数学建模

数学建模组　编写

哈尔滨理工大学

数 学 建 模

数学建模组 编写

哈尔滨理工大学

前　言

自从人们开始应用数学知识去解决生产实践和社会生活之中的各类实际问题，就产生了数学模型的雏形，随着数学应用的广泛开展，数学模型越来越规范、越来越精确，数学模型中所涉及的数学方法也越来越多、越来越繁杂，至今数学模型几乎渗透到了各个领域，在建立数学模型过程中所涉及的数学方法几乎覆盖数学及相关分支，并且在构建数学模型的过程中逐步形成了建立数学模型的系列方法。数学建模正是应用数学知识解决实际问题的主要过程，也是大学数学教学的重要内容之一。

随着数学建模竞赛的开展、数学建模教育的普及，数学建模一词已为当代大学生所熟悉，越来越多的人们已经认识到数学建模教育对培养大学生应用数学知识和相关专业知识解决实际问题的能力、团结协作能力、科技创新能力，对提高学生的意志品质等都是必不可少，而开设《数学建模》课程正是数学建模教育的一种直接体现。在数学建模课程中，学生们既巩固和补充了数学理论知识、学习了应用所学知识解决实际问题的方法，又将数学、各专业知识和计算机应用等有机地结合起来，学生的综合能力可以得到全面的提高；参加数学建模竞赛则更能锻炼和提高学生的思维能力、协调能力和创造能力。

我校开设数学建模课程和参加数学建模竞赛已有近 10 年的经历，在这个过程中，我们培养了一批教师、积累了一些经验、探索了一些方法，并已形成了组织开设课程、竞赛培训和参加数学建模竞赛的方法，使得我校学生在数学建模教学中得到收获，并在数学建模竞赛中取得了较好的成绩。2005 年，我校的《数学建模》课程被评为黑龙江省省级精品课程。

为了培养具有竞争力的高素质人才、为了适应我校数学建模发展需要，我们在总结多年开设数学建模课程和参加数学建模竞赛经验的基础上，编写了这本《数学建模方法》教材，本书适应于各专业的本科生和研究生。通过本教材，可以使学生了解数学建模中常用的数学方法、数学建模应用的领域、数学建模解决实际问题的基本过程，以及数学建模与计算机应用的具体结合。凡具有大学工科数学基础知识者均可学习本课程。

本教材虽然在编写上花费了很多精力，但由于编者水平有限，加之时间仓促，不妥和错误之处在所难免，恳请专家和广大读者批评指正。

2006 年 2 月

目 录

第一章 数学建模概述

随着科学技术对所研究客观对象的日益精确化、定量化和数学化，随着电子计算机技术的广泛应用，及相应数学软件的开发使用，“数学模型”已成为处理科技领域中各种实际问题的重要工具，并在自然科学、工程技术科学与社会科学的各个领域中得了到广泛的应用。诸如经济、管理、工农业，甚至社会学领域等。什么是数学模型，如何建立数学模型，这是现代科技工作者感兴趣的问题。

1.1 数学与数学的应用

从初等数学、高等数学到现代数学，数学作为一门自然科学学科为我们所熟悉、所了解，数学尤其是现代数学中的许多理论分支从来都给人以抽象的印象，似乎是数学研究得越深入离现实生活及实际工作就越遥远。但是，近半个世纪以来，数学的形象发生了重大的变化，数学已不仅仅是数学家、物理学家等的专利，除了传统的物理学、天文学、力学等学科与数学密不可分之外，在工程技术、社会生活、信息技术等诸多领域，数学发挥着越来越重要的作用，各种途径表明数学正在广泛地应用于各个领域。

在数学应用于各个领域的过程中，数学已经由一门自然科学学科发展成为一门数学技术，在控制科学、信息科学、计算机科学、管理科学等学科中，数学技术的应用必不可少。同时，一些新的数学分支不断涌现，比如，生物数学、经济数学、金融数学、数理医药学等，又促使数学的应用更深入、更广泛。

