

权威 实用 经典



2015年

# 考研数学

## 最新精选600题(理工类)

主编 / 黄先开 曹显兵

- ✓ 权威名家精选配套习题，复习全程使用
- ✓ 全书分三部分，精编精选典型习题，难度适中，数量适当
- ✓ 解答详细精准，循序渐进，提供多种解法



**2015**年

# 考研数学

最新精选600题 (理工类)

主 编 黄先开 曹显兵

副主编 李晋明 刘喜波

中国人民大学出版社

· 北京 ·

图书在版编目 (CIP) 数据

2015 年考研数学最新精选 600 题: 理工类/黄先开, 曹显兵主编. —北京: 中国人民大学出版社, 2014. 2  
ISBN 978-7-300-18982-6

I. ①2… II. ①黄… ②曹… III. ①高等数学-研究生-入学考试-习题集 IV. ①O13-44

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2014) 第 033694 号

2015 年考研数学最新精选 600 题 (理工类)

主 编 黄先开 曹显兵  
2015 Nian Kaoyan Shuxue Zuixin Jingxuan 600 Ti (Ligonglei)

|      |                                 |      |                     |
|------|---------------------------------|------|---------------------|
| 出版发行 | 中国人民大学出版社                       |      |                     |
| 社 址  | 北京中关村大街 31 号                    | 邮政编码 | 100080              |
| 电 话  | 010-62511242 (总编室)              |      | 010-62511770 (质管部)  |
|      | 010-82501766 (邮购部)              |      | 010-62514148 (门市部)  |
|      | 010-62515195 (发行公司)             |      | 010-62515275 (盗版举报) |
| 网 址  | http://www.crup.com.cn          |      |                     |
|      | http://www.lkao.com.cn(中国 1 考网) |      |                     |
| 经 销  | 新华书店                            |      |                     |
| 印 刷  | 北京市鑫霸印务有限公司                     |      |                     |
| 规 格  | 185 mm×260 mm 16 开本             | 版 次  | 2014 年 3 月第 1 版     |
| 印 张  | 24.5                            | 印 次  | 2014 年 3 月第 1 次印刷   |
| 字 数  | 564 000                         | 定 价  | 46.00 元             |

# 前言

要想学好数学，必须做一定数量的习题。做习题可以帮助考生正确地理解和牢固地掌握有关的概念、定理、公式与解题方法。只有通过做习题，才能发现自己的问题所在，才能更好地、真正地理解和掌握有关知识与解题方法，才能把书本上的东西转化为自己头脑里的东西。因此，很多经过第一轮复习（主要指对教材的复习）和第二轮复习（主要指有针对性地用考研复习参考书的复习，如《考研数学高分复习全书》）的同学，都会问在哪儿可找到好的习题做进一步的练习？根据我们考研辅导的体会，在辅导班上也经常有一些很好的典型例题因时间关系而不能讲授，但这些题在复习中又是绝对应该掌握的。因此根据广大考生的现实需要，也是为了对我们课堂讲授做一个重要补充，作者在查阅大量相关辅导资料的基础上经过反复比较、筛选和重新编制，最后汇编成这本习题精选，相信能较好地满足广大考生第三轮复习的需要。

研究生入学考试是一种具有选拔性的水平考试，除了考查考生对数学的基本概念、基本理论和基本方法的掌握情况外，更注重考查考生的抽象思维能力、逻辑推理能力、空间想象能力和综合运用所学知识分析和解决问题的能力。本书偏重于能力训练，特别适合于有一定基础的考生作为进一步提高之用。需要提醒考生注意的是，在考研数学复习的过程中，个别考生眼高手低，没养成良好的做题习惯，在没有经过深入思考的情况下就匆忙翻看解答，这样是很难取得理想成绩的。特别是本书精选习题涉及知识点多、题型新颖、难度较高、综合性强，往往需要灵活运用所学知识才能作答。因此希望考生在做题时，如果遇到困难，千万不要急于看解答，一定要多思考。要注意，这正是搞清概念、弄清原理、熟悉方法、培养思维能力的重要训练过程。只有这样才能真正全面系统地掌握所学知识，才能真正提高应试水平，才能真正取得好成绩。

