

2015 考研专家指导丛书

阅卷人点拨考研数学 历届真题考点与题型分类精解 70考点全突破

数学二

超值赠送



- 800元原命题组成员考研数学大串讲视频
- 命题人归纳每章知识结构图
- 考研数学公式定理背诵手册（数学一、二、三）
- 命题人密押试卷2套及精解（数学一、二、三）
- 北京大学状元考研数学备战锦囊
- 清华大学状元考研数学备战锦囊

● 清华大学
● 北京大学
● 首都师范大学

王欢
王德军 主编
童武

中国石化出版社
HTTP://WWW.SINOPEC-PRESS.COM
教·育·出·版·中·心

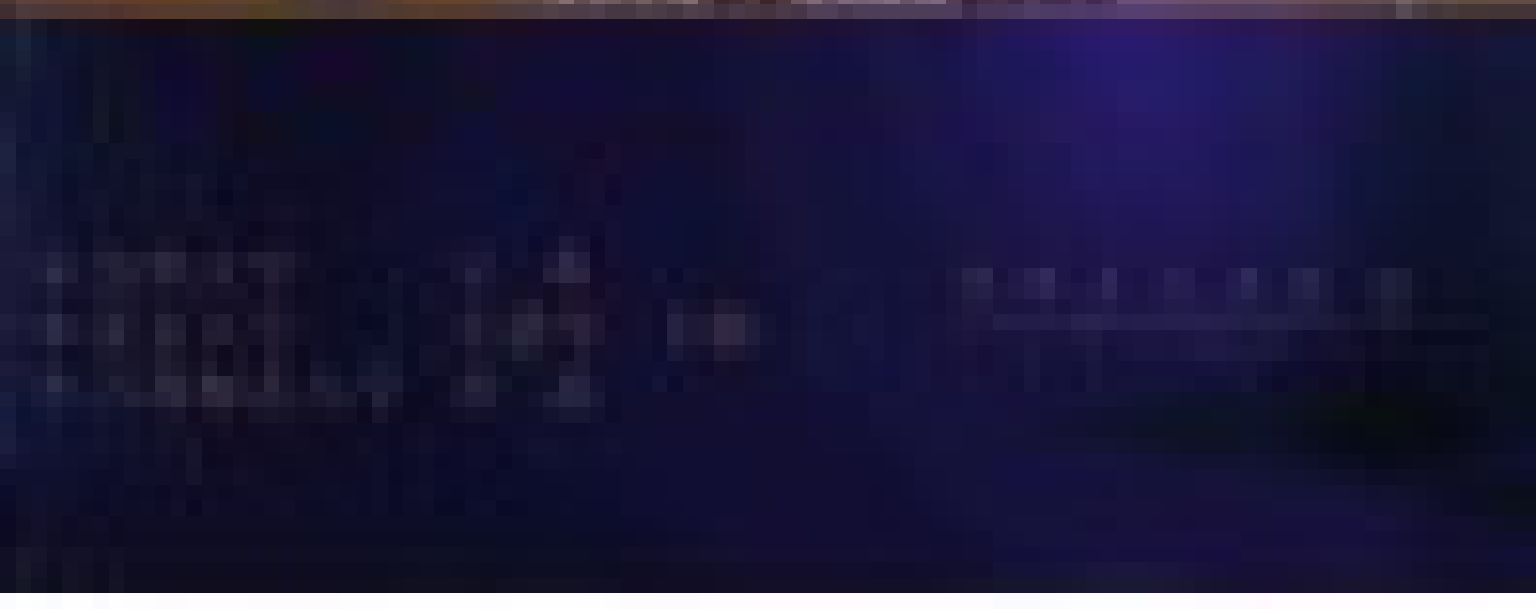
2015

Figure 1. A schematic diagram of the experimental design.

