

南京航空航天大学
论文集

(二〇〇五年) 第15册

信息科学与技术学院

(第1分册)

南京航空航天大学科技部编

二〇〇六年三月

信息科学与技术学院

041 系

目 录

序号	姓名	职称	单位	论文题目	刊物、会议名称	年、卷、期	类别
001	张映南 刘 渝	硕士生 教 授	041 041	时域不完全重叠的多成分信号处理算法	数据采集与处理	2005. 20. 02	
002	钱云襄 刘 渝	硕士生 教 授	041 041	调频连续波雷达信号调制方式识别算法研究	数据采集与处理	2005. 20. 03	
003	林以猛 刘 渝 张映南	硕士生 教 授 硕士生	041 041 041	宽带信号的数字测向算法研究	南京航空航天大学学报	2005. 37. 03	
004	武小红 周建江	博士生 教授	041 041	Possibilistic Fuzzy c-Means Clustering Model Using Kernel Methods	International Conference on Computational for Modelling, Control and Automation	2005	
005	武小红 周建江	博士生 教授	041 041	Kernel-based Fuzzy K-nearest-neighbor Algorithm	International Conference on Computational for Modelling, Control and Automation	2005	
006	朱岱寅 朱兆达	副研 教授	041 041	利用线性相位模型提高干涉SAR图像相干性及改进相干性估计	电子学报	2005. 33. 09	
007	朱岱寅 朱兆达	副研 教授	041 041	合成孔径雷达及其干涉技术进展	数据采集与处理	2005. 20. 02	
008	朱岱寅 朱兆达	副研 教授	041 041	SAR Ground Moving Target Imaging Based on Keystone Transform Without Interpolation	IGARSS 2005	2005	
009	朱岱寅 朱兆达	副研 教授	041 041	方位扫描SAR区域成像研究	航空学报	2005. 33. 09	
010	沈明威 朱岱寅 朱兆达	博士生 副研 教授	041 041 041	SAR/GMTI Using $\Sigma\Delta$ -Beams Based On Signal Subspace Processing	2005IEEE Geoscience and Remote Sensing Symposium	2005. 04.	
011	沈明威 朱岱寅 朱兆达	博士生 副研 教授	041 041 041	基于信号子空间处理的和/差波束干涉 SAR/GMTI 技术研究	2005中国合成孔径雷达会议论文集	2005	
012	汤 洁 朱岱寅 汪 玲 朱兆达	硕士生 副研 讲师 教授	041 041 041 041	机载ISAR对海面舰船成像研究	2005中国合成孔径雷达会议论文集	2005	
013	关振红 朱岱寅 朱兆达	博士生 副研 教授	041 041 041	SAR原始数据压缩算法研究	南京航空航天大学学报	2005. 37. 03	
014	陶青年 朱岱寅 汪 玲	硕士生 副研 讲师	041 041 041	基于最小熵准则的ISAR运动补偿方法研究	2005中国合成孔径雷达会议论文集	2005	
015	陈 超 黎 宁	硕士生 副教授	041 041	一种无需背景参考图的运动目标分割的水平集新方法	江苏工业学院学报	2005. 17. 04	

目 录

序号	姓名	职称	单位	论文题目	刊物、会议名称	年、卷、期	类别
016	王海禹 黎 宁 李国强	硕士生 副教授 本科生	041 041 041	一种新的口服液药剂杂质提取方法	第十届全国青年通信学术会议论文集	2005	
017	徐剑峰 吴一全	硕士生 副教授	041 041	基于SSDA匹配的车牌字符识别中问题的研究	南京航空航天大学第七届研究生学术会议	2005	
018	王 菁 吴一全	硕士生 副教授	041 041	一种基于改进的Hausdorff距离的字符匹配方法	南京航空航天大学第七届研究生学术会议	2005	
019	黄 骥 吴一全	硕士生 副教授	041 041	车牌识别系统中的车牌定位和倾斜校正方法	南京航空航天大学第七届研究生学术会议	2005	
020	李晓燕 吴一全	硕士生 副教授	041 041	汽车牌照的定位与字符分割方法	南京航空航天大学第七届研究生学术会议	2005	
021	吴文怡 吴一全	硕士生 副教授	041 041	基于矩的抗几何攻击数字图像水印技术	南京航空航天大学第七届研究生学术会议	2005	
022	丁 坚	硕士生	041	基于Hausdorff距离的图像匹配及改进	第二十届南京地区研究生通信年会	2005	
023	郝红杰 吴一全	硕士生 副教授	041 041	基于二维最大类间平均离差的图像分割算法	第二十届南京地区研究生通信年会	2005	
024	王国栋 吴一全	硕士生 副教授	041 041	基于Krawtchouk矩的图像识别	第二十届南京地区研究生通信年会	2005	
025	张建涛 吴一全	硕士生 副教授	041 041	随路信令在中继媒体网关上的实现	第二十届南京地区研究生通信年会	2005	
026	汪 玲 朱岱寅 朱兆达	讲师 副研 教授	041 041 041	Range alignment for ISAR using genetic algorithms	2005IEEE Geoscience and Remote Sensing Symposium	2005. 07.	
027	汪 玲 朱兆达 朱岱寅	讲师 教授 副研	041 041 041	基于机载SAR实测数据的慢速运动目标成像研究	2005中国合成孔径雷达会议论文集	2005	
028	王旭东 刘 渝	助教 教授	041 041	一种新结构FFT算法及其FPGA实现	无线通信技术	2005. 14. 03	
029	王旭东	助教	041	数字正交换的FPGA实现	空间电子技术	2005. 02. 04	
030	夏伟杰 周建江	助教 教授	041 041	基于DSP的AMLCD机载字符图形发生系统硬件设计	扬州大学学报	2005. 08.	
031	李 勇 朱岱寅 朱兆达	讲师 副研 教授	041 041 041	大斜视合成孔径雷达高分辨率子孔径成像算法研究	2005中国合成孔径雷达会议论文集	2005	
032	李 勇 朱岱寅 朱兆达 汪 玲	讲师 副研 教授 讲师	041 041 041 041	Automatic mosaicing for airborne SAR imaging based on subaperture processing	IGARSS' 05 Proceedings	2005. 07.	
033	高宏峰 许宗泽	博士生 教授	041 041	一种适用于ARQ系统的码率兼容IRA码	电子科技大学学报	2005. 34. 04	
034	高宏峰 许宗泽	博士生 教授	041 041	IRA码简化译码算法的研究	电子科技大学学报	2005. 34. 01	
035	高宏峰 许宗泽	博士生 教授	041 041	IRA码在远程光纤通信系统中的应用	激光杂志	2005. 26. 01	