值得提出的是，本书作者基础理论扎实，研究水平较高，具有丰富的考研辅导经验，所编选习题代表了考研数学未来命题的趋势，相信本书是一本具有重要参考价值的复习用书。由于成书比较仓促，书中难免有错误和疏漏之处，恳请大家批评指正。

编者

2014年1月于北京

# 目 录

|                         |     |                                        |     |
|-------------------------|-----|----------------------------------------|-----|
| 第一部分 高等数学 .....         | 1   | 第八章 多元函数积分学——重积分 .....                 | 121 |
| 第一章 函数、极限与连续 .....      | 3   | 精选习题 .....                             | 121 |
| 精选习题 .....              | 3   | 分析解答 .....                             | 124 |
| 分析解答 .....              | 6   | * 第九章 多元函数积分学——曲线、<br>曲面积分及其场论初步 ..... | 143 |
| 第二章 导数与微分 .....         | 23  | 精选习题 .....                             | 143 |
| 精选习题 .....              | 23  | 分析解答 .....                             | 147 |
| 分析解答 .....              | 25  | * 第十章 无穷级数 .....                       | 170 |
| 第三章 中值定理 .....          | 40  | 精选习题 .....                             | 170 |
| 精选习题 .....              | 40  | 分析解答 .....                             | 173 |
| 分析解答 .....              | 42  | 第十一章 常微分方程 .....                       | 188 |
| 第四章 一元函数积分学 .....       | 56  | 精选习题 .....                             | 188 |
| 精选习题 .....              | 56  | 分析解答 .....                             | 191 |
| 分析解答 .....              | 59  | 第二部分 线性代数 .....                        | 209 |
| 第五章 一元函数微积分的应用 .....    | 78  | 精选习题 .....                             | 211 |
| 精选习题 .....              | 78  | 分析解答 .....                             | 232 |
| 分析解答 .....              | 81  | * 第三部分 概率论与数理统计 .....                  | 305 |
| * 第六章 向量代数和空间解析几何 ..... | 96  | 精选习题 .....                             | 307 |
| 精选习题 .....              | 96  | 分析解答 .....                             | 323 |
| 分析解答 .....              | 97  |                                        |     |
| 第七章 多元函数微分学 .....       | 106 |                                        |     |
| 精选习题 .....              | 106 |                                        |     |
| 分析解答 .....              | 108 |                                        |     |

## 第一部分

# PART ONE

# 高等数学



## 函数、极限与连续

## 精选习题

## 一 填空题

1. 设  $f(x) = \begin{cases} 1-x, & x \leq 0 \\ 1+x^2, & x > 0 \end{cases}$ ,  $g(x) = \begin{cases} x^2, & x < 0 \\ -x^3, & x \geq 0 \end{cases}$ , 则  $\lim_{x \rightarrow 0} f[g(x)] = \underline{\hspace{2cm}}$ .

2. 若  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x + xf(x)}{x^3} = 0$ , 则  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3+f(x)}{x^2} = \underline{\hspace{2cm}}$ .

3.  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{9x^2 + 2x + 1} + x + 2}{\sqrt{x^2 + \cos x}} = \underline{\hspace{2cm}}$ .

4. 设  $[x]$  表示  $x$  的最大整数部分, 则  $\lim_{x \rightarrow 0} \left[ \frac{3}{x} \right] = \underline{\hspace{2cm}}$ .

5. 设  $f(x)$  连续, 且当  $x \rightarrow 0$  时,  $F(x) = \int_0^x (x^2 + 1 - \cos t) f(t) dt$  是与  $x^3$  等价的无穷小量, 则  $f(0) = \underline{\hspace{2cm}}$ .

## 二 选择题

1. 当  $x \rightarrow 0$  时, 下列无穷小量中阶数最高的是( ).

(A)  $\sqrt{1+x^2} - \sqrt{1-x^2}$

(B)  $3x^3 - 4x^4 + 5x^5$

(C)  $e^{x^2} - \cos x$

(D)  $\int_0^{1-\cos x} \frac{\sin t^2}{t} dt$

2. 设  $f(x)$  和  $g(x)$  在  $(-\infty, +\infty)$  内可导, 且  $f(x) < g(x)$ , 则必有( ).

