普通高等教育“十二五”规划教材

线性代数

主编　梁燕来　胡源艳
副主编　易亚利　凌征球　李治强　王培

Linear Algebra

国防工业出版社
National Defense Industry Press

普通高等教育“十二五”规划教材

线性代数

主　编　梁燕来　胡源艳
副主编　易亚利　凌征球　李治强　王　培

国防工业出版社
·北京·

内容简介

线性代数是代数学的理论基础之一,是高等学校理工科各专业(非数学专业)和经济管理类学科有关专业的一门必修基础课.全书共五章,即行列式,矩阵及其运算,线性方程组,特征值与特征向量,二次型,另外包括一个附录——Maple 数学实验.每章均配备有课后习题和单元测试题,书后附有参考答案.

本书可作为普通高等学校理工科类各专业、经济管理类有关专业线性代数课程的教材,也可供工程技术人员、报考研究生的读者及各类自学者参考.

图书在版编目(CIP)数据

线性代数 / 梁燕来,胡源艳主编.—北京:国防工业出版社,2014.7

普通高等教育"十二五"规划教材

ISBN 978-7-118-09563-0

Ⅰ.①线... Ⅱ.①梁... ②胡... Ⅲ.①线性代数-高等学校-教材 Ⅳ.①O151.2

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2014)第 146546 号

※

国防工业出版社出版发行

(北京市海淀区紫竹院南路 23 号 邮政编码 100048)

北京市李史山胶印厂

新华书店经售

*

开本 787×1092 1/16 **印张** 9 **字数** 221 千字

2014 年 7 月第 1 版第 1 次印刷 **印数** 1—4000 册 **定价** 25.00 元

(本书如有印装错误,我社负责调换)

国防书店:(010)88540777 发行邮购:(010)88540776

发行传真:(010)88540755 发行业务:(010)88540717

前　言

线性代数是高等学校理工科、经济管理各专业的必修课程，是学习现代科学技术的重要理论基础，已成为自然科学和工程技术领域中应用广泛的数学工具. 本书以教育部颁布的高等学校理工科数学课程教学基本要求为依据，在总结多年的教学实践经验的基础上编写而成.

在编写过程中，借鉴了国内外许多优秀教材的思想，内容上精心安排，表达上通俗易懂. 在概念引入、理论分析和例题演算等环节上，尽可能多地反映代数与实际结合的思想，这样可以使学生更好地从实际背景中理解代数概念的来龙去脉，以利于知识的掌握；淡化抽象的概念与定理，便于学生自学. 把数学实验作为一章，实验模型的建立与求解既突出线性代数的理论和方法，又提高了学生应用软件解决实际问题的能力，实现理论和应用的有机结合. 除在每章后选配巩固课程内容的基本习题外，每章结束后还配备了单元测试题，便于学生复习巩固，提高学习质量.

本书由梁燕来策划和统稿． 全书共五章. 第 1 章由胡源艳、王培编写，第 2 章由胡源艳编写，第 3 章由易亚利编写，第 4 章由凌征球编写，第 5 章由梁燕来编写，附录由李治强编写. 全书由梁燕来、胡源艳审校.

本教材的编写始终得到了玉林师范学院数学与信息科学学院领导和代数几何教研室全体教师的大力支持与帮助. 此外还得到了广西高校教学名师项目（教学改革项目2013GXMS113）、广西教师教育课题（2012JS015）、广西高等教育教学改革工程项目（2013JGB215）、玉林师范学院精品课程项目（12JPKC002）及玉林师范学院教学改革工程项目（14YJJG35）的资助.

由于编者水平有限，本书在编写和内容的组织上难免存在不足之处，敬请同行及读者批评指正.

目　录

第 1 章　行列式

行列式是线性代数的一个重要组成部分. 本章介绍行列式的定义、性质、计算方法及其简单应用.

