江苏省高等学校重点教材
普通高等教育“十二五”规划教材

高等数学

下册 第2版

主　编　刘金林　　　副主编　蒋国强

$$\iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\oint_L P\,\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y$$

$$\iiint_\Omega \left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)\mathrm{d}v=\oiint_\Sigma P\,\mathrm{d}y\mathrm{d}z+Q\mathrm{d}z\mathrm{d}x+R\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

机械工业出版社
CHINA MACHINE PRESS

江苏省高等学校重点教材
普通高等教育“十二五”规划教材

高等数学

下册

第2版

主　编　刘金林
副主编　蒋国强
参　编　张兴龙　汤进龙　孟国明　俞　皓

江苏省高等学校重点教材编号:2013-1-053

机械工业出版社

本书以高等教育本科高等数学课程教学基本要求为标准，以提高学生的数学素质与创新能力为目的，充分吸收编者们多年来教学实践经验与教学改革成果编写而成.

本书分上、下两册. 本书为下册，内容包括向量代数与空间解析几何、多元函数微分法及其应用、重积分、曲线积分与曲面积分、微分方程. 各章节后配有习题、总习题，书末附有部分习题参考答案与提示.

本书叙述详略得当，通俗易懂，例题典型，习题丰富，可作为高等本科院校理工类各专业的教材，也可作为其他有关专业的教材或教学参考书.

图书在版编目(CIP)数据

高等数学. 下册/刘金林主编. —2版. —北京:机械工业出版社，2014.8 (2014.9重印)

普通高等教育"十二五"规划教材 江苏省高等学校重点教材

ISBN 978-7-111-47367-1

Ⅰ. ①高… Ⅱ. ①刘… Ⅲ. ①高等数学—高等学校—教材 Ⅳ. ①O13

中国版本图书馆CIP数据核字(2014)第155156号

机械工业出版社(北京市百万庄大街22号 邮政编码100037)

策划编辑:韩效杰 责任编辑:韩效杰 李 乐

责任校对:刘怡丹 封面设计:路恩中

责任印制:乔 宇

保定市中画美凯印刷有限公司印刷

2014年9月第2版第2次印刷

184mm×240mm · 20.75印张 · 347千字

标准书号:ISBN 978-7-111-47367-1

定价:42.00元

凡购本书，如有缺页、倒页、脱页，由本社发行部调换

电话服务	网络服务
社服务中心:(010)88361066	教材网:http://www.cmpedu.com
销售一部:(010)68326294	机工官网:http://www.cmpbook.com
销售二部:(010)88379649	机工官博:http://weibo.com/cmp1952
读者购书热线:(010)88379203	封面无防伪标均为盗版

第 2 版前言

本书自 2009 年出版发行以来，由于选材合理、表述流畅、可读性强、便教利学等特点，受到了使用高校师生的欢迎，得到了广大读者的肯定，被评为江苏省高等学校重点教材.

经过几年的教学实践和教学改革认识，并根据专家与同行的宝贵建议，我们在进一步对国内外优秀的同类教材进行比较研究的基础上，保持第 1 版的优点与特色，对教材作了修订. 本次修订主要围绕下面几个方面：

内容的增补与结构的调整. 为了充分适应高等教育的新形势，满足各个不同层次对高等数学课程的要求，我们对教学内容进行了全面梳理，对部分知识也作了取舍归并，使得全书内容更充实、结构更优化. 教材深广度的高限基本达到全国硕士研究生入学考试高等数学考试大纲要求，低限完全符合国家教学指导委员会“工科类本科数学基础课程教学基本要求”.

教材的优化完善. 对教材初版中的错误、疏漏和不妥之处进行了认真仔细的改正. 在概念引入、理论分析、方法叙述上也作了一定的修改，实现深入浅出，条理清楚. 补充调整了部分例题和习题，使它们更具有典型意义、更富启发性，便于读者理解和掌握.

注意多侧面地展现数学文化. 本次修订中，增加了 12 篇阅读材料，它们集知识性、趣味性于一体，以简短扼要的文字，介绍著名数学家的生平、业绩及思想品质，介绍数学学科的创立、发展和完善，以使读者有更宽的视野和必要的数学历史知识，进一步理解数学、喜欢数学和热爱数学.

