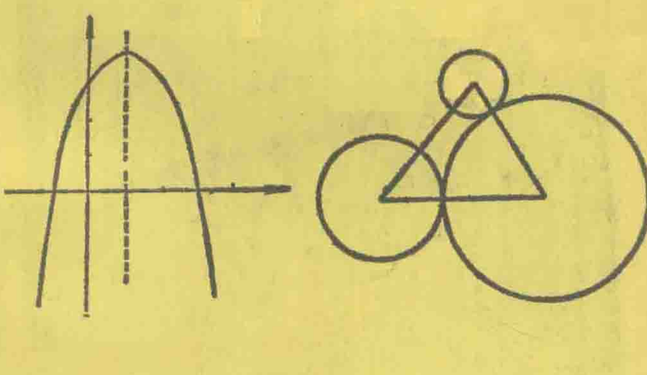
中小学教师参考丛书

初中数学题解思维训练



光明日报出版社

初中数学解题思维训练

主编　翟连林　赵学恒
编者　吴绪官　戴邦毅　马宝奇
　　　刘玉华　李寿高　罗锦祥

光明日报出版社

（京新登字101号）

初中数学解题思维训练
翟连林　赵学恒　主编

光明日报出版社出版发行
（北京永安路106号）
新华书店北京发行所经销
北京市朝阳区建外印刷厂印刷

787×1092毫米1/32开本　印张 9.875　222千字
1991年11月第1版　1991年11月第1次印刷
1—15400册　定价：3.60元
统一书号：ISBN 7-80091-190-x/G·483

前　言

为了帮助初中学生掌握解题方法，提高解题能力，并为初中数学教师提供一份实用的参考资料，我们编写了本书。

全书分两大部分：第一部分阐述了解题思维的过程，解题思维过程分析的基本方法，解决数学问题思维过程的四大环节以及怎样培养自己的思维能力和良好的思维品质。第二部分根据初中数学未来的发展趋势，目前的实际教学情况，结合全国各地的“中考”信息，绘制了章节知识结构与思维过程图以及重点、难点一览表，分析了掌握各章知识的心理障碍，编拟了复盖面大、灵活性强、启发性大的新颖训练试题。

在本书编写过程中，董平、刘世红二同志帮助抄稿和绘图，在此表示感谢。

由于我们的水平有限，书中缺点、错误在所难免，欢迎读者批评指正。

编者

1991年5月

目　录

第一部分　解题思维的培养

第二部分　解题思维训练系列

第一部分 解题思维的培养

第一章 思维过程的分析

学好数学是每一个同学的良好愿望，但不少同学反映数学难．难在何处？同学们可以从如下几个方面检查：是否懂得一点思维过程的分析？是否掌握了解决问题的思维过程？是否有一定的思维能力——是否具备良好的思维品质和创造性思维？

面临千差万别的数学题怎样去进行积极思维？开章想谈谈思维过程的分析。思维是人脑对客观现实间接的概括的反映。人的思维过程表现为分析与综合，比较，抽象概括与具体化．其中分析与综合是思维的基础。

第一节 分析与综合

分析和综合的基础在于实践．小学阶段，同学们在解题活动中有了对具体数量进行分析与综合的实际经验，进入初中后要求我们在解题中不直接依赖具体数量，而是对数的抽象通过字母、代数式去进行运算．由“数”——“字母”——“代数式”的抽象是通过分析与综合完成的，所以分析

与综合又是初中数学解题思维的基础.

一、分析与综合在解题中的作用

分析就是在头脑中把事物的整体分解为各种属性，各个部分和各个方面. 如为了加深对实数的理解将实数分解成有理数、无理数，再将有理数分解为整数、分数，最后将整数分解为正整数、零、负整数，分数分解为正分数、负分数去研究（如图 1-1.1）.

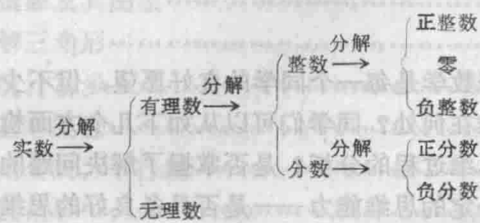


图 1-1.1

分析如同把某一体操活动分解为个别动作. 这种化整为零的“解剖”方法运用于解题之中，有助于我们考察命题中的各个细节，搜捕潜伏条件，不放过解题过程中的每一环节，使解题思维更加严谨.