1.1　n 阶行列式

1.1.1　排列与逆序

定义 1.1.1　由自然数 $1,2,\cdots,n$ 组成的不重复的有确定次序的排列,称为一个 n 级排列,记为 $i_1i_2\cdots i_n$. 按数字的自然顺序由小到大的 n 级排列 $123\cdots n$ 称为标准排列或自然排列.

显然,n 级排列共有 $n!$ 个.

定义 1.1.2　在一个排列 $i_1i_2\cdots i_n$ 中,如果较大的数排在较小的数前面,则称这两个数构成一个逆序. 一个排列中逆序的总个数称为这个排列的逆序数,记为 $\tau(i_1i_2\cdots i_n)$.

根据上述定义,可以得到计算一个排列逆序数的方法:任取一个 n 级排列 $i_1i_2\cdots i_n$,比 $i_t(t=1,2,\cdots,n)$ 大且排在 i_t 前面的数共有 p_t 个,则与 i_t 构成的逆序个数是 p_t,而该排列中所有自然数的逆序的个数之和就是这个排列的逆序数. 即

$$\tau(i_1i_2\cdots i_n)=p_1+p_2+\cdots+p_n=\sum_{i=1}^{n}p_t.$$

例 1.1.1　计算排列 7456312 的逆序数.

解　因为 7 排在首位,故其逆序个数为 0;

4 前面比它大的数有 1 个,故其逆序个数为 1;

5 前面比它大的数有 1 个,故其逆序个数为 1;

6 前面比它大的数有 1 个,故其逆序个数为 1;

3 前面比它大的数有 4 个,故其逆序个数为 4;

1 前面比它大的数有 5 个,故其逆序个数为 5;

2 前面比它大的数有 5 个,故其逆序个数为 5.

故所求排列的逆序数为 $\tau(7456312)=0+1+1+1+4+5+5=17$.

定义 1.1.3　逆序数为奇数的排列称为奇排列,逆序数为偶数的排列称为偶排列.

例 1.1.2　计算排列 $135\cdots(2n-1)24\cdots(2n)$ 的逆序数,并讨论其奇偶性.

解　$\tau(135\cdots(2n-1)24\cdots(2n))=(n-1)+(n-2)+\cdots 3+2+1=\dfrac{n(n-1)}{2}$,

易见,当 $n=4k$ 或 $4k+1$ 时,该排列是偶排列;当 $n=4k+2$ 或 $4k+3$ 时,该排列是奇排列.

定义 1.1.4　在排列中,将任意两个元素对调,其余的元素不动,就得到另一个排列,这样的一个变换称为对换. 将相邻两个数对换,叫做相邻对换.

将一个排列作一次对换,它的奇偶性将会发生怎样的变化呢? 例如,将排列 45132 中的 4

和 3 对换得到排列 35142,它们的逆序数分别如下:

$\tau(45132)=0+0+2+2+3=7$,$\tau(35142)=0+0+2+1+3=6.$

可见,奇排列进行一次对换后变成了偶排列.

一般地,有下面的定理:

定理 1.1.1 任意一个排列经过一次对换后,其奇偶性改变.

证明 (1)先看被对换的两个元素在该排列中是相邻的情形.
设原排列为

$$\cdots jk\cdots, \tag{1.1.1}$$

经过 j,k 对换变成

$$\cdots kj\cdots, \tag{1.1.2}$$

这里"$\cdots$"表示那些不动的数. 显然,在排列式(1.1.1)与式(1.1.2)中,j,k 与前后不动的元素构成的逆序或顺序都是相同的,不同的只是 j 与 k 的次序变了. 若原来构成逆序,经过对换后,则 k 与 j 不构成逆序,这样排列式(1.1.2)比式(1.1.1)的逆序数少 1. 反之,则排列式(1.1.2)比式(1.1.1)的逆序数多 1. 无论是减少 1 还是增加 1,排列的奇偶性都发生改变.

(2) 再看一般对换的情形.

