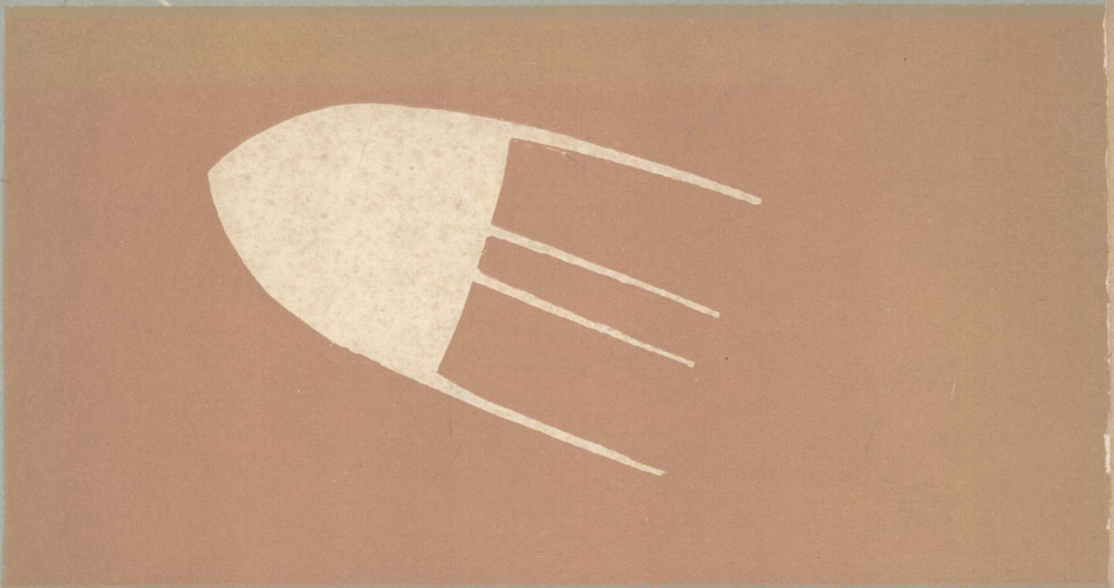
·上册·



张金槐　李菊生　常兆诚　编　　　吴洪鳌　校

飞行器试验统计学

中国人民解放军国防科学技术大学

飞行器試驗統計学

上 册

张金槐 李菊生 常兆诚 编

吴 洪 鳌 校

中国人民解放军国防科学技术大学

1982.8

内 容 提 要

本讲义分为上、下两册，上册讨论一般统计估值和假设检验的理论和方法。考虑到飞行器试验统计推断中的特殊性，讨论了 Bayes 估计和统计决策方法。下册主要讨论线性模型的统计估计和滤波方法，并讨论滤波技术的实现和应用等问题。

前　言

飞行器从研制、试验、定型直到战斗使用的整个过程中，统计数学方法已越来越显示出它的重要作用。飞行器系统的试验，无论是地面试验还是飞行试验，对于其性能参数的分析和评定，统计数学方法是一个基本的方法。目前，有关单位已经广泛地运用了这种方法。此外，在飞行器试验过程中，又不断地提出了一些新的问题，要求统计数学方法能有助于这些特殊问题的解决。因此，为了适应教学需要和飞行器试验的新形势，我们编写了这个讲义。

统计数学方法，包含的內容极其广泛。这里，我们只准备就飞行器试验中常遇到的统计问题作比较系统、深入的讨论。为此，我们定名为"飞行器试验统计学"。我们期望能尽可能地适应设计、试验单位的需要，所论问题具有眞实的实际背景；同时，又能把与之有关的近代统计学中的技术成果反映进来。为此，在编写这个讲义的过程中，应用了我们在有关设计单位及一些部队举办的专题讲座的材料和某些技术成果。七机部一院及七〇八所四、五室的同志还专门为本讲义提出过很好的建议。但是由于编者水平所限，同时时间紧迫，要达到我们的期望一定会有不小距离。我们期待着来自各方面的意见和帮助，以使这份讲义能逐步地完臻起来。