本次修订过程中，得到了江苏省教育厅、机械工业出版社和扬州大学的大力支持与帮助，并得到了扬州大学教材出版基金的资助. 我们在此表示衷心的感谢.

本次修订工作由刘金林、蒋国强、张兴龙、汤进龙、孟国明和俞皓完成. 新版中存在的问题，敬请广大专家、同行和读者批评指正.

编者

第 1 版前言

本书根据高等学校理工类本科专业高等数学课程的教学基本要求及全国硕士研究生入学考试大纲编写而成. 编写中,注重强调数学的思想方法,注重培养学生的数学思维能力,注重提高学生的数学素质与创新能力.

本书在编写中力求具有以下特点:

1. 科学定位. 进入 21 世纪以来,在高等教育新形势下,既要为理工科大学生准确完整地开启高等数学的基本概念、基本理论和基本方法介绍、分析、训练、应用的"窗口",又要为他们在知识、能力、素质的三维空间中留下进一步延伸发展的"接口".

2. 综合考虑、整体优化,体现"适、宽、精、新、用". 也就是要深浅"适"度;要有更"宽"的知识面;要少而"精";要推陈出"新",反映时代要求;要理论联系实际,学以致"用".

3. 强调特色. 在经典教学内容的处理上,一方面注重内容的实际背景与几何意义的阐述,突出分析方法的启示;另一方面注重精细全面的有机结合,力求深入浅出.

4. 以学生为本. 体现以学生为中心的教育思想,注重培养学生的自学能力和扩展、发展知识的能力,为今后持续创造性的学习打好基础.

本书分上、下两册. 上册主要介绍一元函数微积分与无穷级数,下册主要介绍向量代数、多元函数微积分与微分方程. 全书知识系统、结构清晰、详略得当,例题典型、习题丰富、讲解透彻,适合作为普通高等院校理科类(非数学专业)、工科类各专业的教材使用,也可供其他有关专业选用为教材或教学参考书.

本书由刘金林教授担任主编,蒋国强副教授担任副主编,参加编写工作的还有张兴龙副教授、汤进龙副教授、孟国明副教授和俞皓讲师.

本书编写过程中,得到了机械工业出版社和扬州大学的大力支持与帮助,并得到了扬州大学教材出版基金的资助. 我们在此表示衷心的感谢.

由于编者水平有限,错误疏漏之处在所难免,敬请各位专家、学者不吝指教,欢迎读者批评指正.

编　者

目　录

第 8 章

向量代数与空间解析几何

在平面解析几何中，通过建立平面直角坐标系，将平面上的点与一对有序数组对应起来；将平面上的图形与方程对应起来，使一元函数有了直观的几何意义，从而我们可以用代数的方法来研究几何问题. 本章将按照类似的方法，建立空间解析几何.

正像平面解析几何的知识对学习一元函数微积分是不可缺少的一样，空间解析几何的知识对学习多元函数微积分也是必要的.

本章首先介绍向量的概念、向量的运算，然后建立空间直角坐标系，研究向量的坐标表示，并以向量为工具讨论空间的平面与直线，最后介绍一些重要的曲面和空间曲线.

8.1 向量及其线性运算

8.1.1 向量的概念

在客观世界中，经常会遇到一些量，如面积、体积、长度、温度、质量等，可以用一个数完全确定，这种只有大小的量称为**数量**(或**标量**). 另外还有一些量，如位移、速度、加速度、力、力矩等，它们不仅有大小，还有方向，这种既有大小、又有方向的量称为**向量**(或**矢量**).

数学上，常用有向线段表示向量. 有向线段的长度表示向量的大小，有向线段的方向表示向量的方向. 以 A 为起点、B 为终点的有向线段所表示的向量记作$\overrightarrow{AB}$，有时也用黑体字母 $\boldsymbol{a}$ 或在字母上加箭头$\vec{a}$表示(图 8-1).