纵观数学在各个领域的应用过程，我们不难发现数学的应用主要在于应用数学的思维、数学的方法和数学的成果去解决相关领域中的实际问题，数学的应用过程就是一个发明创造的过程，在这一过程中发明了新思想、新知识、新规律，创造了新理论、新方法、新成果。

计算机技术的发展更为数学的广泛应用创造了条件，尤其是相关数学软件的开发使用，使得很多数学思想、方法能够顺利地实现。

1.2 数学的应用与数学建模

数学是研究数量关系的科学，应用数学知识解决各个领域中的实际问题主要是研究实际问题中的数量关系，而在很多实际问题中各个量之间的关系非常复

杂，很难用数量关系将它们联系起来，有时即使找到了数量关系又会由于其太复杂而不能用现有的数学方法进行处理，或者量与量之间就没有明显的数量关系，不能用现有的数学理论、数学公式去套用。因此，数学在其他领域中的成功应用不仅仅需要掌握大量的数学知识，还需要对实际问题有充分的了解，并能从众多的事物和复杂的现象中找到共同的本质的东西，抓住问题的本质，然后通过大量的定性和定量分析，寻找并发现量与量之间的数量关系，再用数学的理论与方法加以解决，并最后应用于实际问题。

数学在各个领域中的成功应用，要求我们应具有认知事物能力、抽象思维能力、逻辑推理能力、空间想象能力、数学运算能力、数值计算与数据处理能力和更新数学知识的能力，数学建模正是培养我们具有这些能力的有效过程。

数学建模是指应用数学的方法解决某一实际问题的全过程，这一过程往往包括：对实际问题的较详细的了解、分析和判断，为解决问题所需相关数学方法的选择，针对实际问题的数学描述，数学模型的建立，对数学模型的求解和必要的计算，数学结果在实际问题中的验证，将合理的数学结果应用于实际问题之中，从而解决实际问题。

我们所说的数学模型是实际问题的一种抽象模拟，它用数学符号、数学公式、图表、算法或程序描述现实对象中的数量关系。一般地说，数学模型可以描述为，对于现实世界中的一个特定对象，为了一个特定的目的，根据其特有的内在规律，做出一些必要的简化假设，运用适当的数学工具，得到的一个数学结构。也就是说，数学模型是通过抽象、简化的过程，是用数学语言对实际对象的一个近似的刻画，以便于人们更深刻地认识所研究的对象。

我们对数学模型并不陌生，比如，物理学中的“万有引力定律”、“能量转换定律”等都是非常典型的数学模型。再比如，与我们日常生活密切相关的“储蓄问题”、“天气预报”、“疾病诊断”、“人口预测”等活动中也都含有数学模型。可以说数学模型无处不在。

1.3 数学建模的方法、步骤及数学模型的分类

数学建模面临的问题是多种多样的，问题中所给出的已知信息也是各不相同，有的是一组实测数据或模拟数据，还有的是对问题的定性描述，不同的信息将用不同的方法去处理，从而得到不同的模型。即使面对相同的已知信息，由于建模的目的不同、分析的方法不同、采用的数学工具不同，所以得到的模型也不同。因此，数学建模的方法及数学模型的分类都只能是从一般意义上区分。

数学建模的方法大致有两类：

1）机理分析的方法：根据对客观事物特性的认识，分析其因果关系，通过

推理分析找出反映事物内部机理的数量规律，建立的模型常常有明确的物理或现实意义。如，“万有引力定律”、“能量转换定律”。

2）测试分析的方法：对客观事物的特性不能准确认识，看不清其内部机理，而将客观对象看作一个内部机理无法直接寻求的“黑箱系统”，采用系统辨识的方法，即通过对系统的输入、输出数据的测量和分析，按照一定的准则在某一类模型中找出与数据拟合得最好的模型。如，“天气预报问题”、“疾病诊断问题”。