本讲义分上、下两册。上册主要阐述一般统计估值和假设检验理论和方法。其中包含了 Bayes 估计及统计决策的基本理论。并讨论了回归方法。下册主要讨论线性模型的统计估计及滤波理论。并讨论滤波的实现和应用等问题。

上册的第一、二、三、四、六、七、八章由张金槐同志编写，第五章由张金槐和常兆诚同志编写，第九章由李菊生同志编写。

阅读本讲义时，必须具备高等数学，线性代数，概率论与随机过程，状态空间，导弹概论等基础知识。这份讲义适用于轨道（弹道）与试验统计分析专门化的研究生及专业科技人员。如果用作大学普通班的教材，可以选用有关內容。特别是打记号"＊"的內容可以暂时略去。

目　录

第一章 引 论

§1 飞行器试验统计学研究的对象、目的及其特点

统计数学是通过试验的结果研究随机现象规律性的一门科学。一般地说，它包括收集资料、整理资料，并对所获得的资料进行分析和推断。对于飞行器来说，由于飞行器系统技术复杂，而且价值昂贵，研制与试验的周期较长，每批生产的数量少，为了弄清楚在实际使用条件下的性能，就必须进行各种试验。由于种种原因，试验的结果都具有随机性。这就提出了一系列的问题，如：元器件、分系统、全系统究竟要做那些地面和飞行试验？试验时的环境条件如何制定？试验结果如何进行分析？测量到的数据如何处理以获得更多的信息量？试验如何设计以使达到予定的试验目的而又能尽量减少试验次数特别是飞行试验的次数等等。飞行器试验统计学就是研究飞行器在地面试验与飞行试验过程中所出现的大量随机现象的规律性的一门学科。以全系统的飞行试验为例，试验统计学可以用来帮助解决下列问题：

(1) 分析地面试验的结果，以此作为飞行试验的验前信息，如验前分布的形式及参数的估值等；

(2) 研究确定飞行器运动中的有关数学模型，如制导系统的误差模型或是引力場模型、大气模型等；

(3) 研究确定飞行器测量系统的误差模型；

(4) 分析飞行器试验的环境条件，如分析飞行器在飞行过程中所受的内部干扰与外部干扰的统计特性等；

(5) 研究测量系统的精度鉴定及测量数据的统计处理方法；

(6) 综合飞行试验的各种测量信息及地面试验的信息，以便对飞行器的运动状态参数作出最佳估计；

(7) 对飞行器的实际飞行进行随机模拟；

(8) 对飞行器的性能参数如射击精度、射程、可靠性等提出统计鉴定方案，并对飞行器系统进行定型分析；

(9) 研究飞行试验计划的安排，确定试验程序。等等。

在飞行器系统的研制、生产、试验、定型、使用的整个过程中，飞行器试验统计学有着广泛的应用。开展试验统计学的研究，将有助于缩短飞行器的研制周期，节省费用，并加速飞行器系统的定型过程，使部队能得到及时的装备。以利于战备，以利于国防现代化。

飞行器试验统计学与通常的数理统计学有着不同的特点。例如，在某些場合，试验的次数是受限制的，不能如常规的统计问题那样，可以任意的抽样。因此，那种经常被人们运用的极限定理就受到一定的限制。这样，所谓小子样推断理论，有着重要的意义。又如验前信息的运用问题，由于飞行器研制中的继承性，又成为一个比较突出的问题。再如试验资料的获得，在一般统计问题中，总认为属于同一总体（母体）。但是在飞行器试验中，由于各阶段试验中的要求不同，考验的特性参数各异。因此“来源于同一总体”在不少实际場合是不满足的。因此异总体试验结果的统计分析又成为一个需要研究的问题。