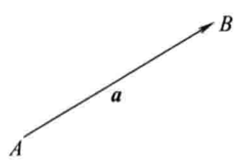

图 8-1

向量的大小称为向量的**模**，向量 $\boldsymbol{a}$，$\vec{a}$，$\overrightarrow{AB}$的模分别记为 $|\boldsymbol{a}|$，$|\vec{a}|$，$|\overrightarrow{AB}|$. 模等于1的向量称为**单位向量**. 模等于0的向量称为**零向量**，记为 $\boldsymbol{0}$ 或 $\vec{0}$. 零向量的方向可以看作是任意的.

由于许多实际问题中所碰到的向量常常与起点无关，所以数学上一般只研究与起点无关的向量，并称这种向量为**自由向量**. 在本章中，如果不加特别说明，所讨论的向量均指自由向量.

因为我们只讨论自由向量，所以如果两个向量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 的模相等，且方向相同，我们就称向量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 是相等的，记作 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}$. 如果两个非零向量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 的方向相同或相反，就称这两个向量平行，记作 $\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}$.

8.1.2 向量的线性运算

1. 向量的加减法

向量的加法运算规定如下：

设有两个向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$，以任意点 O 为起点，作$\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a}$，以 $\boldsymbol{a}$ 的终点 A 为起点作$\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{b}$，连接 OB，则向量$\overrightarrow{OB}=\boldsymbol{c}$ 就是向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的和(图 8-2)，即

$$\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}.$$

这种作出两向量之和的方法叫作向量加法的**三角形法则**.

当向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 不平行时，求向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 之和还有下述**平行四边形法则**：以任意点 O 为起点，作$\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{OB}=\boldsymbol{b}$，再以 OA、OB 为边作平行四边形 $OACB$，则对角线向量$\overrightarrow{OC}=\boldsymbol{c}$ 等于向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的和 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$(图 8-3).

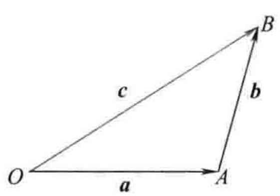

图 8-2

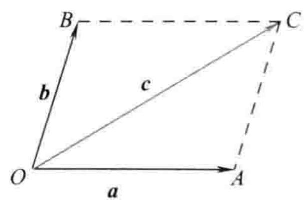

图 8-3

根据向量加法的定义，可知向量的加法满足下列运算规律：

(1)交换律 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}$；

(2)结合律 $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})$.

由于向量的加法满足交换律和结合律，故 n 个向量 $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_n$ 相加可记作

$$\boldsymbol{a}_1+\boldsymbol{a}_2+\cdots+\boldsymbol{a}_n,$$

并由向量加法的三角形法则，得到 n 个向量相加的法则如下：以前一个向

量的终点作为后一个向量的起点，相继作向量 $\boldsymbol{a}_1$，$\boldsymbol{a}_2$，…，$\boldsymbol{a}_n$，再以第一个向量的起点为起点，最后一个向量的终点为终点作一向量，这个向量即为所求的和向量，如图 8-4 所示，有

$$\boldsymbol{s}=\boldsymbol{a}_1+\boldsymbol{a}_2+\cdots+\boldsymbol{a}_5$$

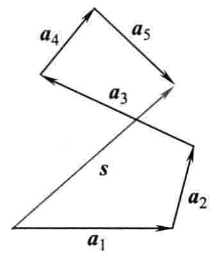

图　8-4

设 $\boldsymbol{a}$ 为一向量，称与 $\boldsymbol{a}$ 的模相同而方向相反的向量为 $\boldsymbol{a}$ 的负向量，记作 $-\boldsymbol{a}$. 规定向量 $\boldsymbol{b}$ 与 $-\boldsymbol{a}$ 的和为向量 $\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 的差(图8-5a)，记为 $\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}$，即

$$\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}+(-\boldsymbol{a}).$$

向量 $\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 的差 $\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}$ 也可按图 8-5b 所示的方法作出. 从图 8-5b 可以看出，若把向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 移到同一起点 O，则从 $\boldsymbol{a}$ 的终点 A 指向 $\boldsymbol{b}$ 的终点 B 的向量 $\overrightarrow{AB}$ 便是向量 $\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 的差 $\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}$.