设原排列为

$$\cdots ji_1i_2\cdots i_sk\cdots, \tag{1.1.3}$$

对换 j 与 k,得到新的排列

$$\cdots ki_1i_2\cdots i_sj\cdots. \tag{1.1.4}$$

不难看出,这样一个不相邻的两个元素的对换可以通过若干个相邻的两个元素的对换来实现. 从式(1.1.3)出发,将 k 与 i_s 对换,再与 i_{s-1} 对换,$\cdots$,与 i_1 对换,最后与 j 对换,共经过 $s+1$ 次相邻元素的对换,排列式(1.1.3)变成

$$\cdots kji_1i_2\cdots i_s\cdots. \tag{1.1.5}$$

再从式(1.1.5)出发,把 j 与 $i_1,i_2,\cdots,i_s$ 一个一个地对换,共经过 s 次相邻元素的对换,排列式(1.1.5)就变成了排列式(1.1.4). 因此,j 与 k 的直接对换可经过 $2s+1$ 次相邻元素的对换来实现. 由于 $2s+1$ 是奇数 ,故排列式(1.1.3)与式(1.1.4)的奇偶性不同.

推论 1.1.1 奇排列变成自然顺序排列的对换次数为奇数,偶排列变成自然顺序排列的对换次数为偶数.

推论 1.1.2 在全部 $n(n\geqslant 2)$ 级排列中, 奇偶排列的个数相等,各有$\frac{n!}{2}$个.

推论 1.1.3 由元素 $1,2,\cdots,n$ 构成的任意一个 n 级排列 $i_1i_2\cdots i_n$ 都可以经过若干次对换变成自然排列,并且所作对换的次数与 $\tau(i_1i_2\cdots i_n)$ 有相同的奇偶性.

1.1.2 二阶与三阶行列式

在初等数学中,二元一次方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2=b_1, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2=b_2, \end{cases} \tag{1.1.6}$$

的解,实际为平面上两条直线的交点. 当这两条直线不平行时,即 $a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}\neq 0$ 时,利用消

元法解得

$$x_1=\frac{b_1a_{22}-b_2a_{12}}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}},x_2=\frac{b_2a_{11}-b_1a_{21}}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}}.$$

为了便于记忆上述解公式,引进记号

$$\boldsymbol{D}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}, \tag{1.1.7}$$

式(1.1.7)称为二阶行列式,其中数 $a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}$ 叫做行列式的元素,横排叫做行,竖排叫做列. 元素 a_{ij} 的第一个下标 i 叫做行标,表明该元素位于第 i 行,第二个下标 j 叫做列标,表明该元素位于第 j 列.

由式(1.1.7)可知,二阶行列式是由 4 个数按一定的规律运算所得的代数和. 这个规律称为"对角线法则". 如图 1-1-1 所示,把 a_{11}、a_{22} 之间的实连线称为主对角线,把 a_{12}、a_{21} 之间的虚连线称为副对角线,于是,二阶行列式便等于主对角线上两元素之积减去副对角线上两元素之积.

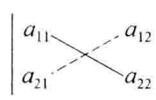

图 1-1-1

按照这个规律,有

$$\boldsymbol{D}_1=\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}=b_1a_{22}-b_2a_{12},\boldsymbol{D}_2=\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}=b_2a_{11}-b_1a_{21},$$

于是当 $\boldsymbol{D}\neq0$ 时,二元线性方程组(1.1.6)的解可由行列式表示为

$$x_1=\frac{\boldsymbol{D}_1}{\boldsymbol{D}},x_2=\frac{\boldsymbol{D}_2}{\boldsymbol{D}}.$$

对三元线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3=b_1, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3=b_2, \\ a_{31}x_1+a_{32}x_2+a_{33}x_3=b_3, \end{cases} \tag{1.1.8}$$

可以进行类似的讨论. 由此引入记号

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{11}a_{23}a_{32},$$

称为三阶行列式.

由上述定义可见,三阶行列式有 6 项,每一项均为不同行不同列的三个元素之积再冠以正负号,其运算的规律性可用"对角线法则"(图 1-1-2)来表述,图中有三条实线看作是平行于主对角线的连线,三条虚线看作是平行于副对角线的连线,实线上三元素的乘积冠正号,虚线上三元素的乘积冠负号.