1999, 2000, 2001, 2002, 2003, 2004, 2005, 2006, 2007, 2008, 2009, 2010, 2011, 2012, 2013, 2014, 2015, 2016, 2017, 2018, 2019, 2020, 2021, 2022, 2023, 2024, 2025, 2026, 2027, 2028, 2029, 2030, 2031, 2032, 2033, 2034, 2035, 2036, 2037, 2038, 2039, 2040, 2041, 2042, 2043, 2044, 2045, 2046, 2047, 2048, 2049, 2050, 2051, 2052, 2053, 2054, 2055, 2056, 2057, 2058, 2059, 2060, 2061, 2062, 2063, 2064, 2065, 2066, 2067, 2068, 2069, 2070, 2071, 2072, 2073, 2074, 2075, 2076, 2077, 2078, 2079, 2080, 2081, 2082, 2083, 2084, 2085, 2086, 2087, 2088, 2089, 2090, 2091, 2092, 2093, 2094, 2095, 2096, 2097, 2098, 2099, 2100, 2101, 2102, 2103, 2104, 2105, 2106, 2107, 2108, 2109, 2110, 2111, 2112, 2113, 2114, 2115, 2116, 2117, 2118, 2119, 2120, 2121, 2122, 2123, 2124, 2125, 2126, 2127, 2128, 2129, 2130, 2131, 2132, 2133, 2134, 2135, 2136, 2137, 2138, 2139, 2140, 2141, 2142, 2143, 2144, 2145, 2146, 2147, 2148, 2149, 2150, 2151, 2152, 2153, 2154, 2155, 2156, 2157, 2158, 2159, 2160, 2161, 2162, 2163, 2164, 2165, 2166, 2167, 2168, 2169, 2170, 2171, 2172, 2173, 2174, 2175, 2176, 2177, 2178, 2179, 2180, 2181, 2182, 2183, 2184, 2185, 2186, 2187, 2188, 2189, 2190, 2191, 2192, 2193, 2194, 2195, 2196, 2197, 2198, 2199, 2200, 2201, 2202, 2203, 2204, 2205, 2206, 2207, 2208, 2209, 2210, 2211, 2212, 2213, 2214, 2215, 2216, 2217, 2218, 2219, 2220, 2221, 2222, 2223, 2224, 2225, 2226, 2227, 2228, 2229, 2230, 2231, 2232, 2233, 2234, 2235, 2236, 2237, 2238, 2239, 2240, 2241, 2242, 2243, 2244, 2245, 2246, 2247, 2248, 2249, 2250, 2251, 2252, 2253, 2254, 2255, 2256, 2257, 2258, 2259, 2260, 2261, 2262, 2263, 2264, 2265, 2266, 2267, 2268, 2269, 2270, 2271, 2272, 2273, 2274, 2275, 2276, 2277, 2278, 2279, 2280, 2281, 2282, 2283, 2284, 2285, 2286, 2287, 2288, 2289, 2290, 2291, 2292, 2293, 2294, 2295, 2296, 2297, 2298, 2299, 2300, 2301, 2302, 2303, 2304, 2305, 2306, 2307, 2308, 2309, 2310, 2311, 2312, 2313, 2314, 2315, 2316, 2317, 2318, 2319, 2320, 2321, 2322, 2323, 2324, 2325, 2326, 2327, 2328, 2329, 2330, 2331, 2332, 2333, 2334, 2335, 2336, 2337, 2338, 2339, 2340, 2341, 2342, 2343, 2344, 2345, 2346, 2347, 2348, 2349, 2350, 2351, 2352, 2353, 2354, 2355, 2356, 2357, 2358, 2359, 2360, 2361, 2362, 2363, 2364, 2365, 2366, 2367, 2368, 2369, 2370, 2371, 2372, 2373, 2374, 2375, 2376, 2377, 2378, 2379, 2380, 2381, 2382, 2383, 2384, 2385, 2386, 2387, 2388, 2389, 2390, 2391, 2392, 2393, 2394, 2395, 2396, 2397, 2398, 2399, 2400, 2401, 2402, 2403, 2404, 2405, 2406, 2407, 2408, 2409, 2410, 2411, 2412, 2413, 2414, 2415, 2416, 2417, 2418, 2419, 2420, 2421, 2422, 2423, 2424, 2425, 2426, 2427, 2428, 2429, 2430, 2431, 2432, 2433, 2434, 2435, 2436, 2437, 2438, 2439, 2440, 2441, 2442, 2443, 2444, 2445, 2446, 2447, 2448, 2449, 2450, 2451, 2452, 2453, 2454, 2455, 2456, 2457, 2458, 2459, 2460, 2461, 2462, 2463, 2464, 2465, 2466, 2467, 2468, 2469, 2470, 2471, 2472, 2473, 2474, 2475, 2476, 2477, 2478, 2479, 2480, 2481, 2482, 2483, 2484, 2485, 2486, 2487, 2488, 2489, 2490, 2491, 2492, 2493, 2494, 2495, 2496, 2497, 2498, 2499, 2500, 2501, 2502, 2503, 2504, 2505, 2506, 2507, 2508, 2509, 2510, 2511, 2512, 2513, 2514, 2515, 2516, 2517, 2518, 2519, 2520, 2521, 2522, 2523, 2524, 2525, 2526, 2527, 2528, 2529, 2530, 2531, 2532, 2533, 2534, 2535, 2536, 2537, 2538, 2539, 2540, 2541, 2542, 2543, 2544, 2545, 2546, 2547, 2548, 2549, 2550, 2551, 2552, 2553, 2554, 2555, 2556, 2557, 2558, 2559, 2560, 2561, 2562, 2563, 2564, 2565, 2566, 2567, 2568, 2569, 2570, 2571, 2572, 2573, 2574, 2575, 2576, 2577, 2578, 2579, 2580, 2581, 2582, 2583, 2584, 2585, 2586, 2587, 2588, 2589, 2590, 2591, 2592, 2593, 2594, 2595, 2596, 2597, 2598, 2599, 2600, 2601, 2602, 2603, 2604, 2605, 2606, 2607, 2608, 2609, 2610, 2611, 2612, 2613, 2614, 2615, 2616, 2617, 2618, 2619, 2620, 2621, 2622, 2623, 2624, 2625, 2626, 2627, 2628, 2629, 2630, 2631, 2632, 2633, 2634, 2635, 2636, 2637, 2638, 2639, 2640, 2641, 2642, 2643, 2644, 2645, 2646, 2647, 2648, 2649, 2650, 2651, 2652, 2653, 2654, 2655, 2656, 2657, 2658, 2659, 2660, 2661, 2662, 2663, 2664, 2665, 2666, 2667, 2668, 2669, 2670, 2671, 2672, 2673, 2674, 2675, 2676, 2677, 2678, 2679, 2680, 26