综合则相反，它是在头脑中把事物的各种属性、各个部分和方面组合起来. 如将正整数、零、负整数的各种特性综合起来形成整数，同理将正分数、负分数综合成分数，继而将整数、分数的个别属性综合起来形成有理数，最后把有理数、无理数统括起来就得到初中阶段所学的数——实数（如图 1-1.2）.

$$\left.\begin{array}{l}\left.\begin{array}{l}\left.\begin{array}{l}\text{正整数}\\ \text{零}\\ \text{负整数}\end{array}\right\}\xrightarrow{\text{综合}}\text{整数}\\ \left.\begin{array}{l}\text{正分数}\\ \text{负分数}\end{array}\right\}\xrightarrow{\text{综合}}\text{分数}\end{array}\right\}\xrightarrow{\text{综合}}\text{有理数}\\ \text{无理数}\end{array}\right\}\xrightarrow{\text{综合}}\text{实数}$$

图 1-1.2

综合如同机器的组装，这种集零为整的有机结合被解题所用就能充分发挥命题的整体效应，加强命题中条件和结论的关联，有利于对命题的宏观控制．

在解题过程中，分析和综合是彼此相反而又紧密联系的过程．二者是同一思维过程中不可分割的两个方面，这是因为：（1）对整体的分析，同时也是对它的综合，分析不仅要分出整体的部分、方面和特征，而且还要揭示存在于整体中的各部分之间的联系和关系．（2）分析是从整体开始的（最初的综合），分析又是达到认识整体的手段、途径和方法，通过分析对整体认识得更深入，更充分，更全面．(3)在思维过程中，都包括着最初的综合——分析——再次综合这三个环节，如果三个环节协调一致，那么思维过程就进行得顺利．

例如：解方程组 $\begin{cases} x+y=\sqrt{x+y+2}, \\ \dfrac{x}{2}=\dfrac{y}{3}. \end{cases}$ 作如图1-1.3所示的分析与综合．

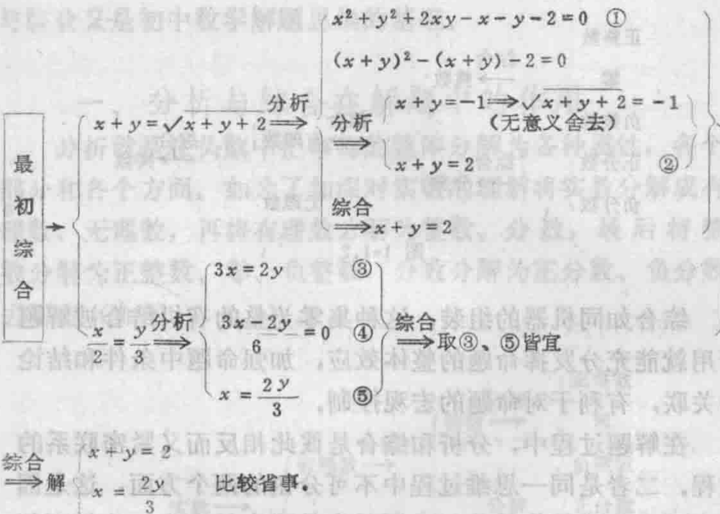


图 1-1.3

从分析中我们可以清楚地看到方程 $x+y=\sqrt{x+y+2}$ 转化为整式方程和方程 $\frac{x}{2}=\frac{y}{3}$ 等价变化的每一个细节，加强了对命题认识的知明度：在变化过程中发掘 $\sqrt{x+y+2}$ 是非负数的隐含条件，舍去 $x+y=-1$ 使解题更加严谨，选择 $x+y=2$ 与 $x=\frac{2y}{3}$ 组合使解题更加合理。

从综合中了解到解方程组的整体效应体现在无理方程的转化和新方程组的建立两个方面：解方程组 $\begin{cases} x+y=2 \\ x=\frac{2}{3}y \end{cases}$ 与方程组 $\begin{cases} x^2+y^2+2xy-x-y-2=0 \\ x=\frac{2}{3}y \end{cases}$ 都可达到解原方程组