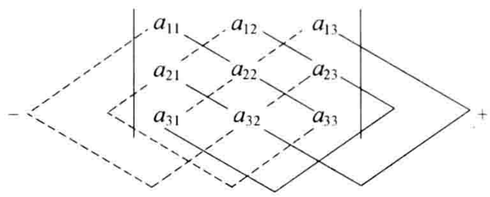

图 1－1－2

例 1.1.3 求解方程 $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & x & 1 \\ 4 & x^2 & 2 \end{vmatrix} = 0.$

解 方程左端 $=1\times x\times 2+1\times 1\times 4+1\times 2\times x^2-1\times x\times 4-1\times x^2\times 1-1\times 2\times 2$

$=2x+4+2x^2-4x-x^2-4$

$=x^2-2x.$

由 $x^2-2x=0$，解得 $x=0$ 或 $x=2$.

注:三元线性方程组(1.1.8)的解也可以像二元线性方程组一样用行列式表示,详见1.4节.

由上面的讨论可知,对于二、三阶的行列式有如下特点:

(1) 二、三阶的行列式的每一项都是取自不同行、不同列的元素的乘积,其代数和即为行列式的值. 二阶行列式有 2! 项,三阶行列式有 3! 项.

(2) 代数和中每一项的符号有以下规律:行指标取成自然排列时,由列指标组成排列的奇偶性决定每项前的正负号,偶者为正,奇者为负.

综上,有

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \sum_{j_1 j_2} (-1)^{\tau(j_1 j_2)} a_{1j_1} a_{2j_2},$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \sum_{j_1 j_2 j_3} (-1)^{\tau(j_1 j_2 j_3)} a_{1j_1} a_{2j_2} a_{3j_3},$$

这里 $\sum\limits_{j_1 j_2}$ 表示对 1,2 这两个数的所有排列取和, $\sum\limits_{j_1 j_2 j_3}$ 表示对 1,2,3 这三个数的所有排列取和.

由此,可以得到 n 阶行列式的定义.

1.1.3 *n* 阶行列式

定义 1.1.5 由 $n\times n$ 个数组成的符号

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

称为 n 阶行列式,它表示所有取自不同行不同列的 n 个元素的乘积的代数和,各项的符号确定的原则是:当这一项的行标按自然顺序排列后,如果对应的列标是偶排列就取正号,如果是奇排列就取负号,即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{j_1 j_2 \cdots j_n} (-1)^{\tau(j_1 j_2 \cdots j_n)} a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{nj_n}, \tag{1.1.9}$$

式中:$j_1 j_2 \cdots j_n$ 是 $1,2,\cdots,n$ 的一个排列. 这里 $\sum\limits_{j_1 j_2 \cdots j_n}$ 表示对所有 n 级全排列求和,将 n 阶行列式简记为 $\boldsymbol{D} = |a_{ij}|$.

式(1.1.9)也称为 n 阶行列式的展开式,它是前面的二阶、三阶行列式的推广. 特别地,当 $n=1$ 时,一阶行列式 $|a| = a$,例如,一阶行列式 $|3| = 3$,$|-3| = -3$.

注:行列式的记号不要与绝对值的记号相混淆.

例 1.1.4 计算行列式:

(1) $\boldsymbol{D} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$;(2) $\boldsymbol{D} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & a_{n-1,2} & \cdots & 0 \\ a_{n1} & 0 & \cdots & 0 \end{vmatrix}$.

解 (1)$\boldsymbol{D}$ 的一般项为 $(-1)^{\tau(j_1 j_2 j_3 j_4)} a_{1j_1} a_{2j_2} a_{3j_3} a_{4j_4}$,现考查不为零的项. a_{1j_1} 取自第一行,但只有 $a_{14} \neq 0$,故 $j_1 = 4$,同理得 $j_2 = 3$,$j_3 = 2$,$j_4 = 1$. 即行列式中不为零的项只有

$$(-1)^{\tau(4321)} 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24,$$

所以 $\boldsymbol{D} = 24$.