— 112 —

Figure 1



2015 考研专家指导丛书

阅卷人点拨考研数学

历届真题考点与题型分类精解

70考点全突破

数学二

超值赠送



- 800元原命题组成员考研数学大串讲视频
- 命题人归纳每章知识结构图
- 考研数学公式定理背诵手册（数学一、二、三）
- 命题人密押试卷2套及精解（数学一、二、三）
- 北京大学状元考研数学备战锦囊
- 清华大学状元考研数学备战锦囊

● 清华大学 王 欢
● 北京大学 王德军 主编
● 首都师范大学 童 武

中国石化出版社
[HTTP://WWW.SINOPEC-PRESS.COM](http://www.sinopec-press.com)
教 · 育 · 出 · 版 · 中 · 心

图书在版编目(CIP)数据

阅卷人点拨考研数学历届真题考点与题型分类精解 70
考点全突破. 数学二 / 王欢主编. —北京: 中国石化
出版社, 2014. 1
ISBN 978-7-5114-2572-0

I. ①阅… II. ①王… III. ①高等数学-研究生-入
学考试-题解 IV. ①013-44

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2013)第 315001 号

未经本社书面授权, 本书任何部分不得被复制、抄袭, 或者以任何形式或
任何方式传播。版权所有, 侵权必究。

中国石化出版社出版发行

地址: 北京市东城区安定门外大街 58 号

邮编: 100011 电话: (010) 84271850

读者服务部电话: (010) 84289974

<http://www.sinopec-press.com>

E-mail: press@sinopec.com

北京富泰印刷有限责任公司印刷

全国各地新华书店经销

*

787 × 1092 毫米 16 开本 15 印张 379 千字

2014 年 3 月第 1 版 2014 年 3 月第 1 次印刷

定价: 39.80 元(赠送 MP3 光盘)

前 言

中国加入 WTO 之后, 改革开放逐步深化, 经济发展速度日益加快, 社会对科学技术、文化教育的需求不断向高层次迈进, 我国对硕士研究生等高水平人才的需求越来越大, 这方面的教育也在稳步发展, 规模不断扩大、层次逐步齐全、教学质量不断提高、测试更加规范化, 考生人数也在迅猛增加。

从测量学角度来说, 全国硕士研究生入学统一考试应是“常模参照”考试, 即选拔性考试。命题工作需坚持既有利于为国家选拔高层次的专门人才, 又有利于高等学校教学的原则, 强调在考查知识的基础上, 重点考查考生分析问题和解决问题的能力, 并且采用科学的办法, 保持考试水平的稳定性。

为了更好地帮助考生复习, 顺利通过数学考试、赢取高分, 我们根据国家教育部制定的《考试大纲》, 基于多年参加阅卷和考研辅导班的教学实践经验, 以及分析了近几年考题中的考点、难点、重点及命题套路, 倾力推出这套考研专家指导丛书。

本套丛书包括:

《考研数学标准模拟试卷精解数学一》

《考研数学标准模拟试卷精解数学二》

《考研数学标准模拟试卷精解数学三》

《阅卷人点拨考研数学历届真题考点与题型分类精解 98 考点全突破数学一》

《阅卷人点拨考研数学历届真题考点与题型分类精解 70 考点全突破数学二》

《阅卷人点拨考研数学历届真题考点与题型分类精解 102 考点全突破数学三》

《阅卷人精讲考研数学高等数学高分强化版》

《阅卷人精讲考研数学线性代数高分强化版》

《阅卷人精讲考研数学概率论与数理统计高分强化版》

《阅卷人点拨考研数学历届真题 15 天突破 数学一》

《阅卷人点拨考研数学历届真题 15 天突破 数学二》

《阅卷人点拨考研数学历届真题 15 天突破 数学三》

《考研数学主观题 23 天突破 500 题 数学一》

《考研数学主观题 13 天突破 500 题 数学二》

《考研数学主观题 22 天突破 500 题 数学三》

《考研数学客观题 26 天突破 1500 题 数学一》

《考研数学客观题 15 天突破 1500 题 数学二》

《考研数学客观题 27 天突破 1500 题 数学三》

《考研数学最后冲刺超越 135 分 数学一》

《考研数学最后冲刺超越 135 分 数学二》

《考研数学最后冲刺超越 135 分 数学三》

本套书的编写特点如下：

1. 配合最新考试大纲，反映最新变化

本书在严格遵循最新考试精神和最新考试大纲要求的基础上，力求反映最新考试要求，紧扣全国硕士研究生入学数学考试的脉搏。

2. 注重考试技巧，高效突破难关

本书精辟阐明解题思路，全面展现题型变化，为考生全程领航和理性分析，引领考生高效通过考试难关。考生可以利用本套丛书进行考前模拟实战训练，检验自己的学习成果，及时进行查漏补缺，有针对性地进行复习备考。希望考生能在仿真的环境下进行模拟训练，这样效果最佳。