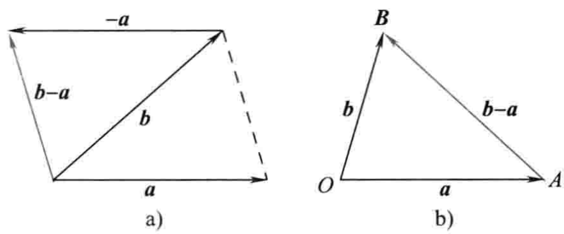

图　8-5

由三角形两边之和大于第三边的原理，有

$$|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|\leqslant|\boldsymbol{a}|+|\boldsymbol{b}| \quad 及 \quad |\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|\leqslant|\boldsymbol{a}|+|\boldsymbol{b}|,$$

其中等号在 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 同向或反向时成立.

2. 向量与数的乘法

向量 $\boldsymbol{a}$ 与实数 λ 的乘积记作 $\lambda\boldsymbol{a}$，规定 $\lambda\boldsymbol{a}$ 是一个向量，它的模为 $|\lambda\boldsymbol{a}|=|\lambda||\boldsymbol{a}|$，它的方向：当 $\lambda>0$ 时与 $\boldsymbol{a}$ 相同，当 $\lambda<0$ 时与 $\boldsymbol{a}$ 相反.

当 $\lambda=0$ 时，$|\lambda\boldsymbol{a}|=0$，即 $\lambda\boldsymbol{a}$ 为零向量，这时它的方向可以是任意的.

特别地，当 $\lambda=-1$ 时，$\lambda\boldsymbol{a}$ 为 $\boldsymbol{a}$ 的负向量，即 $(-1)\boldsymbol{a}=-\boldsymbol{a}$.

如果用 $\boldsymbol{a}^0$ 表示与非零向量 $\boldsymbol{a}$ 同方向的单位向量，则由向量与数的乘积的定义可知，$|\boldsymbol{a}|\boldsymbol{a}^0$ 与 $\boldsymbol{a}$ 的方向相同，模也相等，故有

$$\boldsymbol{a}=|\boldsymbol{a}|\boldsymbol{a}^0,$$

从而

$$\boldsymbol{a}^0=\frac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|}.$$

上式表明任一非零向量除以它的模得到一个与原向量方向相同的单位向量.

可以验证，向量与数的乘积符合下列运算规律：

(1)结合律　$\lambda(\mu\boldsymbol{a})=\mu(\lambda\boldsymbol{a})=(\lambda\mu)\boldsymbol{a}$；

(2)分配律　$\lambda(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=\lambda\boldsymbol{a}+\lambda\boldsymbol{b}$；$(\lambda+\mu)\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{a}$.

向量的加、减及数乘向量统称为向量的**线性运算**.

根据向量与数的乘积的定义，可得两个向量平行的充要条件：

定理 8-1　设向量 $\boldsymbol{a}\neq\boldsymbol{0}$，那么向量 $\boldsymbol{b}$ 平行于向量 $\boldsymbol{a}$ 的充分必要条件是：存在唯一的实数 λ，使 $\boldsymbol{b}=\lambda\boldsymbol{a}$.

证　条件的充分性是显然的，下面证明条件的必要性.

设 $\boldsymbol{b}/\!/\boldsymbol{a}$，当 $\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 同向时，取 $\lambda=\dfrac{|\boldsymbol{b}|}{|\boldsymbol{a}|}$；当 $\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 反向时，取 $\lambda=-\dfrac{|\boldsymbol{b}|}{|\boldsymbol{a}|}$. 这样，总有 $\boldsymbol{b}$ 与 $\lambda\boldsymbol{a}$ 同向，并且

$$|\lambda\boldsymbol{a}|=|\lambda|\,|\boldsymbol{a}|=\frac{|\boldsymbol{b}|}{|\boldsymbol{a}|}|\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{b}|.$$

由向量相等的概念得 $\boldsymbol{b}=\lambda\boldsymbol{a}$.

再证实数 λ 的唯一性. 设存在实数 λ,μ，使 $\boldsymbol{b}=\lambda\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}=\mu\boldsymbol{a}$，两式相减，得

$$\lambda\boldsymbol{a}-\mu\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0},$$

故

$$|\lambda-\mu|\,|\boldsymbol{a}|=0.$$

由 $\boldsymbol{a}\neq\boldsymbol{0}$ 得 $|\boldsymbol{a}|\neq0$，从而 $|\lambda-\mu|=0$，即 $\lambda=\mu$.