(A)  $f(-x) > g(-x)$

(B)  $f'(x) < g'(x)$

(C)  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) < \lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$

(D)  $\int_0^x f(t) dt < \int_0^x g(t) dt$

3. 设  $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2x^n - 3x^{-n}}{x^n + x^{-n}} \sin \frac{1}{x}$ , 则  $f(x)$  有( ).

(A) 两个第一类间断点

(B) 三个第一类间断点

(C) 两个第一类间断点和一个第二类间断点

(D) 一个第一类间断点和一个第二类间断点

4. 下列函数:①  $\frac{\sin x}{x^2}$ ;②  $\frac{x^2-1}{x-1}e^{\frac{1}{1-x}}$ ;③  $\arctan \frac{|x|}{x \ln(1-x)}$ . 在  $(0,1)$  内有界的有

( ) 个.

(A) 0

(B) 1

(C) 2

(D) 3

5. 设  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{(x-a)^4} = -2$ , 则  $f(x)$  在  $x=a$  处( ).

(A) 不可导

(B) 可导且  $f'(a) \neq 0$

(C) 有极大值

(D) 有极小值

### 三 解答题

1. 讨论函数  $f(x) = xe^{-x^2} \int_0^x e^{t^2} dt$  在  $(-\infty, +\infty)$  上的有界性.

2. 设  $f(x)$  在  $(-\infty, +\infty)$  内连续, 以  $T$  为周期, 令  $F(x) = \int_0^x f(t) dt$ . 求证:

(1)  $F(x) = kx + \varphi(x)$ , 其中  $k$  为某常数,  $\varphi(x)$  是以  $T$  为周期的周期函数.

(2)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} \int_0^x f(t) dt = \frac{1}{T} \int_0^T f(x) dx$ .

3. 设  $f(x)$  具有连续导数, 且满足  $f(x) = x + \int_0^x t f'(x-t) dt$ . 求极限  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$ .

4. 求极限  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^{\sin^2 x} \ln(1+t) dt}{\sqrt{1+x^4} - 1}$ .

5. 求极限  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^x - (\sin x)^x}{x^2 \arctan x}$ .

6. 已知曲线  $y = f(x)$  在  $x=1$  处的切线方程为  $y = x - 1$ , 求极限

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2 \ln \cos x} \int_0^{x^2} e^t f(1 + e^{x^2} - e^t) dt$ .

7. 设  $f(x) = nx(1-x)^n (n=1, 2, \dots)$ ,  $M_n$  是  $f(x)$  在  $[0, 1]$  上的最大值, 求极限  $\lim_{n \rightarrow \infty} M_n$ .

8. 求极限  $\lim_{x \rightarrow 0} \left[ \frac{2 + e^{\frac{1}{x}}}{1 + e^{\frac{2}{x}}} + \frac{|\sin x|}{\ln(1+x)} \right]$ .

9. 求极限  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(xe^{2x}) - \cos(xe^{-2x})}{x^3}$ .

10. 求极限  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( x^3 \ln \frac{x+1}{x-1} - 2x^2 \right)$ .

11. 设  $f(x)$  在  $x=a$  的某邻域内可导, 且  $f(a) \neq 0, a \neq 0$ , 求极限

$\lim_{x \rightarrow a} \left[ \frac{1}{(x-a)f(a)} - \frac{1}{\int_a^x f(t) dt} + \frac{1}{2x-a} \right]$ .

12. 求极限  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( n \tan \frac{1}{n} \right)^{n^2}$ .

13. 设  $1 \leq x < +\infty$  时,  $0 < f'(x) < \frac{1}{x^2}$ , 且  $f'(x)$  连续, 证明: 极限  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(n)$  存在.

14. 设  $x_1 = 10, x_{n+1} = \sqrt{6 + x_n} (n = 1, 2, \dots)$ , 证明: 极限  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$  存在, 并求此极限值.

15. 求极限  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{k}{n^2 + k^2 + 1}$  (用定积分求极限).

16. 求极限  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^n \cdot n!}{n^n}$ .

17. 设  $f(x)$  是满足  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{1 - \cos x} = -1$  的连续函数, 且当  $x \rightarrow 0$  时,  $\int_0^x f(t) dt$  是与  $x^n$  同阶的无穷小量, 求正整数  $n$ .