3. 教授亲自主笔，编写阵容强大

本书由一线专家和教授亲自编著。编者多年来一直从事考研数学的考前辅导工作，积累了丰富的教学辅导经验，对历年考试情况比较了解，对考生在复习和考试过程中可能遇到的问题把握得比较准确。

尽管在编写过程中经历了严格的编审程序，力求达到完美，但限于时间和水平，仍可能存在不足，纰漏之处希望广大考生和专家批评、指正。

编 者

目 录

第一篇 1997 ~ 2014 年考研数学二试题分类解析

第一部分 高等数学	(3)
第一章 函数、极限、连续	(3)
第二章 一元函数微分学	(30)
第三章 一元函数积分学	(70)
第四章 多元函数微分学	(103)
第五章 重积分	(113)
第六章 微分方程	(122)
第二部分 线性代数	(144)
第一章 行列式	(144)
第二章 矩阵	(148)
第三章 向量	(158)
第四章 线性方程组	(167)
第五章 矩阵的特征值与特征向量	(182)
第六章 二次型	(190)

第二篇 2003 ~ 2014 年考研数学二试题

2003 年全国硕士研究生入学统一考试数学二试题	(197)
2004 年全国硕士研究生入学统一考试数学二试题	(200)
2005 年全国硕士研究生入学统一考试数学二试题	(203)
2006 年全国硕士研究生入学统一考试数学二试题	(206)
2007 年全国硕士研究生入学统一考试数学二试题	(209)
2008 年全国硕士研究生入学统一考试数学二试题	(213)
2009 年全国硕士研究生入学统一考试数学二试题	(216)
2010 年全国硕士研究生入学统一考试数学二试题	(220)

第一篇

1997 ~ 2014 年考研 数学二试题分类解析

第一部分 高等数学

第一章 函数、极限、连续

考点1 函数的概念及其特征

1. (2005 年试题) 设 $F(x)$ 是连续函数 $f(x)$ 的一个原函数, “ $M \Leftrightarrow N$ ”表示“ M 的充分必要条件是 N ”, 则必有().

- (A) $F(x)$ 是偶函数 $\Leftrightarrow f(x)$ 是奇函数
- (B) $F(x)$ 是奇函数 $\Leftrightarrow f(x)$ 是偶函数
- (C) $F(x)$ 是周期函数 $\Leftrightarrow f(x)$ 是周期函数
- (D) $F(x)$ 是单调函数 $\Leftrightarrow f(x)$ 是单调函数

【考点】 奇函数、偶函数、原函数

【解析】 由题意可知

$$F(x) = \int f(x) dx = \int_0^x f(t) dt + C$$

于是

$$f(x) \text{ 为奇函数} \Rightarrow \int_0^x f(t) dt \text{ 为偶函数} \Rightarrow f(x) \text{ 的全体原函数为偶函数};$$

$$F(x) \text{ 为偶函数} \Rightarrow f'(x) = f(x) \text{ 为奇函数}$$

所以选(A).

【评注】 考虑当 $f(x)$ 具有函数的某种性质时, 它的原函数 $F(x)$ 是否也具有这种性质? 反过来考虑呢?

2. (2001 年试题) 设 $f(x) = \begin{cases} 1, & |x| \leq 1, \\ 0, & |x| > 1, \end{cases}$ 则 $f\{f[f(x)]\}$ 等于().

- (A) 0
- (B) 1
- (C) $\begin{cases} 1, & |x| \leq 1 \\ 0, & |x| > 1 \end{cases}$
- (D) $\begin{cases} 0, & |x| \leq 1 \\ 1, & |x| > 1 \end{cases}$

【考点】 分段函数复合

【解析】 由题设, $f(x) = \begin{cases} 1, & |x| \leq 1, \\ 0, & |x| > 1, \end{cases}$ 则

$$f[f(x)] = \begin{cases} 1, & |f(x)| \leq 1, \\ 0, & |f(x)| > 1, \end{cases}$$



由于 $f(x)$ 只能取 0, 1 两个值, 即 $|f(x)| \leq 1, x \in (-\infty, +\infty)$, 所以

$$f[f(x)] \equiv 1, \quad x \in (-\infty, \infty),$$

因而

$$f\{f[f(x)]\} = f(1) = 1$$

选(B).

3. (1999 年试题) 设 $f(x)$ 是连续函数, $F(x)$ 是 $f(x)$ 的原函数, 则().