目 录

序号	姓名	职称	单位	论文题目	刊物、会议名称	年、卷、期	类别
036	高宏峰	博士生	041	比特交织IRA码编码调制	电讯技术	2005. 00. 00	
	许宗泽	教授	041				
037	李跃辉	博士生	041	抽运光与信号光之间的相位漂移对PSA动态孤子系统传输性能的影响	南京航空航天大学学报	2005. 37. 01	
	许宗泽	教授	041				
038	居 敏	博士生	041	基于正交映射的OFDM峰均比控制快速算法	南京航空航天大学学报	2005. 37. 01	
	许宗泽	教授	041				
039	刘金龙	博士生	041	Rao-Nam私钥密码体制的修正	电子与信息学报	2005. 27. 08	
	许宗泽	教授	041				
040	芮 华	博士生	041	基于LDPC码的差分空时编码调制的联合优化	南京航空航天大学学报	2005. 37. 04	
	徐大专	教授	041				
041	芮 华	博士生	041	双重迭代置信传播空时编码调制及其在准静态MIMO衰落信道下的性能	南京航空航天大学学报	2005. 37. 01	
	徐大专	教授	041				
042	芮 华	博士生	041	基于OFDM技术的数字AM广播系统时间同步算法研究	应用科学学报	2005. 23. 02	
	徐大专	教授	041				
	朱秋明	助教	041				
043	芮 华	博士生	041	一种新型数字化超声波自动探伤系统的研制	仪器仪表学报	2005. 26. 09	
	徐大专	教授	041				
044	芮 华	博士生	041	一种新的基于多级编码的差分空时调制方案	应用科学学报	2005. 23. 05	
	徐大专	教授	041				
045	芮 华	博士生	041	基于迭代的置信传播编码调制在瑞利衰落信道中的性能	电子与信息学报	2005. 27. 02	
	徐大专	教授	041				
046	秦云川	硕士生	041	测量仪器总线技术的发展与现状	中国仪器仪表	2005. 00. 08	
	徐大专	教授	041				
047	杨 蓓	硕士生	41	一种新的空时2D-RAKE接收机	无线电通信技术	2005. 31. 03	
	徐大专	教授	41				
048	林 凯	硕士生	041	基于GPRS实现的远程数据采集系统	仪器仪表用户	2005. 12. 03	
	宋茂忠	教授	041				
049	仰枫帆	教授	041	Soft-decision decoding of Reed-Muller codes based on simple multi-step SISO module	IEE Proceegings Communications	2005. 152. 02	
050	仰枫帆	教授	041	The Convergence Behavior of Thrbo	IEEE 62nd Vehicular Technology Conference	2005	
	叶 明	副教授	041	Equalization over an ISI Channel			
	陈吉忠	副教授	041	Characterized By a Dynamic Updated BSC	会议		
051	蓝辉霞	硕士生	041	构造消环的低密度校验码	云南民族大学学报(自然科学版)	2005. 14. 01	
	仰枫帆	教授	041				
052	张小飞	讲师	041	多径信道下一种多用户检测和DOA估计联合处理方法	南京航空航天大学学报	2005. 37. 06	
	徐大专	教授	041				
053	张小飞	讲师	041	小波域的自适应波束形成算法	航空学报	2005. 26. 01	
	徐大专	教授	041				
054	张小飞	讲师	041	基于频域LMS的自适应波束形成算法	中国空间科学技术	2005. 00. 02	
	徐大专	教授	041				
055	张小飞	讲师	041	Novel Adaptive Beamforming Algorithm	西南交通大学学报(英文版)	2005. 13. 01	
	徐大专	教授	041	Based on Wavelet Packet Transform			

目 录

序号	姓名	职称	单位	论文题目	刊物、会议名称	年、卷、期	类别
056	张小飞	讲师	041	Novel space-time multiuser detection	系统工程与电子技术	2005. 16. 01	
	徐大专	教授	041	algorithm of WCDMA system	(英文版)		
057	张小飞	讲师	041	Wavelet Analysis Of Signal Through	International	2005	
	徐大专	教授	041	Space-Time Channel	Conference on Wireless Communicat- ions, Networking and Mobile Computing会议		
058	虞湘宾	博士后	041	基于空时编码和优化多带复小波的MC- CDMA系统及性能	通信学报	2005. 26. 04	
059	虞湘宾	博士后	041	低复杂度的满速率和部分分集多天线空时	通信学报	2005. 26. 09	
	徐大专	教授	041	块码及性能			
060	虞湘宾	博士后	041	Performance of STBC-MC-CDMA system based on complex wavelet packet and turbo coding	东南大学学报(英文版)	2005. 21. 04	
061	虞湘宾	博士后	041	Performance analysis of complex	IEEE International	2005	
	徐大专	教授	041	wavelet function based MC-DS-CDMA in Rayleigh fading channel	Conference on Communications, Circuits and Systems 会议		
062	虞湘宾	博士后	041	Performance analysis of Multi-carrier	IEEE International	2005	
	徐大专	教授	041	CDMA system based on complex orthogonal wavelet packet in Nakagami-m fading channel	Symposium on Microwave, Antenna, Propagation and EMC Technologies For Wireless Communicat- ions(MAPE2005)会议		
063	虞湘宾	博士后	041	MQAM Space-time block coding with	IEEE International	2005	
	徐大专	教授	041	differential detection	Symposium on Communications and Information Technologies(ISCIT 2005)会议		
064	王成华	教授	041	依托国家电工电子教学基地 建设“电子 线路”国家精品课程	电气电子教学学报	2005. 27 专辑	
065	陈 斌	硕士生	041	基于DSP和PCI的通用数据采集及处理卡实	计算机应用研究	2005. 22. 01	
	王成华	教授	041	现			
	夏永君	助教	041				
066	胥嘉佳	硕士生	041	智能多相位交通信号机的设计	扬州大学学报(自然科 学版)	2005. 08. 03	
	王成华	教授	041				
067	何 伟	硕士生	041	基于PDA的智能交通系统控制终端设计与	扬州大学学报(自然科 学版)	2005. 08. 03	
	王成华	教授	041	实现			
068	姚 远	硕士生	041	基于LTC1702A的开关模式电源电路设计	计算机科学与实践	2005. 03. 02	
	王成华	教授	041				

目 录

序号	姓名	职称	单位	论文题目	刊物、会议名称	年、卷、期	类别
069	詹振球 苏 抗 王成华	硕士生 硕士生 教授	041 041 041	基于DSP的数字存储示波器显示控制系统的设计	电子技术应用	2005. 00. 06	
070	臧春华	副教授	041	专业基础课双语教学所面临的问题与思考	电气电子教学学报	2005. 27. 05	
071	黄 磊 臧春华	硕士生 副教授	041 041	基于Elan TM SC52的1553智能通信卡	扬州大学学报(自然科学版)	2005. 08. 03	
072	沈昌立 臧春华	硕士生 副教授	041 041	PCI-to-PCI非透明桥的FPGA实现	扬州大学学报(自然科学版)	2005. 08. 03	
073	邵 杰 叶 宁	副教授 讲师	041 外	最优正交信号分解的FPGA实现	数据采集与处理	2005. 20. 03	
074	邵 杰 王成华	副教授 教授	041 041	浅谈高校信息类专业的创新教育和人才培养	电气电子教学学报	2005. 27. 01	
075	伍万棱 邵 杰	本科生 副教授	041 041	FPGA实现的基4FFT处理器高效排序算法研究	南京航空航天大学学报	2005. 37. 02	
076	夏永君 王成华	助教 教授	041 041	便携式数字测试仪器中高速采集系统的设计	扬州大学学报(自然科学版)	2005. 08. 03	
077	吴海峰 顾长青 李 茁	硕士生 教授 助教	041 041 041	带旋转叶片腔体的电磁特性分析	电波科学学报	2005. 20. 06	
078	刘少斌 顾长青 周建江 周永刚	教授 教授 教授 讲师	041 041 041 041	等离子体隐身天线可行性研究	隐身技术	2005. 11. 02	
079	周永刚 徐金平 顾长青 王海婴	讲师 教授 教授 研究员	041 外 041 外	细导线精确算法在改进的简缩时域有限差分法中的应用	微波学报	2005. 21. 05	
080	周永刚 徐金平	讲师 教授	041 外	Analysis of FSS with Symmetrical Periodic Unit by ADI-FDTD Combined with Even-odd Mode Method	2005 Asia-Pacific Conference Proceedings会议	2005	
081	周 平 徐金平	博士生 教授	041 外	求解电磁场有限元-边界元方程组的有效方法	东南大学学报(自然科学版)	2005. 35. 03	
082	周 平 徐金平	博士生 教授	041 外	填充各向异性介质二维开口腔体散射特性分析	南京航空航天大学学报	2005. 37. 06	