$\begin{cases} x+y=\sqrt{x+y+2} \\ \dfrac{x}{2}=\dfrac{y}{3} \end{cases}$ 的目的，但前者有利于对命题的整体控制。

通过分析与综合告诉我们，（1）对方程 $x+y=\sqrt{x+y+2}$ 和 $\dfrac{x}{2}=\dfrac{y}{3}$ 的分析，也是对原方程组 $\begin{cases} x+y=\sqrt{x+y+2} \\ \dfrac{x}{2}=\dfrac{y}{3} \end{cases}$ 的综合。因为通过分析揭示了以 $\begin{cases} x+y=2 \\ x=\dfrac{2y}{3} \end{cases}$ 为"桥"的解题规律，体现了化"无理"为"有理"、删繁就简的本质。（2）分析是从整体方程组 $\begin{cases} x+y=\sqrt{x+y+2} \\ x=\dfrac{2y}{3} \end{cases}$ 开始的，对方程 $x+y=\sqrt{x+y+2}$ 和 $\dfrac{x}{2}=\dfrac{y}{3}$ 的分析都是为了寻求较佳的解题途径，"净化"解题思维，充分认识命题，更全面地驾驭命题。（3）从图1-1.3看出，整个分析与综合的思维过程，包括最初综合——分析——再次综合这三个环节，正是因为这三个环节的协调一致，才能使解题顺利进行。

二、分析与综合的方法

分析与综合的方法虽多，但离不开两个方面：一是就命题的内容结构进行分析与综合（如：数、形的分析与综合，数、式的分析与综合…）；二是就命题的纵横脉络（即脉络结构）进行分析与综合。下面想以脉络结构为例为同学们提

供几种分析与综合的方法。

1. 从条件的经度看结论的经度

从分析命题的纵向脉络入手，看综合得到的结论是否与待证结论的纵向脉络和谐一致，这种方法叫做从条件的经度看结论的经度。对纵向脉络单一的题型通常都采用这种方法。

例如：把$\frac{a}{b}-\frac{b}{a}$化为两个分式的乘积，使这两个分式之和等于$\frac{a}{b}+\frac{b}{a}$。结构特征：条件、结论的纵向脉络单一。分析与综合的方法如下：

$$\text{命题}\left\{\begin{array}{l}\text{条件：}\frac{a}{b}-\frac{b}{a}\Longrightarrow\frac{a^2-b^2}{ab}=\frac{a+b}{a}\cdot\frac{a-b}{b}\Longrightarrow \\ \qquad\qquad\frac{a+b}{a}+\frac{a-b}{b}=\frac{a^2-b^2}{ab} \\ \text{结论：}\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\Longrightarrow\frac{a}{b}+\frac{b}{a}=\frac{a^2+b^2}{ab}\end{array}\right\}$$

$$\Longrightarrow\frac{a+b}{a}+\frac{a-b}{b}=\frac{a}{b}+\frac{b}{a}$$

显然，条件、结论的纵向脉络是吻合的，根据这一分析与综合的方法我们就容易找到解题的途径。

2. 从条件的纬度看结论的经度

从命题的横向脉络入手，看综合得到的结果是否与待求结论的纵向脉络协调的方法叫做从条件的纬度看结论的经度。它适合于条件的横向脉络清楚，结论的纵向脉络单一的题型。

例如：在$\triangle ABC$中，有一个角为$60°$，面积为$10\sqrt{3}\ cm^2$，

周长为20cm，求这个三角形三边的长度。

命题结构特征 ⟶
- 条件：在$\triangle ABC$中
  - 有一个角为60°
  - 面积为$10\sqrt{3}\ \text{cm}^2$
  - 周长为20cm