(2) 由于行列式的值为 $\sum\limits_{j_1 j_2 \cdots j_n} (-1)^{\tau(j_1 j_2 \cdots j_n)} a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{nj_n}$,因此只需对可能不为 0 的乘积 $(-1)^{\tau(j_1 j_2 \cdots j_n)} a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{nj_n}$ 求和,考虑第 n 行的元素 a_{nj_n},可得 $j_n = 1$,再考虑第 $n-1$ 行元素 $a_{n-1,j_{n-1}}$,可得 $j_{n-1} = 1$ 或 $j_{n-1} = 2$,由 $j_n = 1$ 可知 $j_{n-1} = 2$,依此类推,$j_2 = n-1$,$j_1 = n$,排列 $j_1 j_2 \cdots j_n$ 只能是排列 $n(n-1)\cdots 21$,因此它的逆序数为

$$(n-1) + (n-2) + \cdots + 2 + 1 = \frac{n(n-1)}{2},$$

所以行列式的值为

$$\boldsymbol{D} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} a_{1n} a_{2,n-1} \cdots a_{n-1,2} a_{n1}.$$

例 1.1.5 证明上三角行列式

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11} a_{22} a_{33} \cdots a_{nn}.$$

证明 $\boldsymbol{D}$ 的展开式中的一般项为 $(-1)^{\tau(j_1 j_2 \cdots j_n)} a_{1j1} a_{2j2} \cdots a_{njn}$,现考察不为零的项. a_{nj_n} 取自第 n 行,但只有 $a_{nn} \neq 0$,故 $j_n = n$;$a_{n-1j_{n-1}}$ 取自第 $n-1$ 行,只有 $a_{n-1n-1} a_{n-1n} \neq 0$ 但是由于 $j_n = n$,故 $j_{n-1} = n-1$;同理可得 $j_{n-2} = n-2,\cdots,j_2 = 2,j_1 = 1$. 所以

$$\boldsymbol{D} = (-1)^{\tau(12\cdots n)} a_{11} a_{22} \cdots a_{nn} = a_{11} a_{22} \cdots a_{nn}.$$

注:类似可得下三角形行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33}\cdots a_{nn}.$$

对角行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33}\cdots a_{nn}.$$

在行列式的定义中,规定 n 个元素的乘积时,元素的行指标按自然排列,由列指标排列的逆序数决定各项前的正负号. 那么能否在定义中的 n 个元素的相乘项里,把元素的列指标排成自然列,而用行指标排列的逆序数决定各项前的正负呢? 答案是肯定的,我们有如下的定义:

定义 1.1.6 n 阶行列式也可定义为

$$\boldsymbol{D} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{i_1 i_2 \cdots i_n} (-1)^{\tau(i_1 i_2 \cdots i_n)} a_{i_1 1} a_{i_2 2} \cdots a_{i_n n},$$

式中: $i_1 i_2 \cdots i_n$ 是 $1,2,\cdots,n$ 的一个排列. 这里 $\sum\limits_{i_1 i_2 \cdots i_n}$ 表示对所有 n 级全排列求和.

1.2 行列式的性质

1.1 节引进了 n 阶行列式的概念,并且也利用定义计算了几个简单的 n 阶行列式,可以看到,用定义计算 n 阶行列式是比较麻烦的. 因此,本节将介绍行列式的一些基本性质,利用这些性质可以简化行列式的计算.

定义 1.2.1 设

$$\boldsymbol{D} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

将行列式 $\boldsymbol{D}$ 的行与列的位置互换,得

$$\boldsymbol{D}^{\mathrm{T}} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

则行列式 $\boldsymbol{D}^{\mathrm{T}}$ 称为行列式 $\boldsymbol{D}$ 的转置行列式.