总之，在飞行器试验统计学中，经典的统计方法有待于进一步发展；而飞行器试验中提出的新问题，又要求我们不断的加深认识和作深入的研究。

§2 统计估值问题

在统计学上，常常把所研究的全部元素组成的集合称为总体（或称母体）。例如，导弹所有可能的落点组成一个总体。推力的所有可能值组成一个总体。又如导弹产品的全体组成一个总体等等。总体中的元素可以具有各种不同的特性（指标）。例如导弹的落点，它的纵向落点偏差和侧向落点偏差表示了落点的不同特性。由于总体中的元素所具有的特性在不同的试验中的表现值是不同的，因此常将总体的某特性用随机变量X来表示。称这种随机变量为总体所涉及的随机变量或简称总体随机变量。试验的结果，我们获得随机变量取某个可能的值。如果对X进行n次独立试验（或观测），则可得n个观察值

$$x_1, x_2, \cdots, x_n. \tag{1.1}$$

常称(1.1)为X的一个统计序列，或称为总体X的一组样本值。我们知道，由于X的随机性，对于不同次的试验，X的观测值未必相同。因此n个观测值$x_1, \cdots x_n$可以当作n維随机矢量$(X_1, \cdots, X_n)$的一个表现值。这里$X_1, \cdots, X_n$为与X具有相同分布且互相独立的随机变量。常称$(X_1, \cdots, X_n)$为总体X的容量为n的简单子样。在下面的讨论中，为了减少那种大写、小写的麻烦，将子样一般地写为$(x_1, \cdots, x_n)$，它是n維空间中的一个随机点。在具体的观测进行之后，即是说在给出了子样元素的具体数值时，我们将特别指出它为子样$(x_1, \cdots, x_n)$的表现值或现实。

常称子样$(x_1, \cdots, x_n)$的所有可能值组成的空间为子样空间（或样本空间）。它是n維空间或者n維空间的子空间。试验统计学的主要任务就是从子样的表现值推断总体随机变量X的概率特性。这些特性如X的分布、X的数字特性等等。

设X为总体所涉及的随机变量。$(x_1, \cdots, x_n)$为其简单子样。我们要从子样的表现值去研究关于X的种种数字特征。例如X的期望值$E[X]$、方差$D[X]$，m次中心矩

$$\mu_m[X] = E[(X - E[X])^m]$$

等等。为此，常考虑子样的一个单值数值函数

$$T = T(x_1, \cdots, x_n), \tag{2.1}$$

其中不包含未知分布参数。以这种统计量的表现值作为X的数字特征的估计。常称

$$T=T(x_1,\cdots,x_n)$$

为统计量。例如

$$\bar{x}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i,$$

$$\sigma_x^*=\sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2},$$

$$\mu_m^*=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^m$$

等等都是统计量。由于子样的随机性，统计量 $T(x_1,\cdots,x_n)$ 也是随机变量。（说得严格一些，如果 $T(x_1,\cdots,x_n)$ 是子样空间的一个 Borel 可测函数的话。）

常称 $T(x_1\cdots,x_n)$ 的分布为抽样分布。

这里，不妨先来看看关于X的数字特征的统计估值问题。为此，必须研究统计量的特性。下面以 $\bar{x}$ 和$(\sigma_x^*)^2$为例作一些必要的说明。

(1) 关于统计均值 $\bar{x}$ 的各次矩

易知

$$E[\bar{x}]=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}E[x_i]=\mu_x, \tag{2.2}$$

此处 μ_x 为总体随机变量X的数学期望。其次，

$$D[\bar{x}]=D\left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i\right]$$

$$=\frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}D[x_i]=\frac{1}{n}\mu_2[X], \tag{2.3}$$

此处 $$\mu_2[X]=D[X]=E[(X-\mu_x)^2]$$

由(2.2)式，它表示了 $\bar{x}$ 的取值是围绕 μ_x "摆动"的，而其平均值即为 μ_x。这种性质，在统计学上称此估计为无偏的。再注意(2.3)式，$\bar{x}$ 的方差较之X（或每个观测值 x_i）的方差有较高的数量级，或者，我们记

$$D[\bar{x}]=O\left(\frac{1}{n}\right).$$

因此，当 n 增大时，$\bar{x}$ 愈接近于X的期望值。由此，我们得出结论：
当观测次数 n 甚大时，$\bar{x}$ 作为$E[X]$的估值是适宜的。

我们还可以计算 $\bar{x}$ 的高阶中心距。例如

$$\mu_3[\bar{x}]=E[(\bar{x}-\mu_x)^3]$$

$$=\frac{1}{n^3}E[\{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu_x)\}^3]$$