  ⟹（横向条件清楚）
- 结论：求三边边长⟹（纵向结论单一）

分析与综合的方法见图 1-1.4。

命题
- 条件
  - 面积为$10\sqrt{3}\ \text{cm}^2$ $\xRightarrow{\text{分析}}$
    - $\frac{1}{2}ah_a=10\sqrt{3}$（知道高才能求出一边）
    - $\frac{abc}{4R}=10\sqrt{3}$（知道外接圆半径能求三边之积）
    - $\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}=10\sqrt{3}$（略）
    - ……
    - $\frac{1}{2}ab\sin C=10\sqrt{3}$（知道两边夹角能求两边之积）
  - 有一角为60°
  - 周长为 20cm $\xRightarrow{\text{分析}}$
    - 设三边为a、b、c
    - $a+b+c=20$

  $\xRightarrow{\text{综合}}\frac{1}{2}ab\sin 60°=10\sqrt{3}$
- 结论：求a、b、c的长⟹建立三元方程组。

图 1-1.4

横观条件、纵览结论，纵横协调一致。

此外还有：

3. 从条件纬度看结论的纬度

4. 从条件的经度看结论的纬度

对此不再举例。

上述四种分析与综合的方法直观地看，1、3属“1”字型，好象一条线；2、4属“7”字型，好似一条折线，其实在分析与综合的过程中不仅是“直线式”或“折线式”，有时是网络状的。特别是命题的条件、结论的脉络纵、横交错时，更应从问题所处的经纬网中理出头绪。

5. 从条件的经纬度看结论的经纬度

从条件的纵横脉络分析看综合得到的结论与待求结论的纵横脉络是否一脉相存。这种方法也叫做经纬网法，它适合综合复杂的题型。

例如：有甲乙两个四位数，乙数的常用对数是$A+\lg B$，其中A、B是自然数，甲数的千位数字与百位数字之和等于5B，乙数比甲数大11B，求这两个四位数。

不分析脉络结构，单独使用“直线式”或“折线式”的分析与综合，达不到预想效果，甚至步履艰难。

此题的脉络结构见图 1-1.5。

- 命题
  - 条件：有两个四位数
    - 乙的对数 = $A+\lg B$
      - $A\in N$（即A属于自然数）
      - $B\in N$
    - 甲数→千位数字＋百位数字＝5B
    - 乙数＝甲数＋11 B
      - 甲数≥1000
      - 乙数＞甲数
  - ⟹条件纵横交织在一起.
  - 结论：求
    - 甲数＝？
    - 乙数＝？
    - ⟹结论纵横相连

图 1-1.5

根据命题的脉络结构作如图1-1.6所示的分析与综合。

通过对条件“$\lg y=A+\lg B$”的纵向分析与综合只能找

命题

条件 甲 $=x$，乙 $=y$

$\lg y = A + \lg B$ 甲数（x）

- $A \in N$（是对数）$\Rightarrow \left\{\begin{array}{l}\text{令} A = \lg N \\ \text{则} N = 10^A\end{array}\right\} \Rightarrow A = \lg 10^A$
- $B \in N$（是真数）
- $\Rightarrow A + \lg B = \lg 10^A \cdot B$
- x 的千位数字 + 百位数字 $= 5B \Rightarrow \left\{\begin{array}{l}\text{千位数字在1—9之间} \\ \text{百位数字在0—9之间}\end{array}\right.$
- $\Rightarrow 1 \leqslant$ 千位数字 + 百位数字 $\leqslant 18 \Rightarrow 1 \leqslant 5B \leqslant 18$
- $0 < B \leqslant 3$，即 B 只能取1、2、3中的一个

$\left.\begin{array}{l}\Rightarrow \lg y = \lg 10^A \cdot B \Rightarrow y = 10^A \cdot B \\ y\text{是四位数}\end{array}\right\} A = 4 - 1 = 3$

$y = x + 11B \left\{\begin{array}{l}x \geqslant 1000 \\ y > x \geqslant 1000\end{array}\right.$

$\Rightarrow B \neq 1$（即 B 只能取2或3）

结论 $x = ?$ $y = ?$

$x = 10^A \cdot B - 11B \left\{\begin{array}{l}\text{当} B = 2\text{时} \Rightarrow x = 10^3 \times 2 - 22 = 1978 \\ \text{当} B = 3\text{时} \Rightarrow x = 10^3 \times 3 - 33 = 2967\end{array}\right.$

$y = 10^A \cdot B \left\{\begin{array}{l}\text{当} B = 2\text{时} \Rightarrow y = 10^3 \times 2 = 2000 \\ \text{当} B = 3\text{时} \Rightarrow y = 10^3 \times 3 = 3000\end{array}\right.$