- (A) 当 $f(x)$ 是奇函数时, $F(x)$ 必是偶函数
- (B) 当 $f(x)$ 是偶函数时, $F(x)$ 必是奇函数
- (C) 当 $f(x)$ 是周期函数时, $F(x)$ 必是周期函数
- (D) 当 $f(x)$ 是单调增函数时, $F(x)$ 必是单调增函数

【考点】 原函数

【解析】 由已知 $f(x)$ 是连续函数, 则 $\int_0^x f(t) dt$ 是 $f(x)$ 的一个原函数, 从而 $f(x)$ 的任一原函数 $F(x)$ 可表示为 $\int_0^x f(t) dt + C$, 即 $F(x) = \int_0^x f(t) dt + C$, 其中 C 为任意常数, 且有

$$F(-x) = \int_0^{-x} f(t) dt + C = - \int_0^x f(-u) du + C$$

当 $f(x)$ 是奇函数时,

$$F(-x) = \int_0^x f(u) du + C = F(x)$$

即 $F(x)$ 为偶函数, (A) 成立;

当 $f(x)$ 是偶函数时,

$$F(-x) = - \int_0^x f(u) du + C \neq -F(x)$$

所以(B)不成立;

关于选项(C), (D)可举反例予以排除, 如令 $f(x) = 1 + \cos x$, 则周期为 2π , $F(x) = x + \sin x + C$ 不是周期函数; 又令 $f(x) = x$, 为单调增函数, 但 $F(x) = \frac{1}{2}x^2 + C$ 不是单调函数, 综上, 选(A).

【评注】 $\int_0^x f(t) dt$ 是函数 $f(x)$ 的原函数中的一个, 所以 $f(x)$ 的原函数才为 $F(x) = \int_0^x f(t) dt + c$, 然后再用函数性质的定义进行判定.

4. (1997 年试题) 设 $g(x) = \begin{cases} 2-x, & x \leq 0, \\ x+2, & x > 0, \end{cases}$ $f(x) = \begin{cases} x^2, & x < 0, \\ -x, & x \geq 0, \end{cases}$ 则 $g[f(x)] = ()$.

- (A) $\begin{cases} 2+x^2, & x < 0 \\ 2-x, & x \geq 0 \end{cases}$
- (B) $\begin{cases} 2-x^2, & x < 0 \\ 2+x, & x \geq 0 \end{cases}$
- (C) $\begin{cases} 2-x^2, & x < 0 \\ 2-x, & x \geq 0 \end{cases}$
- (D) $\begin{cases} 2+x^2, & x < 0 \\ 2+x, & x \geq 0 \end{cases}$

【考点】 分段函数, 复合函数

【解析】 由已知

$$g[f(x)] = \begin{cases} 2-f(x), & f(x) \leq 0 \\ f(x)+2, & f(x) > 0 \end{cases}$$



由 $f(x) \leq 0$, 知 $x \geq 0$ 且 $f(x) = -x$;

由 $f(x) > 0$, 知 $x < 0$ 且 $f(x) = x^2$;

从而 $g[f(x)] = \begin{cases} 2+x^2, & x < 0 \\ 2+x, & x \geq 0 \end{cases}$. 选(D).

考点2 极限概念与性质

1. (2012 年试题) 设 $a_n > 0$ ($n=1, 2, 3, \dots$), $S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n$, 则数列 $\{S_n\}$ 有界是数列 $\{a_n\}$ 收敛的().

(A) 充分必要条件

(B) 充分非必要条件

(C) 必要非充分条件

(D) 非充分也非必要条件

【考点】 数列的极限

【解析】 由题设 $a_n > 0$, 因此数列 $\{S_n\}$ 是单调递增数列. 若 $\{S_n\}$ 有界, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ 存在, 就有 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (S_n - S_{n-1}) = 0$, 得数列 $\{a_n\}$ 收敛, 数列 $\{S_n\}$ 有界是数列 $\{a_n\}$ 收敛的充分条件. 反之, 若 $\{a_n\}$ 收敛, 则 $\{S_n\}$ 不一定是有限界的, 例: 取 $a_n = 1$ 满足题设, $\{a_n\}$ 收敛, 但 $S_n = n$, $\{S_n\}$ 无上界. 因此应选(B).

2. (2012 年试题) $\lim_{n \rightarrow \infty} n \left(\frac{1}{1+n^2} + \frac{1}{2^2+n^2} + \dots + \frac{1}{n^2+n^2} \right) = \underline{\hspace{2cm}}$.

【考点】 数列的极限

【解析】
$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} n \left(\frac{1}{1+n^2} + \frac{1}{2^2+n^2} + \dots + \frac{1}{n^2+n^2} \right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left(\frac{n^2}{1+n^2} + \frac{n^2}{2^2+n^2} + \dots + \frac{n^2}{n^2+n^2} \right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left(\frac{1}{1+\left(\frac{1}{n}\right)^2} + \frac{1}{1+\left(\frac{2}{n}\right)^2} + \dots + \frac{1}{1+\left(\frac{n}{n}\right)^2} \right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{1}{1+\left(\frac{i}{n}\right)^2} = \int_0^1 \frac{1}{1+x^2} dx = \arctan x \Big|_0^1 = \frac{\pi}{4} \end{aligned}$$

3. (2003 年试题) 设 $\{a_n\}, \{b_n\}, \{c_n\}$ 均为非负数列, 且 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$, $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 1$, $\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = \infty$, 则必有().