【例 8-1】　在平行四边形 $ABCD$ 中，设 $\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{AD}=\boldsymbol{b}$，试用 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 表示向量 $\overrightarrow{MA}$，$\overrightarrow{MB}$，$\overrightarrow{MC}$，$\overrightarrow{MD}$，这里 M 是平行四边形对角线的交点(图8-6).

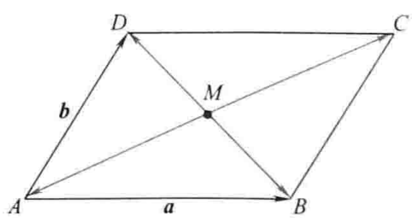

图　8-6

解　由于平行四边形的对角线互相平分，所以

$$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\overrightarrow{AC}=2\,\overrightarrow{AM},$$

即 $-(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=2\,\overrightarrow{MA}$，于是

$$\overrightarrow{MA}=-\frac{1}{2}(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}).$$

因为 $\overrightarrow{MC}=-\overrightarrow{MA}$，所以

$$\overrightarrow{MC}=\frac{1}{2}(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}).$$

又因 $-\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\overrightarrow{BD}=2\,\overrightarrow{MD}$，所以

$$\overrightarrow{MD}=\frac{1}{2}(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}).$$

由于$\overrightarrow{MB}=-\overrightarrow{MD}$,所以

$$\overrightarrow{MB}=\frac{1}{2}(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}).$$

【例 8-2】 设一个立方体三边上的向量分别为 $\boldsymbol{a}$,$\boldsymbol{b}$,$\boldsymbol{c}$. A,B,C,D,E,F 为各边的中点(图 8-7). 求证:$\overrightarrow{AB}$,$\overrightarrow{CD}$,$\overrightarrow{EF}$组成一个三角形,即$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{EF}=\mathbf{0}$.

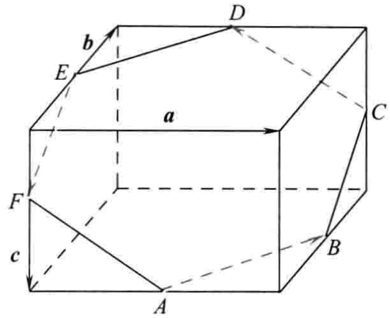

图 8-7

证　因为$\overrightarrow{AB}=\frac{\boldsymbol{a}}{2}+\frac{\boldsymbol{b}}{2}$,$\overrightarrow{CD}=-\frac{\boldsymbol{c}}{2}-\frac{\boldsymbol{a}}{2}$,$\overrightarrow{EF}=-\frac{\boldsymbol{b}}{2}+\frac{\boldsymbol{c}}{2}$,所以

$$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{EF}=\frac{\boldsymbol{a}}{2}+\frac{\boldsymbol{b}}{2}-\frac{\boldsymbol{c}}{2}-\frac{\boldsymbol{a}}{2}-\frac{\boldsymbol{b}}{2}+\frac{\boldsymbol{c}}{2}=\mathbf{0}.$$

8.1.3　空间直角坐标系

在空间任意取一个定点 O,以 O 为原点作三条具有相同的单位长度,且两两互相垂直的数轴,依次记为 x 轴(横轴)、y 轴(纵轴)、z 轴(竖轴),统称坐标轴(图 8-8). 这三条轴的正方向要符合右手法则,即以右手握住 z 轴,当右手的四个手指从 x 轴正向以$\frac{\pi}{2}$角度转向 y 轴正向时,大拇指的指向就是 z 轴的正向(图 8-9),这样的三条坐标轴构成一个空间直角坐标系,称为 $Oxyz$ **坐标系**,点 O 称为**坐标原点**(或原点).