$$=\frac{1}{n^3}\sum_{i=1}^{n}E[(x_i-\mu_x)^3]$$

$$=\frac{1}{n^3}\cdot n\mu_3=\frac{\mu_3}{n^2}; \tag{2.4}$$

$$\mu_4[\bar{x}]=E[(\bar{x}-\mu_x)^4]$$

$$=\frac{1}{n^4}\sum_1^n E[(x_i-\mu_x)^4]+\frac{6}{n^4}\sum_{i<j}E[(x_i-\mu_x)^2(x_j-\mu_x)^2]$$

$$=\frac{1}{n^4}n\mu_4+\frac{6}{n^4}\cdot\frac{n(n-1)}{2}\mu_2^2$$

$$=\frac{3\mu_2^2}{n^3}+\frac{\mu_4-3\mu_2^2}{n^3}; \tag{2.5}$$

同理可以算得

$$\mu_5[\bar{x}]=E[(\bar{x}-\mu_x)^5]=\frac{10}{n^3}\mu_2\mu_3+O\left(\frac{1}{n^4}\right), \tag{2.6}$$

$$\mu_6[\bar{x}]=E[(\bar{x}-\mu_x)^6]=\frac{15}{n^3}\mu_2^3+O\left(\frac{1}{n^4}\right) \tag{2.7}$$

一般地，有

$$E[(\bar{x}-\mu_x)^{2K-1}]=O\left(\frac{1}{n^K}\right). \tag{2.8}$$

$$E[(\bar{x}-\mu_x)^{2K}]=O\left(\frac{1}{n^K}\right). \tag{2.9}$$

如果$X\sim N(a,\sigma^2)$，则$\bar{x}\sim N\left(a,\frac{\sigma^2}{n}\right)$，此时

$$\mu_\nu[\bar{x}]=E[(\bar{x}-\mu_x)^\nu]=0,\ \text{当}\ \nu\ \text{为奇数时},$$

$$\mu_2[\bar{x}]=\frac{\sigma^2}{n}, \tag{2.10}$$

$$\mu_4[\bar{x}]=\frac{3}{n^2}\sigma^4,$$

$$\mu_6[\bar{x}]=\frac{15}{n^3}\sigma^6,$$

$$\vdots$$

分析统计矩的特性，对于进一步讨论估值的性质是十分必要的。在后续的讨论中将会看到这一点。

(2) 关于 $D^*[X]$ 的各次矩

注意到子样的m次中心距 $\mu_m^*=\frac{1}{n}\sum_{i=j}^n(x_i-\bar{x})^m$不依赖于原点在变量尺度上的位置。因此在讨论 μ_m^* 的抽样分布或者计算它的各次矩时，总可以假定$\mu_x=0$，所得到的结果对于任何的 μ_x 值都是成立的。

这里，我们来讨论子样方差$D^*[X]$的各次矩。在统计学讨论中，子样方差常记作S^2，于是

$$S^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2. \tag{2.11}$$

下面讨论中，设$\mu_x=0$. 由于

此处
$$S^2=a_2^*-\bar{x}^2,$$

$$a_2^*=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i^2,$$

因此
$$E[S^2]=\mu_2-\frac{1}{n}\mu_2=\frac{n-1}{n}\mu_2, \tag{2.12}$$

由此可以看出，S^2不是$\mu_2=\sigma_x^2$的无偏估计，如果记

$$\widetilde{S}^2=\frac{n}{n-1}\cdot S^2=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2 \tag{2.13}$$

那末$\widetilde{S}^2$为$\mu_2=\sigma_x^2$的无偏估计。

再计算 $D[S^2]$，由于

$$D[S^2]=E[(S^2)^2]-(E[S^2])^2, \tag{2.14}$$

因此只需计算$E[(S^2)^2]$，注意

$$\begin{aligned}(S^2)^2&=(a_2^*-\bar{x}^2)^2\\&=(a_2^*)^2-2\bar{x}^2\cdot a_2^*+\bar{x}^4,\end{aligned} \tag{2.15}$$