性质 1.2.1 行列式与它的转置列式相等,即 $\boldsymbol{D}=\boldsymbol{D}^{\mathrm{T}}$.

证明 记

$$\boldsymbol{D}^{\mathrm{T}}=\begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix}.$$

即 $b_{ij}=a_{ji}(i,j=1,2,\cdots,n)$,按行列式定义

$$\boldsymbol{D}^{\mathrm{T}}=\sum_{j_1\cdots j_n}(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)}b_{1j_1}b_{2j_2}\cdots b_{nj_n}=\sum_{j_1\cdots j_n}(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)}a_{j_11}a_{j_22}\cdots a_{j_nn}=\boldsymbol{D}.$$

注:性质 1.2.1 说明行列式中行与列地位是对称的,即行具有的性质,其列同样具有.

性质 1.2.2 互换行列式的两行(列),行列式改变符号,即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{s1} & a_{s2} & \cdots & a_{sn} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=-\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{s1} & a_{s2} & \cdots & a_{sn} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

证明 根据行列式的定义及定理 1.1.1,有

$$\begin{aligned} \text{左端} &= \sum_{j_1j_2\cdots j_n}(-1)^{\tau(j_1\cdots j_i\cdots j_s\cdots j_n)}a_{1j_1}\cdots a_{ij_i}\cdots a_{sj_s}\cdots a_{nj_n} \\ &= -\sum_{j_1j_2\cdots j_n}(-1)^{\tau(j_1\cdots j_s\cdots j_i\cdots j_n)}a_{1j_1}\cdots a_{sj_s}\cdots a_{ij_i}\cdots a_{nj_n}=\text{右端}. \end{aligned}$$

推论 1.2.1 如果行列式有两行(列)相对应的元素相等,则此行列式等于零.

性质 1.2.3 行列式的某一行(列)中所有元素都乘以同一数 k,等于用数 k 乘以此行列式,即

$$\boldsymbol{D}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ ka_{i1} & ka_{i2} & \cdots & ka_{in} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=k\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

推论 1.2.2 行列式中某一行(列)的所有元素的公因子可以提到行列式符号的外面.

推论 1.2.3 如果行列式中有两行(列)元素对应成比例,则此行列式等于零.

性质 1.2.4 如果行列式中某一行(列)的元素都可以分解为两个数之和,则此行列式也可以分解为相应的两个行列式的和,即

$$
D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1}+b_{i1} & a_{i2}+b_{i2} & \cdots & a_{in}+b_{in} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{i1} & b_{i2} & \cdots & b_{in} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.
$$

注:性质 1.2.4 对于某一行(列)的元素为多个数之和时,可以拆成多个行列式的和;如果是某两行(列)或两行(列)以上的元素为多个数之和时,不能直接利用性质 1.2.4.

性质 1.2.5 把行列式的某一行(列)的元素乘以同一数 k,然后加到另一行(列)对应的元素上去,行列式的值不变,即

$$
\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1}+ka_{j1} & a_{i2}+ka_{j2} & \cdots & a_{in}+ka_{jn} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.
$$

性质 1.2.3 ~ 1.2.5 的证明,请读者自己完成.

注:在计算行列式时为了叙述方便,约定如下记号:

(1) 互换行列式的第 i 行与第 j 行,记为 $r_i \leftrightarrow r_j$;互换第 i 列与第 j 列,记为 $c_i \leftrightarrow c_j$.

(2) 第 i 行(或列)乘以 k,记为 $r_i \times k$(或 $c_i \times k$).

(3) 将第 j 行(列)的元素都乘以同一数 k,然后再加到第 i 行(列)相应的元素上,记为 $r_i + kr_j$($c_i + kc_j$).

利用行列式的性质计算行列式,可以使计算简化. 下面举例说明.