(A) $a_n < b_n$ 对任意 n 成立

(B) $b_n < c_n$ 对任意 n 成立

(C) 极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n c_n$ 不存在

(D) 极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n c_n$ 不存在

【考点】 数列的极限

【解析】 由题设, $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ 及 $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 1$ 知当 n 充分大时, $a_n < b_n$, 但对任意 n , $a_n < b_n$ 不一定成立, 从而可排除(A), 同理 $b_n < c_n$ 对任意 n 也不一定成立, 因此(B)也可排除, 假设 $a_n = \frac{1}{n^2}$, $c_n = n$, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$, $\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = +\infty$, 且 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n c_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$, 因此(C)也不成立, 关于(D), 由于 $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n c_n = \infty$, 所以极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n c_n$ 不存在, 综上, 选(D).



4. (1999 年试题) “对任意给定的 $\varepsilon \in (0, 1)$, 总存在正整数 N , 当 $n \geq N$ 时, 恒有 $|x_n - a| \leq 2\varepsilon$ ” 是数列 $\{x_n\}$ 收敛于 a 的().

- (A) 充分条件但非必要条件 (B) 必要条件但非充分条件
(C) 充分必要条件 (D) 既非充分条件又非必要条件

【考点】 数列极限的定义

【解析】 本题考查数列极限的 ε - N 语言定义, 即: $\forall \varepsilon > 0$, 存在 $N \in \mathbf{N}$, 当 $n > N$ 时有 $|x_n - a| < \varepsilon$, 将此定义与题设所给条件相比较, 知二者实质是相同的, 因此题设条件也是 $\{x_n\}$ 收敛于 a 的充要条件, 所以选(C).

【评注】 对概念的理解要彻底, 当 ε 为任意小的正数时, $k\varepsilon$ 也为任意小的正数(k 为确定的正数)

5. (1998 年试题) 设数列 x_n 与 y_n 满足 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n y_n = 0$, 则下列断言正确的是().

- (A) 若 x_n 发散, 则 y_n 必发散
(B) 若 x_n 无界, 则 y_n 必有界
(C) 若 x_n 有界, 则 y_n 必为无穷小
(D) 若 $\frac{1}{x_n}$ 为无穷小, 则 y_n 必为无穷小

【考点】 数列极限

【解析】 本题可采取举反例的方法一一排除干扰项, 即

设 $x_n = \sin n, y_n = \frac{1}{n}$, 则 y_n 收敛, $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n y_n = 0$. 从而可排除(A).

设 $x_n = \begin{cases} n, & n \text{ 奇数}, \\ 0, & n \text{ 偶数}, \end{cases} y_n = \begin{cases} 0, & n \text{ 奇数}, \\ n, & n \text{ 偶数}, \end{cases}$ 显然 x_n 无界且满足 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n y_n = 0$, 但是 y_n 也无界,

因此(B)亦可被排除.

设 $x_n = \begin{cases} 1, & n \text{ 奇数}, \\ 0, & n \text{ 偶数}, \end{cases} y_n = \begin{cases} 0, & n \text{ 奇数}, \\ 1, & n \text{ 偶数}, \end{cases}$ 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n y_n = 0, x_n$ 有界, 但 y_n 并非无穷小, 从而

(C)也不对. 综上, 只有(D)成立, 关于(D)的正确性的证明如下:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n y_n \cdot \frac{1}{x_n} = 0$$

所以 $\frac{1}{x_n}$ 为无穷小时, y_n 亦为无穷小, 所以选(D).

考点3 函数极限的计算

1. (2014 年试题) 设函数 $f(x) = \arctan x$, 若 $f(x) = f'(\xi)$, 则 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\xi^2}{x^2} =$ ()

- (A) 1 (B) $\frac{2}{3}$ (C) $\frac{1}{2}$ (D) $\frac{1}{3}$

【考点】 函数的极限

【解析】 由 $f(x) = \arctan x, f'(x) = \frac{1}{1+x^2}$ 得,



$$\arctan x = x \cdot \frac{1}{1 + \xi^2}, \text{ 即 } \xi^2 = \frac{x - \arctan x}{\arctan x}$$

$$\text{故 } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\xi^2}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \arctan x}{x^2 \arctan x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \arctan x}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \frac{1}{1+x^2}}{3x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{3(1+x^2)} = \frac{1}{3}, \text{ 正确答案}$$

为 (D).