文章编号:1004-9037(2005)02-0186-07

时域不完全重叠的多成分信号处理算法

张映南, 刘 渝

(南京航空航天大学信息科学与技术学院, 南京, 210016)

摘要:分析了时域重叠的多信号(LFM和正弦波信号)经过自相关运算以后的包络特征,根据包络的跳变特征进行信号切割,对每段信号分别进行处理,得到它们的起、止时间和所含有的信号参数。通过数据拟合,将分段信号进行整合,最终得到各个信号的完整结果。仿真结果表明该方法在低信噪比条件下具有较好的性能。

关键词:信号分离;相关运算;时域;参数估计;信号拟合

中图分类号:TN911.6

文献标识码:A

Separation Algorithm to Multi-Component Signals Overlapped in Time Domain

ZHANG Ying-nan, LIU Yu

(College of Information Science and Technology,
Nanjing University of Aeronautics & Astronautics, Nanjing, 210016, China)

Abstract: A separation algorithm is used to analyze the envelopment character of LFM signals and sine signals correlated in time domain. According to the leap character of the envelopment, the original mixed signal is separated into several segments and same process is performed on every segment. The beginning and ending moments, and the parameters of different signals on the same signal segment can be obtained. The information of every component in the mixed signal can be totally obtained by fitting the estimation results of different segments. Simulation results confirm its availability under the situation of low signal to noise ratio.

Key words: signal separation; correlation; time domain; parameter estimation; signal fitting

引 言

雷达信号侦察数字接收机通常工作在宽开的频率环境中,有可能同时接收到多部对方雷达的信号。这样,在一段数据中,可能存在几个时域上不完全重叠的脉冲信号。如何将这些信号的起始时刻和终止时刻及参数精确地估计出来,是电子侦察界讨论的一个热门课题。

线性调频(LFM)信号和常规信号是常用的雷达脉冲信号,对于低信噪比下时域完全重叠的多分量LFM信号,文[1~3]提出了使用时频方法估计各分量参数,但是没有讨论时域不完全重叠的情形。文[4]利用信号频谱进行傅立叶变换反推该信号时域波形的理论,提出对频谱分离的LFM信号进行滤波处理,然后对各个信号分别进行处理,但

是不能解决频谱部分混叠或完全混叠的情况。本文根据文[5]讨论了一种基于时域相关的分离算法,能够处理时域不完全重叠以及频谱重叠的混合LFM信号和常规信号。

对于时域非完全重叠的多信号分析是电子侦察中的一个难点,其困难在于接收到的多脉冲信号的宽度、调制方式、调制参数及信号的重叠形式均未知。

实际情况中可能遇到一个几百微秒宽的脉冲压缩信号,其间夹杂着若干短脉冲,这些信号的频谱可能重叠。多信号的组合形式有无穷多种,不能指望采用一种方法能处理所有的组合形式。本文所研究的多成分信号分析局限的范围为:信号的调制方式仅限于LFM和正弦波信号,它们的频谱可能重叠甚至完全一样,但时频分布不重合,各信号在

时域上重叠部分有一定的宽度。本文提出一种时域不完全重叠的多成分信号处理算法。

1 相关算法及分段处理方法

1.1 相关函数

自由空间中接收到的信号含有噪声。为简便起见,本文使用复信号进行分析。设接收到的信号由 $x(i)$ 和 $y(i)$ 构成,信号总长度为 T 个样本点, $x(i)$ 的起始时刻和终止时刻为 1 和 T , $y(i)$ 的起始时刻和终止时刻为 M 和 N 。则接收到的信号 $S(i)$ 为

$$S(i) = x(i) + y(i) + w(i) = A \exp\{j\pi[2f_1 idt + k_1(idt)^2]\} + B \exp\{j\pi[2f_2(i - M + 1)dt + k_2(i - M + 1)^2 dt^2]\} R_{MN}(i) + w(i) \quad 1 \leq i \leq T \quad (1)$$

式中: A, B 分别为 LFM 信号 $x(i), y(i)$ 的幅度; f_1, f_2 为频率; k_1, k_2 为调频系数; 且

$R_{MN}(i) = \begin{cases} 1 & M \leq i \leq N \\ 0 & 1 \leq i \leq M-1, N+1 \leq i \leq T \end{cases}$ 为矩形窗函数; dt 为采样时间间隔; $w(i)$ 为均值为 0、方差为 σ^2 的复高斯白噪声。其归一化的相关函数 $C(i)$ 为

$$C(i) = \frac{1}{L} \sum_{k=0}^{L-1} S^*(i+k) S(i+k+1) \quad (2)$$

将式(1)代入式(2),经过整理得到

$$C(i) = \begin{cases} nor_1(i) + w(i)' & 1 \leq i < M-L \\ nor_1(i) + [i - (M-L-1)/(L+1)] [nor_2 + lfm_1(i) + lfm_2(i)] + w(i)' & M-L \leq i < M \\ nor_1(i) + nor_2(i) + lfm_1(i) + lfm_2(i) + w(i)' & M \leq i \leq N-L \\ nor_1(i) + (N-i)/(L+1) [nor_2 + lfm_1(i) + lfm_2(i)] + w(i)' & N-L < i < N \\ nor_1(i) + w(i)' & N \leq i < T-L \end{cases} \quad (3)$$

式中, $w(i)'$ 为噪声 $w(i)$ 自相关及与信号互相关后的结果,依然为噪声。

$$nor_1(i) = |X| \exp\{j[\Phi - 2\pi(k_1 dt) idt]\} \approx \text{const}_1 \quad (4)$$

$$nor_2(i) = |Y| \exp\{j[\Psi - 2\pi(k_2 dt) idt]\} \approx \text{const}_2 \quad (5)$$

式中: $|X|$ 和 Φ 分别为式(6)的模值和相角; $|Y|$ 和 Ψ 分别为式(7)的模值和相角,均为常量。

$$A^2 \exp[-j\pi(2f_1 dt + k_1 dt^2)] \times \sum_{k=1}^L \exp(-j2\pi k_1 dt^2 k) / L \quad (6)$$

$$B^2 \exp[-j\pi(2f_2 dt + 2Mk_2 dt^2)] \times \sum_{k=1}^L \exp(-j2\pi k_1 dt^2 k) / L \quad (7)$$