18. 设  $f(x)$  具有连续的二阶导数, 且  $\lim_{x \rightarrow 0} \left[ 1 + x + \frac{f(x)}{x} \right]^{\frac{1}{x}} = e^3$ . 求极限  $\lim_{x \rightarrow 0} \left[ 1 + \frac{f(x)}{x} \right]^{\frac{1}{x}}$ .

19. 求极限  $\lim_{n \rightarrow \infty} n^2 \left( \arctan \frac{1}{n} - \arctan \frac{1}{n+1} \right)$ .

20. 求极限  $\lim_{x \rightarrow 1^-} (1-x)^3 \sum_{n=1}^{\infty} n^2 x^n$ .

21. 设  $f(x)$  在  $x=0$  的某邻域内二阶可导, 且  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = 0, f''(0) \neq 0$ ,

$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\int_0^x f(t) dt}{x^\alpha - \sin x} = \beta (\beta \neq 0)$ , 求  $\alpha, \beta$  (其中  $\beta \neq 0$ ).

22. 设  $f(x)$  在  $(-a, a)$  内连续, 在  $x=0$  处可导, 且  $f'(0) \neq 0$ .

(1) 求证: 对任给的  $0 < x < a$ , 存在  $0 < \theta < 1$ , 使  $\int_0^x f(t) dt + \int_0^{-x} f(t) dt = x[f(\theta x) - f(-\theta x)]$ .

(2) 求极限  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \theta$ .

23. 已知抛物线  $y = px^2 (p > 0)$ .

(1) 计算抛物线在直线  $y = 1$  下方的弧长  $l$ .

(2) 求极限  $\lim_{p \rightarrow \infty} l$ .

24. 设  $f(1) = 0, f'(1) = a$ , 求极限  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 + 2f(e^{x^2})} - \sqrt{1 + f(1 + \sin^2 x)}}{\ln \cos x}$ .

25. 设  $g(x)$  是微分方程  $g'(x) + g(x) \sin x = \cos x$  满足条件  $g(0) = 0$  的解, 求极限  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{g(x)}{x}$ .

26. 设  $g(x)$  在  $x=0$  的某邻域内连续, 且  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{g(x) - 1}{x} = a$ ,

$$\text{已知 } f(x) = \begin{cases} \frac{\int_0^1 g(x^2 t) dt - 1}{x^2}, & x < 0 \\ \frac{1}{2}, & x = 0 \\ \frac{a + b \cos x}{x^2}, & x > 0 \end{cases} \text{ 在 } x = 0 \text{ 处连续, 求 } a, b.$$

$$27. \text{ 设 } f(x) = \begin{cases} (x+2) \arctan \frac{1}{x^2-4}, & x \neq \pm 2 \\ 0, & x = \pm 2 \end{cases}, \text{ 讨论函数 } f(x) \text{ 的连续性, 若有间断点,}$$

指明其类型.

## 分析解答

### 一 填空题

1. 应填 1.

$$\text{解 } f[g(x)] = \begin{cases} 1 - g(x), & g(x) \leq 0 \\ 1 + g^2(x), & g(x) > 0 \end{cases},$$

$$\text{而 } g(x) \leq 0 \Leftrightarrow x \geq 0, \quad g(x) > 0 \Leftrightarrow x < 0,$$

$$\text{所以 } f[g(x)] = \begin{cases} 1 + x^4, & x < 0 \\ 1 + x^3, & x \geq 0 \end{cases},$$

$$\text{又因为 } \lim_{x \rightarrow 0^-} f[g(x)] = \lim_{x \rightarrow 0^-} (1 + x^4) = 1,$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f[g(x)] = \lim_{x \rightarrow 0^+} (1 + x^3) = 1.$$

$$\text{因此 } \lim_{x \rightarrow 0} f[g(x)] = 1.$$

评注: 此题可不必求出  $f[g(x)]$ .