2. (2014 年试题)

$$\text{求极限 } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\int_1^x [t^2(e^{\frac{1}{t}} - 1) - t] dt}{x^2 \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)}.$$

【考点】 求函数的极限

$$\begin{aligned} \text{【解析】 原式} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\int_1^x [t^2(e^{\frac{1}{t}} - 1) - t] dt}{x^2 \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\int_1^x [t^2(e^{\frac{1}{t}} - 1) - t] dt}{x} \cdot \frac{\frac{1}{x}}{\ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\int_1^x [t^2(e^{\frac{1}{t}} - 1) - t] dt}{x} \cdot \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{x}}{\ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} [x^2(e^{\frac{1}{x}} - 1) - x] \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2(e^{\frac{1}{x}} - 1 - \frac{1}{x}) = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{e^t - 1 - t}{t^2} = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{e^t - 1}{2t} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

$$3. (2013 \text{ 年试题}) \lim_{x \rightarrow 0} \left[2 - \frac{\ln(1+x)}{x} \right]^{\frac{1}{x}} = \underline{\hspace{2cm}}.$$

【考点】 函数的极限

【解析】

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(2 - \frac{\ln(1+x)}{x} \right)^{\frac{1}{x}} = e^{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \ln\left(2 - \frac{\ln(1+x)}{x}\right)} = e^{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \left(1 - \frac{\ln(1+x)}{x}\right)} = e^{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \ln(1+x)}{x^2}},$$

$$\text{又 } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \ln(1+x)}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \frac{1}{1+x}}{2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \frac{1}{2 + (1+x)}}{2} = \frac{1}{2},$$

$$\text{故 } \lim_{x \rightarrow 0} \left(2 - \frac{x - \ln(1+x)}{x} \right)^{\frac{1}{x}} = e^{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \ln(1+x)}{x^2}} = e^{\frac{1}{2}}.$$

4. (2012 年试题)

$$\text{已知函数 } f(x) = \frac{1+x}{\sin x} - \frac{1}{x}, \text{ 记 } a = \lim_{x \rightarrow 0} f(x),$$

(1) 求 a 的值;

(2) 若 $x \rightarrow 0$ 时, $f(x) - a$ 与 x^k 是同阶无穷小, 求常数 k 的值.

【考点】 函数的极限

$$\text{【解析】 (1) } a = \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1+x}{\sin x} - \frac{1}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x + x^2 - \sin x}{x \sin x}$$



$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x + x^2 - \sin x}{x^2} = 1 + \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x^2} = 1 + \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)\right)}{x^2} = 1 + 0 = 1.$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - a}{x^k} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - 1}{x^k} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x + x^2 - \sin x - x \sin x}{x^{k+1} \sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x + x^2 - \sin x - x \sin x}{x^{k+2}}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x - \sin x)(1 + x)}{x^{k+2}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{6}x^3}{x^{k+2}}$$

由已知 $x \rightarrow 0$ 时, $f(x) - a$ 与 x^k 是同阶无穷小, 则有 $k + 2 = 3, k = 1$.

5. (2011 年试题) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1 + 2^x}{2} \right)^{\frac{1}{x}} = \underline{\hspace{2cm}}.$

【考点】 极限的计算

【解析】 $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1 + 2^x}{2} \right)^{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(1 + \frac{1 + 2^x}{2} - 1 \right)^{\frac{1}{x}}$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \left(1 + \frac{1 + 2^x - 2}{2} \right)^{\frac{2}{2^x - 1} \cdot \frac{2^x - 1}{2x}}$$

$$= e^{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2^x - 1}{2x}}$$

$$= e^{\frac{\ln 2}{2}} = \sqrt{2}$$

6. (2009 年试题) 求极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 - \cos x)[x - \ln(1 + \tan x)]}{\sin^4 x}.$

【考点】 求函数的极限

【解析】 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 - \cos x)[x - \ln(1 + \tan x)]}{\sin^4 x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{2}x^2[x - \ln(1 + \tan x)]}{x^4}$

$$= \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \ln(1 + \tan x)}{x^2} = \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \frac{1}{\cos x(\sin x + \cos x)}}{2x}$$

$$= \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x(\cos x - \sin x)}{\cos x(\sin x + \cos x)} = \frac{1}{4} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - \sin x}{\cos x(\sin x + \cos x)}$$

$$= \frac{1}{4}$$

7. (2008 年试题) 求极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{[\sin x - \sin(\sin x)] \sin x}{x^4}.$

【考点】 求函数的极限

【解析】

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{[\sin x - \sin(\sin x)] \sin x}{x^4} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - \sin(\sin x)}{x^3} \xrightarrow[\text{法则}]{\text{洛必达}} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - \cos(\sin x) \cos x}{3x^2}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \cos x \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(\sin x)}{3x^2} \xrightarrow[\text{法则}]{\text{洛必达}} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(\sin x) \cos x}{6x}$$



$$= \lim_{x \rightarrow 0} \cos x \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{6x} = 1 \times \frac{1}{6} = \frac{1}{6}$$

8. (2007 年试题) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctan x - \sin x}{x^3} = \underline{\hspace{2cm}}.$