而

$$\begin{aligned}E[(a_2^*)^2]&=E\left[\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i^2\right)^2\right]\\&=\frac{1}{n^2}E[(\sum_{i=1}^{n}x_i^2)^2]\\&=\frac{1}{n^2}[E(\sum_{1}^{n}x_i^4)+\sum_{i\neq j}E[x_i^2]E[x_j^2]].\end{aligned}$$

上式右端括弧中的第一项为$n\mu_4$；再注意第二项，由于$E[x_i^2]=E[x_j{}^2]=\mu_2$，而$\sum\limits_{i\neq j}E[x_i^2]E[x_j^2]$共有$n(n-1)$项，故

$$\sum_{i\neq j}E[x_i^2]E[x_j^2]=n(n-1)\mu_2^2.$$

因此

$$\begin{aligned}E[(a_2^*)^2]&=\frac{1}{n^2}[n\mu_4+n(n-1)\mu_2^2]\\&=\frac{\mu_4+(n-1)\mu_2^2}{n};\end{aligned} \tag{2.16}$$

此外
$$E[\bar{x}^2\cdot a_2^*]=\frac{1}{n^3}E[(\sum_{1}^{n}x_i)^2\cdot\sum_{1}^{n}x_i^2]$$

$$=\frac{\mu_4+(n-1)\mu_2^2}{n^2}; \tag{2.17}$$

$$E[\bar{x}^4]=\frac{1}{n^4}E[(\sum_1^n x_i)^4]$$

$$=\frac{1}{n^4}[\sum_1^n E(x_i^4)+3\sum_{i\neq j}E(x_i^2)E(x_j^2)]$$

$$=\frac{1}{n^4}n\mu_4+3n(n-1)\mu_2^2]$$

$$=\frac{\mu_4+3(n-1)\mu_2^2}{n^3}. \tag{2.18}$$

将(2.16)～(2.18)代入(2.15)，即得

$$E[(S^2)^2]=\mu_2^2+\frac{\mu_4-3\mu_2^2}{n}-\frac{2\mu_4-5\mu_2^2}{n^2}$$

$$+\frac{\mu_4-3\mu_2^2}{n^3}. \tag{2.19}$$

将上式代入(2.14)，则得

$$D[S^2]=\frac{\mu_4-\mu_2^2}{n}-\frac{2(\mu_4-2\mu_2^2)}{n^2}$$

$$+\frac{\mu_4-3\mu_2^2}{n^3}. \tag{2.20}$$

更高次的矩可以同样地计算，只是计算过程比较冗长而已。如果$X\sim N(a,\sigma^2)$则

$$\begin{cases} E[S^2]=\frac{n-1}{n}\sigma^2, \\ D[S^2]=\frac{2(n-1)}{n^2}\sigma^4. \end{cases} \tag{2.21}$$

由(2.21)，如果我们从$N(\mu_x,\sigma^2)$进行抽样，以

$$\widetilde{S}^2=\frac{n}{n-1}S^2=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^n(x_i-\bar{x})^2$$

作为σ^2的估计，那末 除了知道$\widetilde{S^2}$是σ^2的无偏估计之外，还可以知道

$$D[\widetilde{S}^2]=D\left[\frac{n}{n-1}S^2\right]$$

$$=\frac{n^2}{(n-1)^2}D[S^2]$$

$$=\frac{n^2}{(n-1)^2}\cdot\frac{2(n-1)}{n^2}\sigma^4$$

$$=\frac{2}{n-1}\sigma^4. \tag{2.22}$$

因此随着子样容量 n 的增大，$\widetilde{S}^2$ 愈来愈近似于 σ^2. $D[\widetilde{S}^2]$的大小说明了在有限容量情况下 $\widetilde{S}^2$ 近似 σ^2 的程度。给出这个值是十分必需的，它就如近似计算中，除了给出近似值外，还必需给出误差范围一样，是不可缺少的。