由式(4,5)可知, $nor_1(i)$ 和 $nor_2(i)$ 均为正弦波信号,它们分别为 $x(i)$ 和 $y(i)$ 的自相关结果。由于 $k_1 dt \ll f_s, k_2 dt \ll f_s$ (f_s 为采样频率),所以 $nor_1(i)$ 和 $nor_2(i)$ 变化非常缓慢,近似为直流信号。式(8,9)是 $x(i)$ 和 $y(i)$ 的互相关交错项,它们是快变交流信号。

$$lfm_1(i) = AB \exp\{j\pi[2(f_1 - f_2 - k_2 dt) idt + (k_1 - k_2) i^2 dt^2]\} / L \quad (8)$$

$$lfm_2(i) = AB \exp\{j\pi[2(f_2 - f_1 - k_1 dt) idt + (k_2 - k_1) i^2 dt^2]\} / L \quad (9)$$

所以,时域不完全重叠的多成分信号经过相关运算以后,单信号部分近似为常量,而多信号部分会明显凸现出来,但是凸现部分叠加了快变交流信号。

假设原始数据段中仅有两个 LFM 信号(总长度 10 000,信号 1 的起止时间为 1 000~9 000,信号 2 的起止时间为 3 000~6 000,无噪声)。信号经过相关以后的实部如图 1 所示,其中 A 为相关实部的幅度, N 为时间采样点。

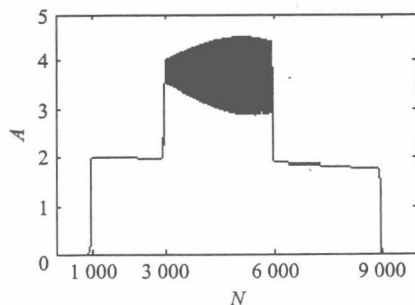


图1 相关结果的实部

可以看出,信号 1 的自相关项(1 000~3 000 和 6 000~9 000)近似为常量,而重叠部分(3 000~6 000)由于互相关交错项的存在成为高频振荡叠加常量。相关函数的跳变点反映了信号的前、后沿信息,对相关结果的实部进行适当平滑以后可以用差分方法进行分段。根据差分结果将整个数据段粗略地分为 3 段,然后对每段数据分别进行个数估计和参数估计。

1.2 交错项平滑

信号自相关项(式(4,5))近似为常量,与单信号相比,在信号重叠的地方,相关结果就会凸现出

来。信号之间的互相关交错项是交流信号,它叠加在近似为直流的自相关项上。要抑制交流项,可采用式(10)进行平滑

$$C(i)' = \frac{1}{K} \sum_{j=i}^{K+i-1} C(j) \quad (10)$$

其中 K 为平滑点数, $C(j)$ 为相关结果的实部。图 1 的平滑结果如图 2 所示(K 取 200), 其中 A 为相关实部平滑后的幅度, N 为时间采样点。

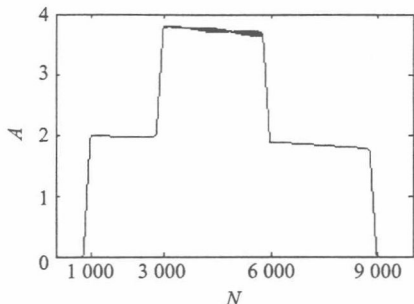


图 2 相关实部平滑结果

如果 K 取值较大, 相关结果平滑后过渡带被展宽, 多信号重叠部分将难以凸现出来, 如果较小, 则不能有效地消除相关交错项对自项的影响, 导致错误地分段。所以 K 的取值应该折衷考虑。

1.3 相关结果分段方法

相关结果实部平滑以后, 多信号重叠部分的交错项得到有效抑制。此时如果直接定义门限对该结果进行分段, 则会存在问题。因为实际接收到的一段数据中信号个数可能大于 2, 如图 3 所示, 其中 A 为相关实部平滑后的幅度, N 为时间采样点。

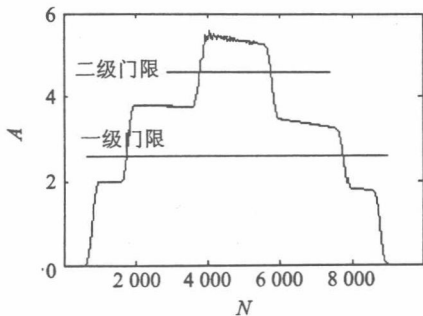


图 3 3 个信号相关实部平滑结果

图 3 为 3 个 LFM 信号相关后实部平滑结果(总长度 10 000, 信号 1 的起止时间为 1 000~9 000, 信号 2 的起止时间为 2 000~6 000, 信号 3 的起止时间为 4 000~8 000)。要实现对各信号起始点和终止点的粗略估计, 则需要定义两个门限(如图 3 中的一级门限和二级门限), 当信号个数更多时, 需要定

义更多级门限, 同时各级门限与各个信号的信噪比有关。由于对信号个数和各信号信噪比没有任何先验知识, 所以各级门限将难以确定。因此对相关结果实部平滑以后根据式(11)采用差分的方法找出跳变点, 实现正确分段。

$$sub(i) = C(i + Len)' - C(i)' \quad (11)$$

式中: $sub(i)$ 为差分值; $C(i)'$ 为相关后实部平滑结果; Len 为差分间隔长度。根据式(3), 由于过渡带长度为 L , 所以 Len 取相关长度 L 最合适, 差分值在各信号分量的起始点和终止点处才会出现尖峰。图 4 为图 3 进行差分以后的绝对值, 其中 A 为相关实部平滑后差分的绝对值, N 为时间采样点。可以看出, 在各个信号的起始点和终止点附近(1 000, 2 000, 4 000, 6 000, 8 000)出现了明显的峰值, 根据峰值位置将信号分为 5 段, 进行后续处理。

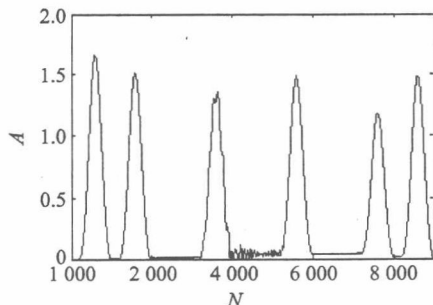


图 4 平滑结果差分的绝对值

1.4 相关长度 L 的选取

由式(8,9)可知, 互相关交错项的幅度与相关长度 L 成反比, 而自相关结果(式(4,5))与 L 无关。所以适当选取较大的 L , 将减小交错项对自项的影响。由于 L 同时为过渡带的宽度, 所以当 L 取的过大时, 过渡带会被加宽, 这会导致差分以后的尖峰被展宽, 当信号较短时, 其起始点和终止点的尖峰会相互重叠, 从而导致不能准确寻找尖峰位置, 所以 L 的选取应该折衷考虑。对图 3 所对应的原始信号取 $L=10$ 进行相关运算, 结果如图 5 所示, 其中 A, N 定义同图 1。可以看出, 互相关交错项的幅度很大, 对自相关结果常量干扰也很大, 严重影响了差分结果(见图 6, 其中 A, N 的定义同图 4), 导致不能准确地对原始信号进行分段。

如果取 $L=800$ 进行相关运算, 实部平滑差分后如图 7 所示, 其中 A, N 的定义同图 4。对照图 4 可以看出, 信号分量的起始点和终止点峰值混叠, 在有噪声干扰的情况下, 峰值位置将更加难以判断, 从而导致错误分段。