例 1.2.1 计算行列式

$$
D=\begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}.
$$

解

$$
D=\begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} \overset{\substack{r_2+(-3)r_1 \\ r_3+(-1)r_1}}{=\!=\!=\!=} \begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & -9 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} \overset{r_2 \leftrightarrow r_4}{=\!=} -\begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 2 & 0 \\ 0 & -9 & 1 & 1 \end{vmatrix}
$$

$$
\overset{\substack{r_3+2r_2 \\ r_4+9r_1}}{=\!=\!=} -\begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 10 & 1 \end{vmatrix} \overset{r_4+\left(-\frac{5}{2}\right)r_3}{=\!=\!=\!=} -\begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}=-4.
$$

注:在上述例子中,通过行列式的性质将一个行列式的计算转化为一个上三角形(或下三角形)行列式的计算.这种计算行列式的方法称为化三角形法.

例 1.2.2 计算 n 阶行列式

$$\boldsymbol{D}_n = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \cdots & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 0 \end{vmatrix}.$$

解 由于行列式 $\boldsymbol{D}$ 的主对角线上元素全为 0,其余元素全为 1,行列式的每一行或每一列的元素之和都是相同的,因此,将第 $2,3,\cdots,n$ 行都加到第 1 行,然后利用性质 1.2.3,提取公因子,最后再用化三角形法即可.

$$\boldsymbol{D}_n = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \cdots & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 0 \end{vmatrix} \xlongequal[i=2,3,\cdots,n]{r_1 + r_i} \begin{vmatrix} n-1 & n-1 & n-1 & \cdots & n-1 & n-1 \\ 1 & 0 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \cdots & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= (n-1)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \cdots & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 0 \end{vmatrix} \xlongequal[i=2,3,\cdots,n]{r_i + (-)r_1} (n-1)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -1 \end{vmatrix}$$

$$= (-1)^{n-1}(n-1).$$

注:一般地,有

$$\boldsymbol{D} = \begin{vmatrix} a & b & b & \cdots & b \\ b & a & b & \cdots & b \\ b & b & a & \cdots & b \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b & b & b & \cdots & a \end{vmatrix} = [a+(n-1)b](a-b)^{n-1}.$$

1.3 行列式按行(列)展开

一般而言,低阶行列式的计算要比高阶行列式的计算简便,如果能将高阶行列式用低阶行列式加以表示,就能起到简化运算的作用.为此,本节将介绍另一种计算行列式的方法 - 行列式按行(列)展开方法,即降阶法.

1.3.1 余子式与代数余子式

定义 1.3.1 在 n 阶行列式 $\boldsymbol{D}$ 中,去掉元素 a_{ij}所在的第 i 行和第 j 列后,余下的元素按原来的次序构成的 $n-1$ 阶行列式,称为元素 a_{ij}的余子式,记为 M_{ij},再记

$$A_{ij} = (-1)^{i+j}M_{ij},$$

称 A_{ij}为元素 a_{ij}的代数余子式.

例如,在四阶行列式 $\boldsymbol{D}=|a_{ij}|_{4\times4}$中,$a_{32}$的余子式和代数余子式分别为

$$M_{32}=\begin{vmatrix}a_{11}&a_{13}&a_{14}\\a_{21}&a_{23}&a_{24}\\a_{41}&a_{43}&a_{44}\end{vmatrix},A_{32}=(-1)^{3+2}M_{32}=-M_{32}=-\begin{vmatrix}a_{11}&a_{13}&a_{14}\\a_{21}&a_{23}&a_{24}\\a_{41}&a_{43}&a_{44}\end{vmatrix}.$$

为了证明行列式按行(列)展开的定理,我们先证明一个引理:

引理 1.3.1 设 n 阶行列式 $\boldsymbol{D}$ 中的第 i 行元素除 a_{ij}外全部为零,则这行列式等于 a_{ij}与它的代数余子式的乘积,即

$$\boldsymbol{D}=\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1j}&\cdots&a_{1n}\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots&\ddots&\vdots\\0&0&\cdots&a_{ij}&\cdots&0\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots&\ddots&\vdots\\a_{n1}&a_{n2}&\cdots&a_{nj}&\cdots&a_{nn}\end{vmatrix}=a_{ij}A_{ij}.$$