在这两类方法中又可根据所应用的数学方法的不同而分为许多具体的方法，如，机理分析方法中有微分方程方法、最优化方法等，测试分析方法中有回归分析方法、方差分析方法等。而且在实际建模中往往是两类方法的综合运用，即用机理分析方法确定数学模型的结构，再用测试分析的方法确定模型中的参数，比如人口预测模型。

尽管数学建模方法多种多样，但是针对实际问题，建立数学模型所经历的基本过程大体相同。**一般有如下步骤：**

1）建模准备 了解实际问题的背景（属于哪一个领域），明确数学建模的目的（解决什么问题），收集数学建模的必要信息（相关数据和参考资料），分析研究对象的主要特征（内在机理或输入输出），从而对实际问题有一个比较清晰的了解。

2）模型假设 根据所研究对象的特征及建模目的，抓住问题的本质，忽略次要因素，对问题做出合理的简化的假设，假设的合理性主要是指假设要基本符合实际情况，假设的简化性主要是为了能够用数学的语言描述问题。能否做出合理的简化的假设，取决于对问题的了解是否准确、深入，还取决于是否具有直观判断力、丰富想象力，以及是否具有足够的知识储备。

3）模型建立 根据所做出的假设，用数学的语言、符号描述出研究对象的内在规律，并建立包含常量、变量等的数学模型，可以是函数表达公式、数学方程、算法或图形等。建立模型的原则是要尽量用简单的数学工具。

4）模型求解 采用各种计算方法对所建立的数学模型进行求解，可能是求函数的极值、求方程的解、算法或图形的实现等。此时可以应用各种计算工具，特别是数学软件和计算机技术。

5）模型分析 对求解结果进行数学上的分析，如，结果的误差分析（误差是否在允许的范围内）、统计分析（结果是否符合特定的统计规律）、模型对数据的灵敏度分析（模型的结果是否会因数据的微小改变而发生大的变化）、对假设的鲁棒性分析（模型的结果是否对某一假设非常依赖）等。

6）模型检验 将求解结果和分析结果翻译回到实际问题之中，与实际现象、实际数据进行比较，检验是否与实际吻合。如果吻合较好，则模型及其结果可以应用于实际问题；如果吻合不好，则需对模型进行修正。此时问题常常出现在模

型假设上，所以应对模型假设进行修正或补充，然后重新建模。有时，一个好的模型需要反复修正几次才能得到。

7）模型应用　当模型经过检验已成为一个具有合理性和实用性的模型后，即可以用来解决实际问题了。

数学模型的建立过程告诉我们，数学模型是对客观对象归纳抽象的产物，它源于客观实际，又高于客观实际。数学建模的过程就是“实践—理论——实践”的过程。因此，与其说数学建模是一门技术，不如说数学建模是一门艺术。它需要熟练的数学技巧、丰富的想象力和敏锐的洞察力，需要大量阅读、思考别人所做的模型，尤其要自己动手、亲身体验。

数学建模的方法多种多样，数学模型千差万别，对数学模型的分类也可以有很多不同的角度。**可有以下分类：**

1）按照模型的应用领域划分，有：人口模型、交通模型、环境模型、资源模型等。

2）按照模型的建立方法划分，有：初等模型、数学规划模型、微分方程模型、概率统计模型、网络模型、模糊模型、灰色模型等。

3）按照模型中变量特点划分，有：随机模型和确定模型，连续模型和离散模型，线性模型和非线性模型，静态模型和动态模型，等。

4）按照建模目的划分，有：描述模型、预测模型、优化模型、决策模型、控制模型等。

1.4 怎样学好数学建模

数学建模是应用数学知识解决实际问题的关键环节，是数学和客观对象连接的纽带，学习数学建模就是要培养我们用数学的语言表述实际问题及将数学计算结果回归到实际问题的双向翻译能力、严密的逻辑推理和精确的数学运算能力、熟练运用相关数学软件的能力，这就需要我们具有高度的观察力、丰富的想象力、综合的分析力，以及一些灵感和顿悟，需要我们具有自我获取新知识的能力，因此学习数学建模课程在思考方法和思维方式上与学习其他数学课程有很大差别。另外数学建模常常是以小组为单位的集体活动，因此，培养良好的交流、合作和表达能力也是非常重要的。