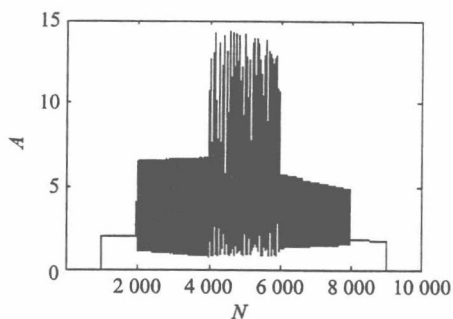


图5 相关点数为10

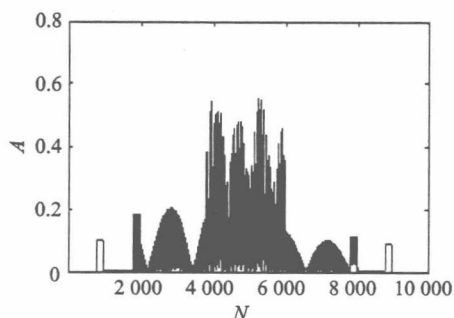


图6 10点相关差分结果

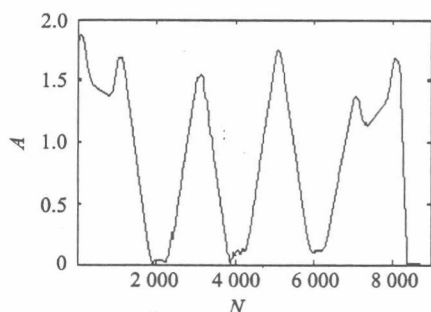


图7 800点相关差分结果

1.5 段内参数估计

原始信号经过分段以后,每一段都是基本完全重叠的多信号或仅有单一信号。对于时域完全重叠的混合信号可以采用文[1]提出的对信号模糊函数进行Radon变换进行处理。该算法的优点是在信噪比较低的情况下依然有效,但计算量过大。也可以采用文[3]提出的Wigner-Hough变换法,该算法局限性在于在没有任何先验知识的情况下,无法确定变换的频率和调频系数步长。

1.5.1 多分量正弦波信号估计

本文采用文[6]所提出的快速频率估计算法进行正弦波频率估计。由于正弦波信号功率集中在单个点频上,所以当数据段中多个正弦波信号互相之间的频差大于两个量化频率单位时,可以较精确地估计各个分量频率。对信号频谱在这些正弦波点频

上置零,再做IFFT变换,则可实现对正弦波信号的滤除。如果正弦波频率被包含在LFM信号频率范围之内,因为LFM信号频谱有一定宽度,所以仅在一点置零对LFM信号造成的失真不大,并不影响后续的LFM信号参数估计。

1.5.2 多分量线性调频信号参数估计

在滤除了原始数据段中的正弦波信号以后,数据段 $s(i)$ 中仅留有LFM信号。文[7]对单LFM信号采用延迟相关方法进行参数估计。在多LFM信号条件下,当各LFM分量的调频系数有一定差距时,该方法依然适用。

在多信号情况下,假设数据段中包含两个LFM信号,分别为 $x(i)$ 和 $y(i)$ (不带噪声情况)。其表达式为

$$x(i) = A \exp[j(2\pi f_1 i dt + \pi k_1 i^2 dt^2 + \phi_1)] \quad 1 \leq i \leq N \quad (12)$$

$$y(i) = B \exp[j(2\pi f_2 i dt + \pi k_2 i^2 dt^2 + \phi_2)] \quad 1 \leq i \leq N \quad (13)$$

式中: A, B 分别为 $x(i), y(i)$ 的幅度; f_1, f_2 为起始频率; k_1, k_2 为调频系数; ϕ_1, ϕ_2 为初相; dt 为采样间隔; N 为数据段长度。根据文[7]对 $x(i)$ 和 $y(i)$ 的混合信号进行延迟相关,结果为

$$\begin{aligned} z(i) = [x^*(i) + y^*(i)][x(i + \tau) + y(i + \tau)] = & A^2 \exp[j2\pi(k_1 \tau dt) i dt + \phi_1] + \\ & B^2 \exp[j2\pi(k_2 \tau dt) i dt + \phi_2] + \\ & AB \exp[j2\pi(f_2 - f_1) i dt + \\ & \pi(k_2 - k_1) i^2 dt^2 + \phi_3] + \\ & AB \exp[j2\pi(f_1 - f_2) i dt + \\ & \pi(k_1 - k_2) i^2 dt^2 + \phi_4] \end{aligned} \quad (14)$$

式中: τ 为相关长度,取 $0.4N$; $\phi_1, \phi_2, \phi_3, \phi_4$ 为相位。从式(14)可以看出, $x(i)$ 和 $y(i)$ 经过延迟相关以后结果包括四项,其中第一、二项为信号的自相关项,均为正弦波信号,第三、四项为信号的交错相关项,是互为共轭的LFM信号。由于LFM信号频谱有一定带宽,而正弦波信号频谱集中在一个点频上,所以,当 k_1 和 k_2 有一定差距的时候,可以采用文[6]方法估计出相关结果中两个正弦波信号的频率参数,进而分别估计出 $x(i)$ 和 $y(i)$ 的调频系数。

设估计所得调频系数分别为 $\hat{k}_1$ 和 $\hat{k}_2$,对数据段 $s(i)$ 进行下列运算

$$s(i)' = s(i) \exp(-j\pi \hat{k}_1 i^2 dt^2) \quad (15)$$

当 $\hat{k}_1$ 与真实值 k_1 相差不大时, $s(i)'$ 是频率为 f_1 的正弦波信号和一个新的LFM信号(起始频率和调频系数分别为 f_2 和 $k_2 - \hat{k}_1$)的混合信号。该正弦波

频率估计值为 $\hat{f}_1$, 它就是调频系数为 $\hat{k}_1$ 所对应的 LFM 信号 $x(i)$ 的起始频率。通过同样方法可以获得 $y(i)$ 的起始频率。利用估计所得的各信号起始频率和调频系数, 结合数据段长度, 可以算出各信号的终止频率。

1.6 各段处理流程

将原始数据分段以后, 对每段进行图 8 流程操作。

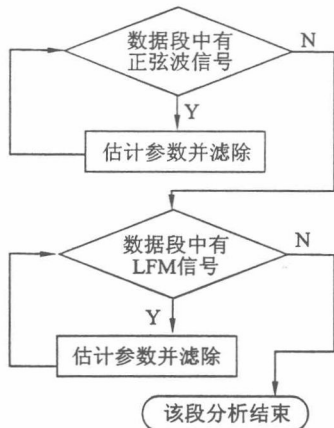


图 8 段内估计流程

1.7 各段参数拟合

对每段估计所得到的参数值进行对照, 对于常规信号来说, 如果在两个或更多个连续数据段中出现了某个相近的频率 f , 则可以认为它们是同一个信号, 其起始点为这些相邻数据段第一段的起点, 终止点为最后一段的终点, 就实现了对信号的拟合。图 9 中, 段 1~段 5 估计所得的结果中都包含了一个 50 MHz 左右的正弦波。可以认为存在一个 50 MHz 左右的正弦波信号, 其起始点为段 1 的起点, 终止点为段 5 的终点。