证明 先证特殊情形. 不妨设 a_{ij}位于 $\boldsymbol{D}$ 的第一行第一列,$\boldsymbol{D}=\begin{vmatrix}a_{11}&0&\cdots&0\\a_{21}&a_{22}&\cdots&a_{2n}\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\a_{n1}&a_{n2}&\cdots&a_{nn}\end{vmatrix}$

由行列式定义

$$\begin{aligned}\boldsymbol{D}&=\sum_{j_1j_2\cdots j_n}(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)}a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}\\&=\sum_{1j_2\cdots j_n}(-1)^{\tau(1j_2\cdots j_n)}a_{11}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}\\&=a_{11}\sum_{j_2\cdots j_n}(-1)^{\tau(j_2\cdots j_n)}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}\\&=a_{11}M_{11}=a_{11}(-1)^{1+1}M_{11}=a_{11}A_{11}.\end{aligned}$$

再证一般情形,设

$$\boldsymbol{D}=\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1j}&\cdots&a_{1n}\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\0&0&\cdots&a_{ij}&\cdots&0\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\a_{n1}&a_{n2}&\cdots&a_{nj}&\cdots&a_{nn}\end{vmatrix}$$

将行列式 $\boldsymbol{D}$ 中第 i 行依次与第 $i-1$ 行,第 $i-2$ 行,$\cdots$,第 2 行,第 1 行互换后,再将第 j 列依次与第 $j-1$ 列,第 $j-2$ 列,$\cdots$,第 2 列,第 1 列互换,这样经过 $i+j-2$ 次互换后就把元素 a_{ij}互换到 D 的第一行第一列的位置,由行列式的性质及上述特殊情形,有

$$D=(-1)^{i+j-2}\begin{vmatrix} a_{ij} & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{1j} & a_{11} & \cdots & a_{1,j-1} & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i-1,j} & a_{i-1,1} & \cdots & a_{i-1,j-1} & a_{i-1,j+1} & \cdots & a_{i-1,n} \\ a_{i+1,j} & a_{i+1,1} & \cdots & a_{i+1,j-1} & a_{i+1,j+1} & \cdots & a_{i+1,n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{nj} & a_{n1} & \cdots & a_{n,j-1} & a_{n,j+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$=(-1)^{i+j}a_{ij}M_{ij}=a_{ij}A_{ij}.$$

1.3.2 行列式按行(列)展开定理

定理 1.3.1 行列式 D 等于它的任一行(列)的各元素与其对应的代数余子式的乘积之和,即

$$D=a_{i1}A_{i1}+a_{i2}A_{i2}+\cdots+a_{in}A_{in}(i=1,2,\cdots,n).$$

或

$$D=a_{1j}A_{1j}+a_{2j}A_{2j}+\cdots+a_{nj}A_{nj}(j=1,2,\cdots,n).$$

证明

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1}+0+\cdots+0 & 0+a_{i2}+\cdots+0 & \cdots & 0+0+\cdots+a_{in} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & a_{i2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}+\cdots+\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

再由引理 1.3.1,得

$$D=a_{i1}A_{i1}+a_{i2}A_{i2}+\cdots+a_{in}A_{in}(i=1,2,\cdots,n).$$

同理可证

$$D=a_{1j}A_{1j}+a_{2j}A_{2j}+\cdots+a_{nj}A_{nj}(j=1,2,\cdots,n).$$

注:这个定理称为行列式的按行(列)展开定理,利用这一定理并结合行列式的性质,可将行列式的阶数降低,从而达到简化计算的目的.此种方法称之为降阶法.

由定理 1.3.1,还可以得到下面的重要推论.

推论 1.3.1 行列式 D 中任一行(列)的元素与另一行(列)的对应元素的代数余子式乘积之和等于零,即

$$a_{i1}A_{j1}+a_{i2}A_{j2}+\cdots+a_{in}A_{jn}=0\ (i\neq j).$$

或