为了培养上述能力，我们要做到：

1. 在数学建模课堂上

认真学习常用的数学建模方法，对各种方法所涉及的问题不能只满足于掌握书中给出的或老师介绍的方法，要多提问题，学会从多个不同的角度去思考问题，想想还有更好的解决方法吗，如果问题中的条件变一下会怎么样，等等。数

学建模是没有唯一正确的答案的，模型无所谓“对”与“错”，对同一个问题可能会建立多个不同的模型，评价模型好坏的唯一标准是实践的检验，看看模型是否更符合实际情况。

2. 在数学建模课余时间

1）广泛了解多学科知识，尽量掌握多种数学建模方法，这样面对实际问题你才可能做到丰富地想象。

2）注意观察生活中的各种事物，把握事物的内在本质，并用数学的眼光看待身边的事物，培养数学洞察力。

3）学会类比，做到“由此及彼和由彼及此”，培养发散思维能力。数学模型是对现实对象的抽象化产物，不为对象所属领域所独有，具有可移植性，一个数学模型经常可以应用于不同领域的多个问题。

4）培养自学能力，能快速获取新知识，并能学以致用，因为数学建模问题是广泛的，所涉及的知识是相对无限的，我们不可能将所有的知识都储备好再去面对实际问题，常常需要现学现用。

5）学会从杂乱无章的各种信息中快速收集出有用的信息，学会利用图书馆、网络查找相关资料。熟练掌握计算机操作，会简单的计算机编程，学会使用常用的数学软件。

6）学会撰写科技论文，数学建模的全过程及全部求解结果都体现在数学建模论文中，所以应该通过论文，让读者清楚地知道你用了什么方法、解决了什么问题，获得了怎样的结果，结果是否符合客观实际等。

3. 在数学建模集体活动期间

1）学会与他人交流学习体会、交流对问题的看法，准确表述自己的观点；学会接受别人的意见和建议，及时调整和改进自身的不足；学会配合别人的工作，不能总是以自我为中心。

2）要有坚忍不拔的刻苦钻研精神和持之以恒的工作态度。遇到困难既不能回避，也不能丧失信心，应当勇于承担工作和责任，并以自己的精神鼓励组内同伴。

1.5 数学建模示例

例 1.1　稳定的椅子

问题 把椅子往不平的地面上一放，通常只有三只脚着地，放不稳，然而只需稍挪动几次，就可以使四只脚同时着地了，即放稳了。这个看来与数学无关的现象能用数学的语言给以表述，并用数学工具来证实吗？

模型假设

1）椅子四条腿一样长，椅脚与地面接触处可视为一个点，四点连线呈正方形。

2）地面高度是连续变化的，沿任何方向都不会出现间断（没有像台阶那样的情况），即地面可视为数学上的连续曲面。

3）对于椅脚的间距和椅腿的长度而言，地面是相对平坦的，使椅子在任何位置至少有三只脚同时着地。

假设 1）显然是合理的；假设 2）相当于给出了椅子能放稳的条件，因为如果地面高度不连续，譬如在有台阶的地方是无法使四脚同时着地的；假设 3）排除了这样的情况：地面上与椅脚间距和椅腿长度的尺寸大小相当的范围内，出现深沟或凸峰（即使是连续变化的），致使三只脚无法同时着地。

模型构成 中心问题是用数学语言把椅子四脚同时着地的条件和结论表示出来。

首先要用变量表示椅子的位置。注意到椅脚连线呈正方形，以正方形中心为对称点，正方形绕中心的旋转正好代表了椅子位置的改变，于是可以用旋转角度这一变量表示椅子的位置。在图 1.1 中椅脚连线为正方形 $ABCD$，对角线 AC 与 x 轴重合，椅子绕中心 O 旋转角度 θ 后，正方形 $ABCD$ 转致 $A'B'C'D'$ 的位置，所以对角线 AC 与 x 轴的夹角 θ 表示了椅子的位置。