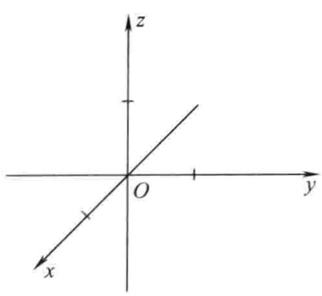

图 8-8

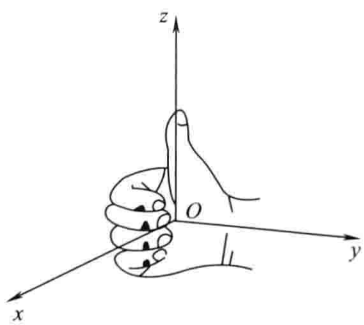

图 8-9

通常把 x 轴和 y 轴置于水平面上,而 z 轴是铅直线. 三条坐标轴中的任意两条确定一个平面,称为**坐标面**. 由 x 轴和 y 轴所确定的坐标面叫作 xOy 面,由 y 轴、z 轴及由 z 轴、x 轴所确定的坐标面,分别叫作 yOz 面和 zOx 面. 三个坐标面把空间分成八个部分,每一部分叫作**卦限**,含有 x 轴、

y 轴及 z 轴正半轴的那个卦限叫作**第一卦限**，其他第二、第三、第四卦限在 xOy 面的上方，按逆时针方向确定. 在 xOy 面下方与第一至第四卦限相对应的是第五至第八卦限. 这八个卦限分别用字母Ⅰ、Ⅱ、Ⅲ、Ⅳ、Ⅴ、Ⅵ、Ⅶ、Ⅷ表示，如图 8-10 所示.

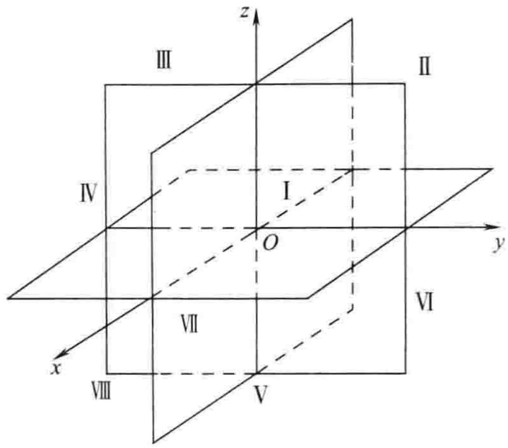

图 8-10

建立了空间直角坐标系后，空间任一点就可以用三个有序的实数来表示.

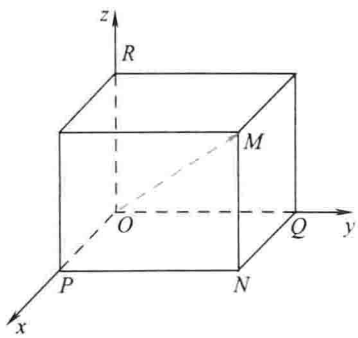

图 8-11

设 M 为空间任意一点，过点 M 分别作三个平面垂直于 x 轴、y 轴和 z 轴，它们与 x 轴、y 轴和 z 轴的交点依次为 P、Q、R(图 8-11). 设这三个点在 x 轴、y 轴、z 轴上的坐标分别为 x、y、z，于是由点 M 就唯一确定了三个有序数 x、y、z；反过来，如果已知三个有序数 x、y、z，我们可以在 x 轴、y 轴、z 轴上分别取坐标为 x、y、z 的三个点 P、Q、R，然后通过点 P、Q、R 分别作垂直于 x 轴、y 轴、z 轴的三个平面，这三个平面必然交于空间一点 M. 由此可见，空间一点 M 与三个有序数 x、y、z 之间存在着一一对应关系，我们把有序数 x、y、z 称为点 M 的坐标，并依次称 x、y、z 为点 M 的横坐标、纵坐标、竖坐标，点 M 通常记为 $M(x,y,z)$.

坐标面和坐标轴上的点，其坐标各有一定的特征. 例如：在坐标面 xOy、yOz 和 zOx 上点的坐标分别为 $(x,y,0)$、$(0,y,z)$ 和 $(x,0,z)$；在 x 轴、y 轴和 z 轴上点的坐标分别为 $(x,0,0)$、$(0,y,0)$ 和 $(0,0,z)$；原点的坐标是 $(0,0,0)$.

8.1.4 向量的坐标及向量的运算

向量的运算仅靠几何方法研究是不够的，为此引进向量的坐标，把向量用有序数组表示出来，从而把向量的运算转化为有序数组的代数运算.