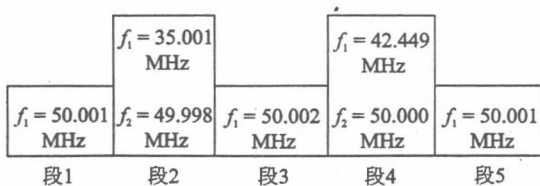


图 9 某数据段分块后各块参数估计结果

对于 LFM 信号, 如果在两个或更多个连续数据段中出现了某个相近的线性调频系数 K , 并且前一个数据段估计所得到的终止频率与后一个数据段的起始频率相近, 则认为它们属于同一个 LFM 信号, 其起始频率为第一个数据段估计所得的起始频率。

1.8 各分量起始点和终止点精确估计

在对精度要求较高的条件下, 需要精确估计各个分量的起始点和终止点。对于常规信号来说, 假设估计所得的某一信号频率为 f_0 , 进行下列运算

$$A(i) = \text{real} \left[\sum_{k=1}^i S(k) \times \exp(-j2\pi f_0 k \Delta t) \right] \quad (16)$$

式中 $\text{real}[\cdot]$ 表示取实部。由于累加对加性噪声和其他频率成分信号能够实现对消, 所以 $A(i)$ 能够准确地反映出信号的起始点和终止点, 如图 10 所示, 其中 A, N 分别为式 (16) 中 $A(i)$ 的幅度和时间采样点。

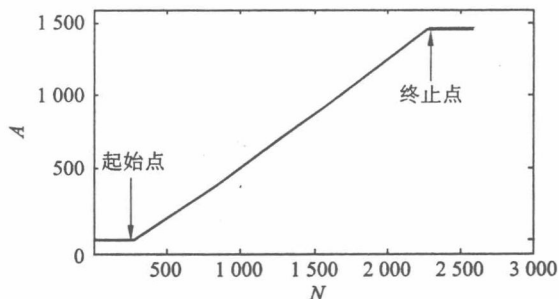


图 10 一个完整信号分量的 $A(i)$

采用同样方法可实现对 LFM 信号实现精确的起始时刻和终止时刻估计。实际应用中, 应该对拟合所得到的数据段向起始方向和终止方向适当放宽, 以保证信号分量的前、后沿都在段内。

2 算法流程及运算量分析

整个过程的算法流程如下:

- (1) 对复信号进行相关运算;
- (2) 对相关结果实部进行平滑, 记为 $C(i)'$;
- (3) 对 $C(i)'$ 进行差分并寻找出各个尖峰位置, 实现对原始数据的分段;
- (4) 对各段利用估计-滤除-再估计-再滤除的循环进行各信号参数估计;
- (5) 根据各段估计所得频率进行各分量参数拟合;
- (6) 根据拟合结果, 对各信号分量进行精确的起始点和终止点估计。

本文所讨论的方法由三部分组成。设信号长度为 N , 相关运算需 N 次复数乘和 $2N$ 次复数加^[5], 常规信号参数估计需 2 次 FFT 运算^[6], LFM 参数估计需要 2 次 FFT 和两次延时相关运算^[7]。如果采用 Radon 变换方法^[1], 仅计算模糊函数便需要 N 次 FFT 运算, 如果采用 Wigner-Hough 变换^[3], 需要

N^2 次FFT 运算。所以本文提出的方法有较大的工程应用价值。

3 仿真结果

3.1 仿真1

仿真对象为3个淹没在高斯复圆白噪声中的常规信号。采样频率为500 MHz,数据段长度为10 000点。各信号分量起始点、终止点、频率和信噪比(定义为 $10\log A^2/2\sigma^2$, A 为信号的幅度, σ^2 为复高斯白噪声的方差)如表1所示。

表1 仿真信号参数

信号	起始点	终止点	频率/MHz	SNR/dB
1	1 000	9 000	26	0
2	2 000	6 000	35	3
3	4 000	8 000	40	3

进行分段及参数拟合以后,各信号起始点和终止点粗略估计值如表2所示。

表2 各信号参数粗略估计值

信号	起始点	终止点	频率/MHz
1	690	9 107	26.013
2	1 709	6 091	34.998
3	3 706	8 098	40.001

对每段进行滤波后,进行精确起始点和终止点估计,估计值如表3所示。

表3 各信号参数精确估计值

信号	起始点	终止点	频率/MHz
1	994	8 990	26.000
2	1 998	6 003	35.000
3	4 003	8 008	40.001

对照表3与表1可以看出,各信号的最终估计参数比较理想。

3.2 仿真2

仿真前提条件为一个LFM信号与两个常规信号在时域叠加,其余条件同仿真1。各信号参数如表4所示。信号1频率范围为16~48 MHz,信号2为常规信号,频率为33 MHz,可见在频谱上,信号2与信号1完全重叠。精确估计值如表5所示。

表4 仿真信号参数

信号	起始点	终止点	起始频率 /MHz	调频系数 /(10 ¹² Hz·s ⁻¹)	SNR /dB
1	1 000	9 000	16	2	0
2	2 000	4 000	33	0	3
3	6 000	8000	50	0	3

表5 各信号参数精确估计值

信号	起始点	终止点	起始频率 /MHz	调频系数 /(10 ¹² Hz·s ⁻¹)
1	991	8 994	15.989	1.988 8
2	1 997	3 991	32.992	0
3	5 995	7 994	49.999	0

3.3 仿真3

仿真前提条件为三个时域叠加的LFM信号,其余条件同仿真1。各信号参数如表6所示。信号1频率范围为1~81 MHz;信号2为33~41 MHz;信号3为20~32 MHz。可见,三个信号频谱部分重叠。精确估计值如表7所示,表明本文提出的方法能够处理多LFM信号频谱混叠的情况。

表6 仿真信号参数

信号	起始点	终止点	起始频率 /MHz	调频系数 /(10 ¹² Hz·s ⁻¹)	SNR /dB
1	1 000	9 000	1	5	0
2	2 000	4 000	33	2	3
3	6 000	8 000	20	3	3

表7 各信号参数精确估计值

信号	起始点	终止点	起始频率 /MHz	调频系数 /(10 ¹² Hz·s ⁻¹)
1	997	8 989	0.971 8	5.002 0
2	1 993	3 993	32.977	1.996 0
3	5 998	7 995	19.981 0	3.001 0

4 结束语

本文提出的基于时域相关的多信号分离算法,把信号的重叠部分在时域上分割成若干段,使每一段都是基本完全重合的多信号或仅有单一信号。然

后对各段信号进行处理,得到它们的调制方式和调制参数。由于有些信号可能被分割成若干段,因此还需判别它们是否来自同一信号,通过参数拟合将它们整合为一个信号。本算法能对时域不完全重叠、频域部分重叠的混合 LFM 信号与正弦波信号实现有效处理。

参考文献:

- [1] Wang Minsheng, Chan A K, Chui C C. Linear frequency-modulated signal detection using radon-ambiguity transform[J]. IEEE Trans on SP, 1998, 46(30):571~586.
- [2] 李英祥,肖先赐. 一种新的多线性调频信号时频表示[J]. 电子学报, 2002, 30(12):1879~1881.
- [3] Barbarossa S. Analysis of multicomponent LFM signals by a combined Wigner-Hough transform[J]. IEEE Trans on SP, 1995, 43(6):1511~1515.
- [4] 黄建冲,姜秋喜,祁建清. 数字接收机对同时到达信号的软件分离技术[J]. 航天电子对抗, 2001, 3(4):42~44.
- [5] 席铁敏,刘 渝,靖 晟. 电子侦察信号实时检测算法及性能分析[J]. 南京航空航天大学学报, 2001, 33(3):277~281.
- [6] 刘 渝. 快速高精度正弦波频率估计综合算法[J]. 电子学报, 1999, 27(6):126~128.
- [7] 刘 渝. 快速解线性调频技术[J]. 数据采集与处理, 1999, 14(2):175~178.