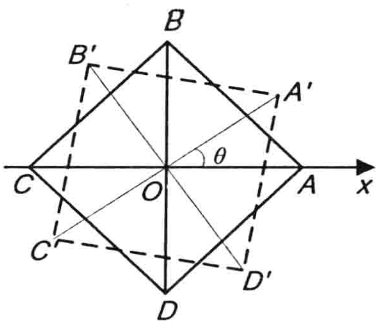

图 1.1 变量 θ 表示椅子的位置

其次要把椅脚着地用数学符号表示出来。如果用某个变量表示椅脚与地面的竖直距离，那么，当这个距离为零时就是椅脚着地了。椅子在不同位置时椅脚与地面的距离不同，所以这个距离是位置变量 θ 的函数。

虽然椅子有四只脚，因而有四个距离，但是由于正方形的中心对称性，只要设两个距离函数就行了。记 A，C 两脚与地面距离之和为 $f(\theta)$，B，D 两脚与地面距离之和为 $g(\theta)$。由假设 2)，f 和 g 都是连续函数。由假设 3)，椅子在

任何位置至少有三只脚着地，所以对于任意的θ，$f(\theta)$和$g(\theta)$中至少有一个为零。当$\theta=0$时，不妨设$g(\theta)=0$，$f(\theta)>0$。

这样，改变椅子的位置使四只脚同时着地就归结为如下的数学命题：

已知$f(\theta)$和$g(\theta)$是θ的连续函数，对任意θ，$f(\theta)g(\theta)=0$，且$g(0)=0$，$f(0)>0$。证明存在θ_0使$f(\theta_0)=g(\theta_0)=0$。

模型求解 上述命题有多种证法，这里介绍其中比较简单但有些粗糙的一种。

将椅子旋转$\pi/2$，对角线AC与BD互换。由$g(0)=0$和$f(0)>0$可知$g(\pi/2)>0$和$f(\pi/2)=0$。

令$h(\theta)=f(\theta)-g(\theta)$，则$h(0)>0$和$h(\pi/2)<0$。由$f$和$g$的连续性知$h$也是连续函数。根据连续函数的基本性质，必存在$\theta_0(0<\theta_0<\pi/2)$使$h(\theta_0)=0$，即$f(\theta_0)=g(\theta_0)$。

最后，因为$f(\theta_0)g(\theta_0)=0$，所以$f(\theta_0)=g(\theta_0)=0$。

模型解释 将一把椅子放在不平的地面上，如果不稳，就将椅子绕椅脚连线的正方形中心沿逆时针旋转，那么一定在某一个位置椅子能放稳。

思考 模型中假设1“四脚连线呈正方形”并不是本质的假设，如果将其改为“椅脚连线呈矩形”，将如何呢？

例 1.2　商人安全过河

问题 三名商人各带一名随从乘船渡河，一只小船只能容纳二人，由他们自己划行。随从们密约，在河的任一岸，一旦随从的人数比商人多，就杀人越货。但是如何乘船渡河的大权掌握在商人们手中。商人们怎样才能安全渡河呢？

这是一个典型的智力游戏问题，但它具有代表性，即从数学上可归结为多步决策过程，并利用状态转移法来描述和求解。

基本步骤：1）定义状态：$s_k=(x_k,y_k)$。s_k表示第k次过河时此岸商人人数为x_k、随从人数为y_k，其可能值为$x_k=y_k=0,1,2,3$。对商人安全的状态集合称为允许状态集合，记作

$$S=\{(x,y)\,|\,x=0,\ y=0,1,2,3;\ x=3,\ y=0,1,2,3;\ x=y=1,2\}$$

自然要求$s_k\in S$。

2）定义决策：$d_k=(u_k,v_k)$。d_k表示第k次渡河方案，此时渡船中商人人数为u_k，随从人数为v_k，据题意，允许决策集合$D=\{(u,v)\,|\,u+v=1,\ 2\}$，并且有$d_k\in D$。