$\left(\begin{array}{l}B = 3\text{不可能} \\ \because 2 + 9 \neq 5B = 5 \times 3\end{array}\right)$

图 1-1.6

到“$\lg y=\lg 10^A\cdot B$”的结论；而对条件“甲数千位上的数字与百位上的数字之和 = 5 B”的纵向分析与综合只能得出“B只能取 1、2、3 中的一个”的结论；对条件“$y=x+11B$”的纵向分析与综合也只能得到“$y>x\geqslant 1000$”的大概结论。“直线式”的分析与综合，得到的结论与待求结论距离太远，同理，“折线式”分析与综合也难达到目的。只有加强条件之间的横向联系，用网络方法进行分析与综合，才能确定“$A=3$”，并将B的范围控制在 2 、3 两个数中，这时只要将两个结论“甲数是1978,乙数为2000,或甲数是2967,乙数是3000”，对照条件“甲数千位数字 + 甲数百位数字 = 5 B”看谁合拍，即可找到正确的答案。

三、分析与综合例评

由分析与综合的方法得到，不管哪一种方法都离不开对命题脉络的把握与控制。下面结合解题让同学们品评一下上述有关分析与综合的方法。

例1 若a、b、c 互不相等，求证：$(ab+bc+ac)x^2+2(a+b+c)x+1=0$ 有二不等实根。

证明： $\because$ $\Delta=4(a+b+c)^2-4(ab+bc+ac)$

$$=4[(a^2+b^2+c^2)+2(ab+bc+ac)]-4(ab+bc+ac)$$

$$=-4(a^2+b^2+c^2+ab+bc+ac),$$

而a、b、c互不相等，$\therefore$ $(a+b)^2\geqslant 0$，即$a^2+b^2\geqslant -2ab$（当a、b互为相反数时，等号成立），从而

$$b^2+c^2>-2bc,\ a^2+c^2>-2ac,$$

$$\therefore\ 2(a^2+b^2+c^2)>-2(ab+bc+ac),$$

即$a^2+b^2+c^2+ab+bc+ac>0$，

$\therefore\ 4(a^2+b^2+c^2+ab+bc+ac)>0$，故原方程有二不等实根．

$$
\text{例评：①脉络结构}\begin{cases}\text{条件：}a、b、c\text{互不相等}\begin{cases}(a+b)^2\geqslant 0\Longrightarrow a^2+b^2\geqslant -2ab,\\(a+c)^2>0\Longrightarrow a^2+c^2>-2ac,\\(b+c)^2>0\Longrightarrow b^2+c^2>-2bc,\end{cases}\\\text{结论：有二不等实根}\Longrightarrow \Delta>0．\end{cases}
$$

由此可见，条件的横向脉络平行并存，结论的纵向脉络单一延伸．

② 根据命题的结构特征采用“从条件的纬度看结论的经度”的分析与综合的方法是恰当的．令人欣赏的是分析与综合中能周密考虑到，已知互不相等的三数中，可能出现任意两数是互为相反数（如：$(a+b)^2\geqslant 0$），并紧扣a、b、c互不相等”结合$(a+b)^2\geqslant 0$的可能．慎重地推出第三数与这两数的和都不为零的另外两个平行条件：“$(a+c)^2>0$，$(b+c)^2>0$”．忽视了这一点就会出现如下两种情况：

$$
\left.\text{(1) }a、b、c\text{互不相等}\left\{\begin{array}{l}(a+b)^2\geqslant 0\Longrightarrow a^2+b^2\geqslant -2ab\\(a+c)^2\geqslant 0\Longrightarrow a^2+c^2\geqslant -2ac\\(b+c)^2\geqslant 0\Longrightarrow b^2+c^2\geqslant -2bc\end{array}\right\}\begin{array}{l}(a^2+b^2+c^2)\\+(ab+ac\\+bc\geqslant 0\end{array}\right\}
$$

$$
\begin{aligned}\Delta&=4(a+b+c)^2-4(ab+bc+ac)\\&=4(a^2+b^2+c^2+ab+ac+bc)\end{aligned}
$$