设 $\boldsymbol{a}$ 为空间直角坐标系 $Oxyz$ 中任一向量，将 $\boldsymbol{a}$ 的起点平移到坐标原点 O，这时设其终点为 $M(x,y,z)$. 过点 M 分别作垂直于 x 轴、y 轴、z 轴的三个平面，与坐标轴的交点分别记为 P、Q、R，如图 8-11 所示. 由向

量加法的三角形法则，有

$$\begin{aligned}\boldsymbol{a} &= \overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{PN} + \overrightarrow{NM} \\ &= \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OQ} + \overrightarrow{OR}.\end{aligned}$$

在空间直角坐标系 $Oxyz$ 中，分别取 x 轴、y 轴、z 轴的正向上单位向量 $\boldsymbol{i}$、$\boldsymbol{j}$、$\boldsymbol{k}$，这三个向量称为**坐标系基本单位向量**. 根据向量与数的乘积运算可得

$$\overrightarrow{OP} = x\boldsymbol{i}, \overrightarrow{OQ} = y\boldsymbol{j}, \overrightarrow{OR} = z\boldsymbol{k},$$

故

$$\boldsymbol{a} = \overrightarrow{OM} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}.$$

上式称为向量 $\boldsymbol{a}$ 的**坐标分解式**，向量 $x\boldsymbol{i}$、$y\boldsymbol{j}$、$z\boldsymbol{k}$ 称为向量 $\boldsymbol{a}$ 沿三个坐标轴方向的**分向量**.

显然，给定向量 $\boldsymbol{a}$，就唯一确定了点 M 及 $\overrightarrow{OP}$、$\overrightarrow{OQ}$、$\overrightarrow{OR}$ 这三个分向量，进而唯一确定三个有序数 x、y、z. 反之，给定三个有序数 x、y、z，也唯一确定了点 M 及向量 $\boldsymbol{a}$. 于是，空间一个向量 $\boldsymbol{a}$ 与三个有序数 x、y、z 之间存在着一一对应关系. 我们把有序数 x、y、z 称为向量 $\boldsymbol{a}$ 的坐标，记为

$$\boldsymbol{a} = (x, y, z).$$

向量 $\overrightarrow{OM}$ 称为点 M 关于原点的**向径**，通常用黑体字母 $\boldsymbol{r}$ 表示，即 $\boldsymbol{r} = \overrightarrow{OM}$. 由上述定义可知，点 M 与点 M 的向径有相同的坐标，记号 (x, y, z) 既表示点 M，又表示向径 $\overrightarrow{OM}$.

利用向量的坐标，容易得到向量的加法、减法及向量与数的乘法的运算法则.

设

$$\boldsymbol{a} = (a_x, a_y, a_z), \boldsymbol{b} = (b_x, b_y, b_z),$$

即

$$\boldsymbol{a} = a_x\boldsymbol{i} + a_y\boldsymbol{j} + a_z\boldsymbol{k}, \boldsymbol{b} = b_x\boldsymbol{i} + b_y\boldsymbol{j} + b_z\boldsymbol{k}.$$

利用向量的加法以及向量与数的乘法的运算律，有

$$\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} = (a_x + b_x)\boldsymbol{i} + (a_y + b_y)\boldsymbol{j} + (a_z + b_z)\boldsymbol{k},$$

$$\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b} = (a_x - b_x)\boldsymbol{i} + (a_y - b_y)\boldsymbol{j} + (a_z - b_z)\boldsymbol{k},$$

$$\lambda\boldsymbol{a} = (\lambda a_x)\boldsymbol{i} + (\lambda a_y)\boldsymbol{j} + (\lambda a_z)\boldsymbol{k}(\lambda \text{ 为实数}),$$

或

$$\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} = (a_x + b_x, a_y + b_y, a_z + b_z),$$

$$\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b} = (a_x - b_x, a_y - b_y, a_z - b_z),$$

$$\lambda\boldsymbol{a} = (\lambda a_x, \lambda a_y, \lambda a_z).$$

由此可见，对向量进行加、减及数乘，只需对向量的各个坐标分别进行相应的数量运算即可.