3）建立状态转移方程

$$s_{k+1} = s_k + (-1)^k d_k$$

来表示第 k 次过河的运动规律。由于全体过河需要奇数次 n，从而该问题可归结为上述规律

$$s_1 = (3,\ 3) \to s_{n+1} = (0,\ 0)$$

由于此问题十分简单，可利用更直观的图示法求解。

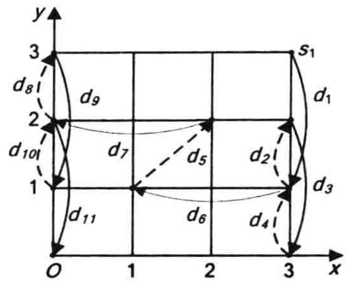

图 1.2　安全渡河问题的图解法

在图 1.2 中，允许状态用圆点表示，允许决策集合为沿方格线移动 1 或 2 格，其运动规律为奇次向左下方移动（实线），偶次向右上方移动（虚线）。最终经 $n = 11$ 步到达 $(0, 0)$。

例 1.3　为什么采用三级火箭发射卫星

有关资料表明，一般都是用三级火箭系统发射各种科学卫星，为什么不用单级火箭来发射呢？下面我们从动力学及质量结构方面对此做出简要分析。

1. 单级火箭发射的可能性

卫星应在预定高度的轨道上运动，为克服地球引力和大气阻力的影响，必须保证发射火箭具有足够高的速度。

基本假设

1）地球是半径为 R 的均匀球体。

2）卫星的质量为 m，在高度为 h（球心距为 $r = R + h$）的平面轨道上做匀速圆周运动。

火箭速度

地球对卫星的引力为 $F = K\dfrac{m}{r^2}$，卫星的地面重量为 $mg = K\dfrac{m}{R^2}$，因此，

引力常数 $K = gR^2$，从而卫星受到的引力为

$$F = mg\frac{R^2}{r^2}$$

由假设 2），卫星所受引力也是它作圆周运动时的向心力，所以又有

$$F = \frac{mv^2}{r}$$

从上面两式可以解出火箭的速度为

$$v = R\sqrt{\frac{g}{r}} = R\sqrt{\frac{g}{R+h}}$$

显然当 h 增大时，v 减少。设 $g = 9.81\,\text{m/s}^2$，$R = 6400\,\text{km}$，对不同高度 h 可计算出相应的发射速度，如下表

表 1.1　不同高度所需的发射速度

h	400	600	800	1000
v	7.69	7.58	7.47	7.37

火箭速度依赖的因素

我们忽略火箭重力和大气阻力，将问题理想化。设火箭 t 时刻的质量、速度分别为 $m(t)$ 和 $v(t)$，火箭按喷气对箭体的相对速度为 u。

在 $[t, t+\Delta t]$ 时间内，火箭减少质量为

$$\Delta m = \frac{\mathrm{d}m(t)}{\mathrm{d}t}\Delta t + o(\Delta t^2)$$

根据动量守恒定律，有

$$m(t)v(t) = m(t+\Delta t)v(t+\Delta t) - \Delta m(v(t)-u) + o(\Delta t^2)$$

整理上式，并将等式两端同时除以 Δt，令 $\Delta t \to 0$，则得到方程

$$m(t)\frac{\mathrm{d}v(t)}{\mathrm{d}t} = -u\frac{\mathrm{d}m(t)}{\mathrm{d}t},\ v(0) = v_0$$

其解为

$$v(t) = v_0 + u\ln\frac{m_0}{m(t)} \triangleq v(u, \frac{m_0}{m(t)}) \qquad (1)$$