【考点】 求极限

【解析】 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctan x - \sin x}{x^3} \xrightarrow{\text{洛必达法则}} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{1+x^2} - \cos x}{3x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\frac{2x}{(1+x^2)^2} + \sin x}{6x}$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\frac{2}{(1+x^2)^2} + 1}{6} = -\frac{1}{6}$$

9. (2004 年试题) 求极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^3} \left[\left(\frac{2+\cos x}{3} \right)^x - 1 \right].$

【考点】 等价无穷小、洛必达法则

【解析一】 原式 $= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x \ln \left(\frac{2+\cos x}{3} \right)} - 1}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \ln \left(\frac{2+\cos x}{3} \right)}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln \left(\frac{2+\cos x}{3} \right)}{x^2}$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\frac{\sin x}{3}}{2x \cdot \left(\frac{2+\cos x}{3} \right)} = -\frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} \cdot \frac{1}{(2+\cos x)} = -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} = -\frac{1}{6}$$

【解析二】 原式 $= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x \ln \left(\frac{2+\cos x}{3} \right)} - 1}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \ln \left(\frac{2+\cos x}{3} \right)}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln \left(\frac{2+\cos x}{3} \right)}{x^2}$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln \left(1 + \frac{\cos x - 1}{3} \right)}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{\cos x - 1}{3}}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\frac{x^2}{6}}{x^2} = -\frac{1}{6}$$

10. (2002 年试题) 设 $y = y(x)$ 是二阶常系数微分方程 $y'' + py' + qy = e^{3x}$ 满足初始条件 $y(0) = y'(0) = 0$ 的特解, 则当 $x \rightarrow 0$ 时, 函数 $\frac{\ln(1+x^2)}{y(x)}$ 的极限().

(A) 不存在 (B) 等于 1 (C) 等于 2 (D) 等于 3

【考点】 洛必达法则

【解析】 由题设, $y(0) = y'(0) = 0$, 代入原微分方程, 得 $y''(0) = 1$, 则

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x^2)}{y(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{y(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x}{y'(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2}{y''(x)} = 2$$

选(C).

11. (2001 年试题) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{3-x} - \sqrt{1+x}}{x^2 + x - 2} = \underline{\hspace{2cm}}.$

【考点】 极限

【解析】 原式 $= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(\sqrt{3-x} - \sqrt{1+x})(\sqrt{3-x} + \sqrt{1+x})}{(x^2 + x - 2)(\sqrt{3-x} + \sqrt{1+x})}$



$$\begin{aligned}
 &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(3-x) - (1+x)}{(x^2+x-2)} \cdot \frac{1}{2\sqrt{2}} = \frac{1}{2\sqrt{2}} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2-2x}{x^2+x-2} \\
 &= \frac{1}{2\sqrt{2}} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2(1-x)}{(x+2)(x-1)} = \frac{1}{\sqrt{2}} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1-x}{(x+2)(x-1)} \\
 &= -\frac{\sqrt{2}}{6}
 \end{aligned}$$

12. (2000 年试题) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctan x - x}{\ln(1+2x^3)} = \underline{\hspace{2cm}}.$

【考点】 等价无穷小、洛必达法则

【解析】 由题设,

$$\text{原式} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctan x - x}{2x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{1+x^2} - 1}{6x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{-x^2}{1+x^2}}{6x^2} = -\frac{1}{6}. [\ln(1+2x^3) \sim 2x^3]$$

13. (1999 年试题) 求 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+\tan x} - \sqrt{1+\sin x}}{x \ln(1+x) - x^2}.$

【考点】 等价无穷小、洛必达法则

【解析】 原式 $= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{1+\tan x} - \sqrt{1+\sin x})(\sqrt{1+\tan x} + \sqrt{1+\sin x})}{x[\ln(1+x) - x](\sqrt{1+\tan x} + \sqrt{1+\sin x})}$

$$\begin{aligned}
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - \sin x}{2x[\ln(1+x) - x]} = \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{\cos x} - 1}{\ln(1+x) - x} \cdot \frac{\sin x}{x} \\
 &= \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{\ln(1+x) - x} = \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{x^2}{2}}{\ln(1+x) - x} \\
 &= \frac{1}{4} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x}{\frac{1}{1+x} - 1} = \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(1+x)}{-x} = -\frac{1}{2}
 \end{aligned}$$

【评注】 在求极限过程中,应先将非零因子项计算出来,尽量用无穷小量的等价代换进行简化,然后再用洛必达法则求极限,这样比较简便.

14. (1998 年试题) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x} - 2}{x^2} = \underline{\hspace{2cm}}.$

【考点】 极限

求极限通常会有若干种途径,本题可采用以下几种方法:

【解析一】 原式 $= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x})^2 - 4}{x^2[\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x} + 2]} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2(\sqrt{1-x^2} - 1)}{4x^2}$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\frac{1}{2}x^2}{2x^2} = -\frac{1}{4}$$

【解析二】 原式 $= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{2\sqrt{1+x}} - \frac{1}{2\sqrt{1-x}}}{2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1-x} - \sqrt{1+x}}{4x\sqrt{1-x^2}}$