作者简介:张映南(1980-),男,硕士研究生,研究方向:信号与信息处理, E-mail: gterman@hotmail.com; 刘 渝(1945-),男,教授,博士生导师,研究方向:信号检测、估计、阵列信号处理。

文章编号:1004-9037(2005)03-0272-05

调频连续波雷达信号调制方式识别算法研究

钱云襄, 刘 渝

(南京航空航天大学信息科学与技术学院, 南京, 210016)

摘要:提出了一种识别调频连续波雷达信号调制方式的算法。采用短时傅里叶变换得到信号的时频变化曲线, 将信号调制方式的识别问题转化为周期性曲线类型的识别。对周期性曲线的频谱进行特征分析, 根据谐波成分的差异, 实现曲线类型的正确识别, 进而得到信号的调制方式。仿真结果表明, 该算法能够正确识别常用的调频连续波雷达信号的调制方式, 而且在信噪比为 -10 dB时仍然具有很好的性能。

关键词:模式识别; 调频连续波; 短时傅里叶变换; 谐波分析

中图分类号: TN911.7

文献标识码: A

Algorithm for Identifying Modulated Modes of FMCW Radar Signals

QIAN Yun-xiang, LIU Yu

(College of Information Science and Technology,

Nanjing University of Aeronautics & Astronautics, Nanjing, 210016, China)

Abstract: The algorithm for identifying modulated modes of frequency modulation continuous wave (FMCW) radar signals is presented. The time-frequency curve can be obtained by the short-time Fourier transform. The problem on identification of modulated modes is converted into the identification of the type of the periodic curve. Through characteristic analysis, the characteristic of the frequency spectrum of the periodic curve can be obtained. According to the difference between their harmonic components, the type of the periodic curve can be identified. Then the modulated mode of the signal can be confirmed. Simulation results prove that the method can identify the modulated modes of FMCW radar signals. And the algorithm has a good performance when the signal-noise ratio of the input signal is -10 dB.

Key words: pattern recognition; FMCW; short-time Fourier transform; harmonic analysis

引 言

在近程雷达系统或二次雷达中, 连续波雷达与脉冲雷达相比具有独特的优点。连续波雷达体积小、重量轻、结构简单, 在同样的距离条件下, 连续波雷达由于发射功率低, 具有较低的被截获概率。特别是在实现测速时, 连续波雷达显得更为优越。

从电子侦察和电子对抗的角度来看, 截获敌方的连续波雷达信号并进行分析, 提取出有用信息, 是非常有意义的工作。连续波雷达的发射信号有许多种^[1,2], 包括单频连续波信号、调频等幅连续波信号和伪随机二相码连续波信号等。本文主要讨论等幅调频连续波信号频率调制方式的识别问题, 首先

利用短时傅里叶变换得到信号的时频变化曲线, 然后根据周期性曲线的谐波特点, 区分并识别时频曲线的种类, 进而得到信号的频率调制方式。计算机仿真结果表明, 本文采用的方法性能稳定可靠, 在工程上具有应用价值。

1 常用的等幅调频连续波雷达信号

常用的等幅调频连续波雷达信号的调制方式有锯齿波调制、三角波调制、正弦调制和平方律调制^[2], 根据这4种调制方式产生的连续波信号的时频变化规律如图1~4所示。设这4种连续波信号的调制周期为 T , 最低频率为 f_0 , 带宽为 B 。

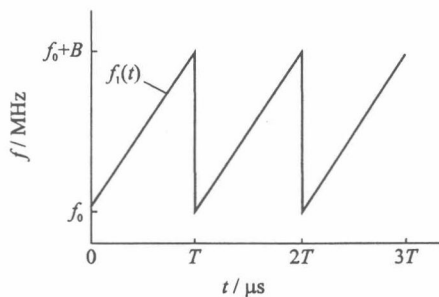


图1 锯齿波调频连续波时频变化曲线

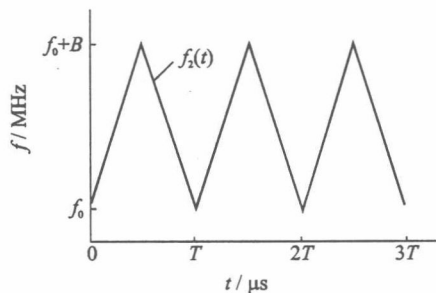


图2 三角波调频连续波时频变化曲线

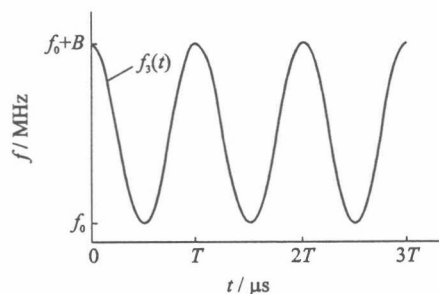


图3 正弦调频连续波时频变化曲线

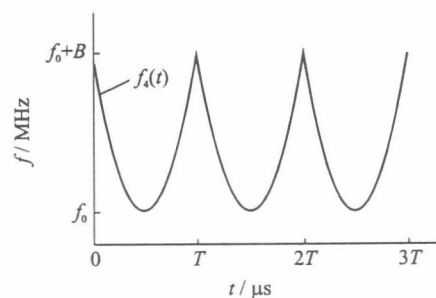


图4 平方律调频连续波时频变化曲线

1.1 锯齿波调频连续波

如图1所示,该信号的表达式为

$$S_1(t) = U_1(t) \exp(j2\pi f_0 t) \quad 0 \leq t \leq T \quad (1)$$

复包络为

$$U_1(t) = u_0 \exp\left(j2\pi \frac{B}{2T} t^2\right) \quad 0 \leq t \leq T \quad (2)$$

信号的相位为

$$\theta_1(t) = 2\pi \left(f_0 t + \frac{B}{2T} t^2 \right) \quad 0 \leq t \leq T \quad (3)$$

信号的瞬时频率为

$$f_1(t) = f_0 + \frac{B}{T} t \quad 0 \leq t \leq T \quad (4)$$

1.2 三角波调频连续波

如图2所示,该信号的表达式为

$$S_2(t) = U_2(t) \exp(j2\pi f_0 t) \quad 0 \leq t \leq T \quad (5)$$

复包络为

$$U_2(t) = \begin{cases} u_0 \exp\left(j2\pi \frac{B}{T} t^2\right) & 0 \leq t < \frac{T}{2} \\ u_0 \exp\left[j2\pi \left(-\frac{B}{T} t^2 + 2Bt\right)\right] & \frac{T}{2} \leq t \leq T \end{cases} \quad (6)$$