上述这种期望值和方差的估计，不过是一种最简易的方法，当然还有其他估计的方法。同时，也还必须指出，估计值和总体的示性数之间追近的程度究竟如何？又如何评述这种追近的好坏（所谓追近的"优度准则"）？这些问题都是我们后面要专门讨论的。

§3 分布的统计映象

我们知道，随机变量的分布律可以用来对随机变量的概率特性作最完善的描述。无疑，从子样去确定出分布律，这是一个重要的问题。

设总体随机变量X的分布函数为$F(x)$，即

$$F(x)=P\{X<x\},$$

对X进行 n 次观测，得子样的表现值$(x_1,\cdots,x_n)$. 对于任一实数 x，我们计算 $x_1,\cdots,x_n$中小于 x 的那种$x_K(K=1,\cdots,n)$的个数 ν，且除以n，则得ν/n，记

$$F^*(x)=\frac{\nu}{n}. \tag{3.1}$$

众所周知，上式表示了事件$\{X<x\}$在 n 次观测中出现的频率。将 $x_1,\cdots,x_n$ 按大小次序排列，令 $x_{r_1},x_{r_2},\cdots,x_{r_n}$ 为子样的元素按大小由小到大排列的序列，即[*]

$$x_{r_1}<x_{r_2}<\cdots<x_{r_n}$$

则易知

$$F_n^*(x)=\begin{cases}0, & \text{当 } x\leqslant x_{r_1},\\ k/n, & \text{当 } x_{r_k}<x\leqslant x_{r_{k+1}},\\ 1, & \text{当 } x>x_{r_n}.\end{cases} \tag{3.2}$$

由此可知，$F_n^*(x)$是 x 的不减函数，它的值在$[0,1]$之中，且是 x 的左方連续函数（如图 1.1 所示）。常称$F_n^*(x)$为X的统计分布函数或经验分布函数。也称$F_n^*(x)$为总体分布$F(x)$的统计映象。由 Bernoulli 定理知，

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\nu}{n}=\lim_{n\to\infty}F_n^*(x)\xlongequal{\text{Pro}}F(x). \tag{3.3}$$