它表示在 v_0、m_0 固定条件下，火箭速度 $v(t)$ 取决于喷射速度 u 和质量比

$m_0/m(t)$。受技术条件制约，一般$u\approx 3\,\text{km/s}$，因而提高质量比成为提高速度的关键。

火箭系统的质量

火箭系统质量由三部分构成，即

$$m(t)=m_P+m_F(t)+m_S$$

式中，m_P、$m_F(t)$和m_S分别为卫星质量、燃料质量和火箭结构质量。

在单级火箭发射过程中，燃料质量是递减的，星箭分离瞬间的剩余质量为m_P+m_S。由于$v_0=0$，从而卫星速度

$$v(t)=u\ln\frac{m_0}{m_P+m_S}=u\ln\frac{m_P+m_F+m_S}{m_P+m_S}$$

式中，$m_F=m_F(0)$，$m_0=m_P+m_F+m_S$。

由于载荷质量m_P固定，提高质量比$m_0/m(t)$相当于减少比值

$$\lambda=\frac{m_S}{m_S+m_F}$$

因为

$$m_S=\lambda(m_S+m_F)=\lambda(m_0-m_P)$$

从而有

$$v=u\ln\frac{m_0}{\lambda m_0+(1-\lambda)m_P}$$

在目前情况下，仅能达到$\lambda\approx 0.1$，即便是空载，即$m_P=0$，火箭的最高速度也只能达到

$$v=u\ln\lambda^{-1}\approx 7\text{ km/s}$$

所以，单级火箭发射卫星肯定不能达到第一宇宙速度。究其原因，火箭躯体这样大的无效载荷在发射的加速过程中要浪费掉大量燃料，效率低下。

2．多级火箭系统

人们注意到二踢脚通常比一般的单级鞭炮要窜得高。多级火箭递推发射原理与之十分相似。在发射中需要逐级点燃，即丢掉该级运载火箭，加速下一级运载工具，直至最后一级火箭达到预定高度时才释放出卫星。

在我们讨论的理想的n级火箭系统中，各级的比值λ和相对喷射速度u相

同。设第i级火箭质量为m_i，则其结构质量应为λm_i，燃料质量为$(1-\lambda)m_i$，并约定荷载卫星为第$n+1$级，记

$$m_P \triangleq m_{n+1} \triangleq w_{n+1}$$

则可将系统的初始质量、第i级火箭工作时的系统初始质量和剩余质量分别设为m_0、w_i和w_i'，其计算公式如下：

$$m_0 = \sum_{k=1}^{n+1} m_k$$

$$w_i = \sum_{k=i}^{n+1} m_k = m_i + w_{i+1}$$

$$w_i' = \lambda m_i + w_{i+1} = \lambda(w_i - w_{i+1}) + w_{i+1}$$

由公式（1），不难逐级递推计算出第i级速度

$$v_i = v_{i-1} + u\ln\frac{w_i}{w_i'},\quad i = 1,2,\cdots,n \tag{2}$$

第i级火箭开始工作时，设其初始质量与负载质量比为常数，即有$\dfrac{w_i}{w_i'} = \mu_i$。

由于

$$\frac{w_i}{w_i'} = \frac{w_i}{\lambda m_i + w_{i+1}} = \frac{\mu_i}{1+\lambda(\mu_i - 1)}$$

从而$v_0 = 0$时，由式（2）可得到最终速度

$$v_n = u\ln\prod_{k=1}^{n}\frac{\mu_k}{1+\lambda(\mu_k - 1)} = \bar{v}\ （常数）$$

即$\dfrac{\bar{v}}{u} = C$（常数）。注意到，要使载荷尽可能高，等价于比值

$$\frac{m_0}{m_P} = \frac{w_1}{w_{n+1}} = \frac{w_1}{w_2}\frac{w_2}{w_3}\cdots\frac{w_n}{w_{n+1}} = \mu_1\mu_2\cdots\mu_n$$

最小。最后，可归结为优化问题