信号的相位为

$$\theta_2(t) = \begin{cases} 2\pi \left(f_0 t + \frac{B}{T} t^2 \right) & 0 \leq t < \frac{T}{2} \\ 2\pi \left(f_0 t - \frac{B}{T} t^2 + 2Bt \right) & \frac{T}{2} \leq t \leq T \end{cases} \quad (7)$$

信号的瞬时频率为

$$f_2(t) = \begin{cases} f_0 + \frac{2B}{T} t & 0 \leq t < \frac{T}{2} \\ f_0 - \frac{2B}{T} t + 2B & \frac{T}{2} \leq t \leq T \end{cases} \quad (8)$$

1.3 正弦调频连续波

如图3所示,该信号的表达式为

$$S_3(t) = U_3(t) \exp\left[j2\pi \left(f_0 + \frac{B}{2} \right) t\right] \quad 0 \leq t \leq T \quad (9)$$

复包络为

$$U_3(t) = u_0 \exp\left(j2\pi \frac{B}{2\Omega} \sin\Omega t\right) \quad 0 \leq t \leq T \quad (10)$$

式中 $\Omega = \frac{2\pi}{T}$ 。

信号的相位为

$$\theta_3(t) = 2\pi \left[\left(f_0 + \frac{B}{2} \right) t + \frac{B}{2\Omega} \sin\Omega t \right] \quad 0 \leq t \leq T \quad (11)$$

信号的瞬时频率为

$$f_3(t) = f_0 + \frac{B}{2} + \frac{B}{2} \cos\Omega t \quad 0 \leq t \leq T \quad (12)$$

1.4 平方律调频连续波

如图4所示,该信号的表达式为

$$S_4(t) = U_4(t) \exp(j2\pi f_0 t) \quad 0 \leq t \leq T \quad (13)$$

复包络为

$$U_A(t) = u_0 \exp \left[j 2 \pi a \left(\frac{t^3}{3} - \frac{T}{2} t^2 + \frac{T^2}{4} t \right) \right] \quad 0 \leq t \leq T \quad (14)$$

式中 a 为调制系数。

信号的相位为

$$\theta_A(t) = 2\pi \left[f_0 t + a \left(\frac{t^3}{3} - \frac{T}{2} t^2 + \frac{T^2}{4} t \right) \right] \quad 0 \leq t \leq T \quad (15)$$

信号的瞬时频率为

$$f_A(t) = f_0 + a \left(t - \frac{T}{2} \right)^2 \quad 0 \leq t \leq T \quad (16)$$

2 应用短时傅里叶变换得到时频变化曲线

短时傅里叶变换(STFT)的定义^[3]为

$$\text{STFT}_Z(t, f) = \int_{-\infty}^{\infty} [z(t') \gamma^*(t' - t)] e^{-j 2 \pi f t'} dt' \quad (17)$$

式中: $z(t)$ 为信号; $\gamma(t)$ 为窗函数; $*$ 代表复共轭。

观察式(17), 对于局部时间 t , $\text{STFT}_Z(t, f)$ 可以视为该时刻的“局部频谱”。频谱中幅度最大的谱线所对应的频率 f 即为局部时间 t 对应的局部频率。随着窗在时间轴上的移位, 可以得到各个局部时间的局部频率, 这样就得到了一条频率随时间变化的曲线, 即信号的时频变化曲线。

窗函数 $\gamma(t)$ 的类型和宽度的选择对时频变化曲线的质量有很大的影响, 而时频变化曲线的质量直接关系到曲线被正确识别的概率, 因此选择窗函数要十分慎重。通常可供选择的窗有矩形窗、汉宁窗和海明窗等。窗函数 $\gamma(t)$ 的宽度(简称窗宽)对时频变化曲线的时间分辨率和频率分辨率有直接的影响: (1) 欲提高时频变化曲线的时间分辨率, 就需要窗 $\gamma(t)$ 尽可能短; (2) 要比较准确地求出局部频率 f , 就要求“局部频谱”具有较高的频率分辨率, 即窗 $\gamma(t)$ 要有一定的长度。显然, 时间分辨率和频率分辨率是相互矛盾的, 单纯地追求时间分辨率或者频率分辨率都会造成时频变化曲线质量的下降。因此, 要选择能够同时兼顾时间分辨率和频率分辨率的窗宽。

在进行短时傅里叶变换时, 窗宽为 L 的窗沿着时间轴滑动。假设窗每滑动一次, 就在时间轴上平移了时间 T_0 , 如果 $L > T_0$, 那么相邻的两个窗就会有一部分重叠在一起。使相邻的窗在时域上重叠可以提高时频变化曲线的时间分辨率, 而且对频率分

辨率没有影响, 因此可以用来缓解时间分辨率和频率分辨率之间的矛盾, 达到提高时频变化曲线质量的目的。

3 调频连续波雷达信号调制方式的识别

利用短时傅里叶变换可以得到常用的 4 种调频连续波雷达信号的时频变化曲线(见图 1~4)。仔细观察图中的 4 条时频变化曲线, 可以发现这 4 条曲线都带有周期性, 而且每条曲线都有区别于其他曲线的特征。因此只要能够成功识别信号时频变化曲线的种类, 就能判别信号是采用哪一种频率调制方式。

对于任意一个周期为 T 的周期信号 $f(t)$, 都可以在区间 $[t_1, t_1 + T]$ 内表示为^[4]

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n \Omega t + b_n \sin n \Omega t) \quad (18)$$

式中: $\frac{a_0}{2}$, a_n 和 b_n 均为傅里叶展开系数, $\Omega = 2\pi/T$ 为基波频率。

图 1~4 中的 4 条时频变化曲线在区间 $[0, T]$ 内可以表示为

$$f_1(t) = \left(f_0 + \frac{B}{2} \right) - \frac{B}{\pi} \left[\sin \Omega t + \frac{1}{2} \sin 2 \Omega t + \frac{1}{3} \sin 3 \Omega t + \dots + \frac{1}{n} \sin n \Omega t + \dots \right] \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (19)$$

$$f_2(t) = \left(f_0 + \frac{B}{2} \right) - \frac{4B}{\pi^2} \left(\cos \Omega t + \frac{1}{3^2} \cos 3 \Omega t + \frac{1}{5^2} \cos 5 \Omega t + \dots + \frac{1}{n^2} \cos n \Omega t + \dots \right) \quad n = 1, 3, 5, \dots \quad (20)$$

$$f_3(t) = \left(f_0 + \frac{B}{2} \right) + \frac{B}{2} \cos \Omega t \quad (21)$$

$$f_4(t) = \left(f_0 + \frac{B}{3} \right) + \frac{4B}{\pi^2} \left[\cos \Omega t + \frac{1}{2^2} \cos 2 \Omega t + \frac{1}{3^2} \cos 3 \Omega t + \dots + \frac{1}{n^2} \cos n \Omega t + \dots \right] \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (22)$$

$f_1(t) \sim f_4(t)$ 的频谱函数为

$$F_1(\omega) = 2\pi \left(f_0 + \frac{B}{2} \right) \delta(\omega) - jB \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} [\delta(\omega - n\Omega) - \delta(\omega + n\Omega)] \quad (23)$$

$$F_2(\omega) = 2\pi \left(f_0 + \frac{B}{2} \right) \delta(\omega) - \frac{4B}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} * \{ \delta[\omega - (2n-1)\Omega] + \delta[\omega + (2n-1)\Omega] \} \quad (24)$$