我们再来给出确定概率密度函数的方法。为此，可先将子样的表现值分组。例如分为下列不相重叠的区间组：

$$\cdots,\ (x_{i-1},x_i],(x_i,x_{i+1}],\cdots$$

然后，在容量为 n 的子样中，计算出观测值落在每一组中的频率 p_i^*，即

$$p_i^*=\frac{m_i}{n},$$

[*] 如果诸 $x_k(k=1,\cdots,n)$中有相同者，我们也不难得出 $F_n{}^*(x)$的表达式。

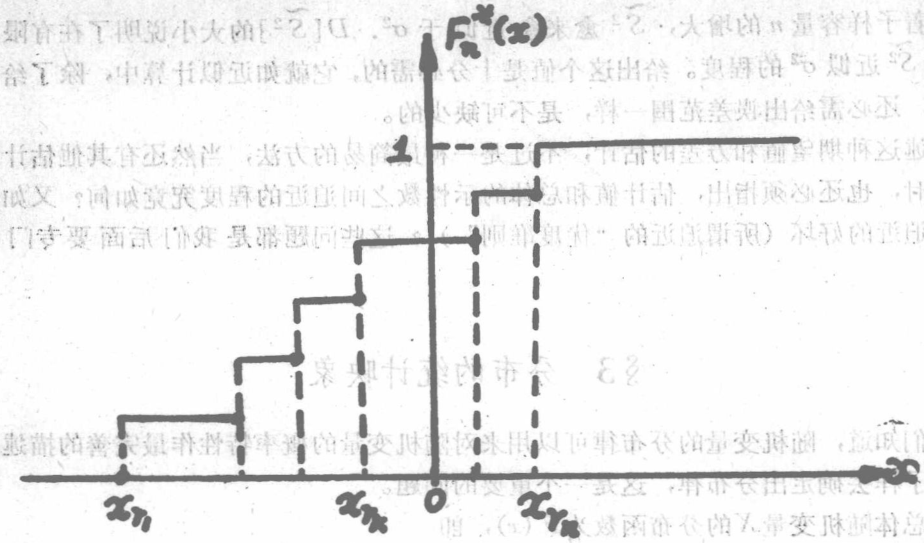


图 1.1 经验分布图

其中 m_i 为观测值落在 $[x_i, x_{i+1}]$ 中的个数。记

$$f^*(x)=p_i^*/\varDelta x_i,\qquad x_i\leqslant x\leqslant x_{i+1} \tag{3.4}$$

此处 $\varDelta x_i = x_{i+1}-x_i$。我们容易作出 $f^*(x)$ 的图形来。该图称为矩形柱图(如图1.2所示)。称 $f^*(x)$ 为 X 的统计密度函数。如果要获得 $f^*(x)$ 的解析迫近也是不困难的。

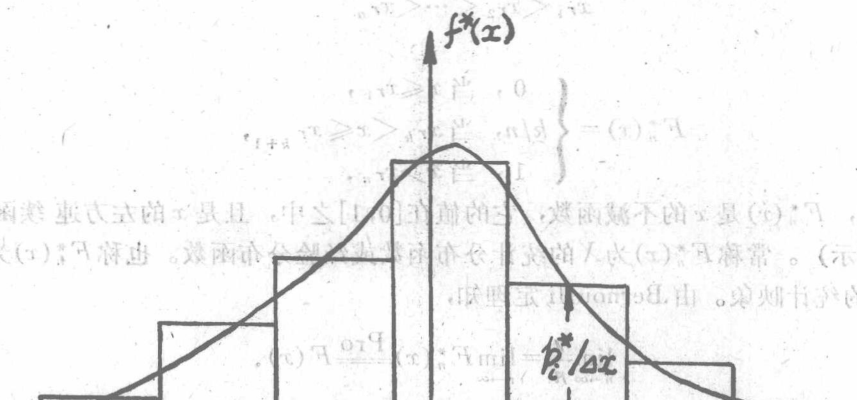


图 1.2 矩形柱图及总体概率密度的迫近图

例如，我们可以利用任意分布密度的 Edgeworth 展式来表示。

为此，令 $$Y=\frac{X-\mu_x}{\sigma_x},$$

则Y的密度函数由 Edgeworth 展式可表示为

$$p(y)\cong\varphi(y)-\frac{r_1}{3!}\varphi^{(3)}(y)+\frac{r_2}{4!}\varphi^{(4)}(y)$$

$$+\frac{10}{6!}r_1^2\varphi^{(6)}(y). \qquad (3.5)$$

其中
$$\varphi(y)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{y^2}{2}},$$

$r_1=\mu_3/\sigma_x^3$, 为偏倚系数,

$r_2=\mu_4/\sigma_x^4-3$, 为超越系数。

$\mu_3=E[(X-\mu_x)^3]$, $\mu_4=E[(X-\mu_x)^4]$.

为获得 (3.5) 的表达式，其中各次矩可用统计矩代替。于是X的密度函数的近似表示式为

$$f(x)=p(y)\left|\frac{dy}{dx}\right|=p\left(\frac{x-\mu_x^*}{\sigma_x^*}\right)\cdot\frac{1}{\sigma_x^*} \qquad (3.6)$$

由上述讨论可以看出，只有当观测数n足够大时，这种迫近才是良好的。这个前提是导弹试验统计中必须注意的。

§4 理论的试验鑑定——统计鑑定方法

导弹的试验结果统计分析和评估问题中，有一类重要的问题需予以特别注意，这就是所谓“性能指标”的鑑定问题。不论是元器件、分系统的试验或者是全弹试车、飞行试验，都有试验鑑定的任务。例如导弹的各分系统，在总体设计中，对各种性能指标给予了标准值（或称额定值）。在各分系统的试验过程中，必须对它们进行鑑定。此外，导弹在定型过程中，必须对各种精度进行国家鑑定。例如动力装置系统的精度、再入时头部的强度、制导系统各种敏感器件的精度、落点的概率偏差、最大射程等等的鑑定。这类问题，在统计学上称为统计假设的检验问题。所谓统计假设，就是对总体的某特性进行的一种理论假定。所谓检验，就是通过试验后获得的子样表现值，给出一种准则，使对于所给的假定进行鑑定。这里不妨先举一例，可以观其方法之一般。

