theta=1-C_n^1\cdot 0.94^{n-1}\cdot 0.06-0.94^n$.

**28**.(1997403)设随机变量 $X$ 服从参数为 $(2,p)$ 的二项分布,随机变量 $Y$ 服从参数为 $(3,p)$ 的二项分布,若 $P\{X\geqslant 1\}=\dfrac{5}{9}$,则

$P\{Y \geqslant 1\} =$ ______.

**解**：$\frac{5}{9} = P\{X \geqslant 1\} = 1 - P\{X < 1\}$

$= 1 - C_2^0 p^0 (1-p)^2 = 1 - (1-p)^2$，

$(1-p) = \frac{2}{3}$

$P\{Y \geqslant 1\} = 1 - P\{Y < 1\}$

$= 1 - C_3^0 p^0 (1-p)^3 = 1 - (\frac{2}{3})^3 = \frac{19}{27}$

故应填$\frac{19}{27}$.

**二、连续型随机变量的概率分布** ……………

**29.** (2010104,2010304)设 $f_1(x)$ 为标准正态分布的概率密度，$f_2(x)$ 为$[-1,3]$上均匀分布的概率密度，若

$$f(x) = \begin{cases} af_1(x) & x \leqslant 0 \\ bf_2(x) & x > 0 \end{cases} \quad (a > 0, b > 0)$$

为概率密度，则 $a,b$ 应满足______.

(A) $2a + 3b = 4$.　　(B) $3a + 2b = 4$.

(C) $a + b = 1$.　　(D) $a + b = 2$.

**解**：由于$f_1(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$，

$$f_2(x) = \begin{cases} \frac{1}{4}, & 1 \leqslant x \leqslant 3, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$$

故 $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$

$= a\int_{-\infty}^{0} f_1(x)\mathrm{d}x + b\int_{0}^{+\infty} f_2(x)\mathrm{d}x$

$= a \times \frac{1}{2} + b\int_0^3 \frac{1}{4}\mathrm{d}x = \frac{a}{2} + \frac{3}{4}b = 1.$

可得 $2a + 3b = 4$.

故应选(A).

**【名师点拨】**本题除了考查密度性质 $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x = 1$ 之外，还涉及到两个常见分布：正态分布与均匀分布，其中 $f_1(x)$ 为标准正态分布的密度，故 $f_1(x)$ 为偶函数，且 $\int_{-\infty}^{+\infty} f_1(x)\mathrm{d}x = 2\int_{-\infty}^{0} f_1(x)\mathrm{d}x = 1$，由此可得出$\int_{-\infty}^{0} f_1(x) = \frac{1}{2}$.

**30.** (1998303,1998403)设 $F_1(x)$ 与 $F_2(x)$ 分别为随机变量 $X_1$ 与 $X_2$ 的分布函数. 为使 $F(x) = aF_1(x) - bF_2(x)$ 是某一随机变量的分布函数，在下列给定的各组数值中应取______.

(A) $a = \frac{3}{5}, b = -\frac{2}{5}$

(B) $a = \frac{2}{3}, b = \frac{2}{3}$

(C) $a = -\frac{1}{2}, b = \frac{3}{2}$

(D) $a = \frac{1}{2}, b = -\frac{3}{2}$

**解**：由分布函数的性质，$\lim\limits_{x\to+\infty} F_1(x) = 1$，

$\lim\limits_{x\to+\infty} F_2(x) = 1$

要使 $F(x) = aF_1(x) - bF_2(x)$ 为某一随机变量的分布函数，　则　$\lim\limits_{x\to+\infty} F(x) = 1$

即　$a \lim\limits_{x\to+\infty} F_1(x) - b \lim\limits_{x\to+\infty} F_2(x) = 1$

因此　$a - b = 1$.

故应选(A).

**31.** (2011104,2011304)设 $F_1(x)$，$F_2(x)$ 为两个分布函数，其相应的概率密度 $f_1(x)$，$f_2(x)$ 是连续函数，则必为概率密度的是______.

(A) $f_1(x)f_2(x)$.

(B) $2f_2(x)F_1(x)$.

(C) $f_1(x)F_2(x)$.

(D) $f_1(x)F_2(x) + f_2(x)F_1(x)$.

**解**：检验概率密度的性质：

$f_1(x)F_2(x) + f_2(x)F_1(x) \geqslant 0$，

$\int_{-\infty}^{+\infty} [f_1(x)F_2(x) + f_2(x)F_1(x)]\mathrm{d}x$

$= \int_{-\infty}^{+\infty} [F'_1(x)F_2(x)$

$\quad + F'_2(x)F_1(x)]\mathrm{d}x$

$= F_1(x)F_2(x)\Big|_{-\infty}^{+\infty} = 1$，

可知 $f_1(x)F_2(x) + f_2(x)F_1(x)$ 满足概率密度的两条性质.

故应选(D).

**【名师点拨】**本题将多个基本知识点综合在一起：

(1) 概率密度的性质：

$f(x) \geqslant 0$，　$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x = 1$；