例如，对于一批状态完全相同的弹，在规定的射程L^*之下进行试射。落点的方差认为是已知的。今发射n发弹。要问通过落点数据怎样判定落点具有系统性偏差？不妨以纵向落点偏差为例。在n次射击之下，我们有n个纵向落点偏差

$$\Delta L_1, \Delta L_2, \cdots, \Delta L_n.$$

记纵向落点的方差为σ^2. 为了解决上述问题，引入假设

$$H_0: E[\Delta L]=0,$$

其中ΔL为纵向落点随机变量。常称H_0为原假设。于是我们的问题为通过子样

$$(\Delta L_1, \cdots, \Delta L_n)$$

的表现值，检验H_0这个假设应被接受还是应予以拒绝？

为此，注意落点偏差的均值

$$\overline{\Delta L}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\Delta L_i,,$$

它反映了落点偏差的大小。由于落点的随机性，$\overline{\Delta L}$ 总不为0．所以必须建立一个准则，当$\overline{\Delta L}$的大小超越一定限度时，就认为落点存在系统性偏差，即是说H_0这个假设就应予拒绝。为此，引入一个随机变量

$$U=\frac{\overline{\Delta L}}{\sigma/\sqrt{n}}. \tag{4.1}$$

如果H_0这个假设是眞的话，即$E[\Delta L]=0$成立的话，则有 $\overline{\Delta L}\sim N\left(0,\frac{\sigma^2}{n}\right)$，因此 $U\sim N(0,1)$．于是在H_0为眞的条件下，可以计算下述概率

$$\begin{aligned}&P\{|U|\geqslant t_\alpha|H_0\}\\&=1-\int_{-t_\alpha}^{t_\alpha}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{t^2}{2}}dt\\&=1-[2\Phi(t_\alpha)-1]=2[1-\Phi(t_\alpha)]\triangleq\alpha,\end{aligned} \tag{4.2}$$

于是α和t_α之间的关系完全可以由查表获得。如果令α为一个小的概率（一般地，取$\alpha=0.5\%$，1%，2%，2.5%，5%，10%等）。那末在H_0为眞的情况下，$\{|U|\geqslant t_\alpha\}$为一个小概率事件。小概率事件在一次观察之下是基本上不出现的。由此，我们建立如下的准则：取定α，由查表的方法获得满足(4.2)式之t_α．在获得子样$(\Delta L_1,\cdots,\Delta L_n)$的表现值之后，计算

$$U=\frac{\sqrt{n}\ \overline{\Delta L}}{\sigma},$$

则 i) 如果所算得的U满足$|U|\geqslant t_\alpha$，那末表示小概率事件在一次观察中就出现了。我们认为这是反常现象。于是拒绝H_0这个假设。它表示了$|\overline{\Delta L}|$的大小已超出了落点的随机性所容许的偏差。

ii) 如果$|U|<t_\alpha$，那末沒有足够理由认为H_0是不正确的，至少在沒有获得进一步的资料之前，我们认为H_0是应该被采纳的假设。

这种方法是一种最常用的检验方法。可以看出，找一个合适的统计量(如例中的U)是重要的步驟。给出统计量的分布是关鍵，给出了分布才能进行概率计算。在上例中，我们是已知了σ。如果在检验之前，連σ也是一无所知。那末构成检验方案就要复杂一些了（我们将在以后讨论）。

此外，拒绝了H_0并不一定说明H_0这个假设是不正确的。如上例中，毕竟有α的可能性在一次观察中使$|U|\geqslant t_\alpha$成立；同样地，采纳了H_0并不说明H_0这个假设一定是正确的。因此，作统计假设的检验是冒了一定"风险"的。这些情况，我们将作进一步讨论。

还应指出，上述检验方法是在做了n次试验之后进行的，也就是说，在试验过程中不管出现了什么现象，都是不予考虑的。事实上，对于导弹试验来说，每次试验结果，