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f[g(x)] = \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x^2) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (1 + x^4) = 1,$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f[g(x)] = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(-x^3) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (1 + x^3) = 1.$$

$$\text{因此 } \lim_{x \rightarrow 0} f[g(x)] = 1.$$

2. 应填  $\frac{9}{2}$ .

$$\begin{aligned} \text{解 } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3 + f(x)}{x^2} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x + xf(x)}{x^3} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x + xf(x)}{x^3} + \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x - \sin 3x}{x^3} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3 - 3\cos 3x}{3x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 3x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3\sin 3x}{2x} = \frac{9}{2}. \end{aligned}$$

3. 应填 2.

解 分子分母同除以  $x$ , 须注意  $x$  为负.

$$\text{原式} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-\sqrt{9 + \frac{2}{x} + \frac{1}{x^2}} + 1 + \frac{2}{x}}{-\sqrt{1 + \frac{\cos x}{x^2}}} = \frac{-3+1}{-1} = 2.$$

评注:应注意  $x$  的符号,若改为  $x \rightarrow \infty$ ,则此极限不存在.

4. 应填 3.

解 因为  $\frac{3}{x} - 1 < \left[\frac{3}{x}\right] \leq \frac{3}{x}$ ,

当  $x > 0$  时,  $3 - x < x\left[\frac{3}{x}\right] \leq 3$ ,

当  $x < 0$  时,  $3 \leq x\left[\frac{3}{x}\right] < 3 - x$ .

由夹逼准则,有  $\lim_{x \rightarrow 0^+} x\left[\frac{3}{x}\right] = \lim_{x \rightarrow 0^-} x\left[\frac{3}{x}\right] = 3$ .

所以,  $\lim_{x \rightarrow 0} x\left[\frac{3}{x}\right] = 3$ .

评注:利用夹逼定理求极限是一种重要的方法,关键是找出两个特殊的函数(或数列).

5. 应填  $\frac{6}{7}$ .

解 由等价无穷小量的定义及洛必塔法则,可得

$$\begin{aligned} 1 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{F(x)}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^3} \left[ x^2 \int_0^x f(t) dt + \int_0^x (1 - \cos t) f(t) dt \right] \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{3x^2} \left[ 2x \int_0^x f(t) dt + (x^2 + 1 - \cos x) f(x) \right] \\ &= \frac{2}{3} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x f(t) dt}{x} + \frac{1}{3} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 + 1 - \cos x}{x^2} f(x) \\ &= \frac{2}{3} \lim_{x \rightarrow 0} f(x) + \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{2} \cdot f(0) \\ &= \frac{7}{6} f(0). \end{aligned}$$

所以,  $f(0) = \frac{6}{7}$ .

评注:含参数的变限积分,不能直接求导,必须经变量替换将参变量提至积分号外再求导.

## 二 选择题

1. 应选(D).

解 当  $x \rightarrow 0$  时

$$\sqrt{1+x^2} - \sqrt{1-x^2} = \frac{2x^2}{\sqrt{1+x^2} + \sqrt{1-x^2}} \sim x^2,$$

$$3x^3 - 4x^4 + 5x^5 = x^3(3 - 4x + 5x^2) \sim 3x^3,$$

$$e^{x^2} - \cos x = 1 + x^2 + \theta(x^2) - \left[ 1 - \frac{1}{2}x^2 + \theta(x^2) \right] = \frac{3}{2}x^2 + \theta(x^2) \sim \frac{3}{2}x^2$$

$\int_0^{1-\cos x} \frac{\sin t^2}{t} dt$  由  $\int_0^u \frac{\sin t^2}{t} dt$  与  $u = 1 - \cos x$  复合而成. 当  $x \rightarrow 0$  时,  $\frac{\sin x^2}{x} \sim x$ ,  $\int_0^x \frac{\sin t^2}{t} dt$  与  $x^2$  同阶,  $1 - \cos x \sim \frac{1}{2}x^2$ . 所以, 当  $x \rightarrow 0$  时,  $\int_0^{1-\cos x} \frac{\sin t^2}{t} dt$  是  $x$  的  $2 \times 2 = 4$  阶无穷小. 故选(D).

2. 应选(C).

**解** 由  $f(x)$ 、 $g(x)$  可导知,  $f(x)$ 、 $g(x)$  连续. 于是有:  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$ ,  $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = g(x_0)$ .

又  $f(x_0) < g(x_0)$ , 所以有  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) < \lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$ . 故选(C).

**评注:** 本题也可用排除法. 取  $f(x) = x$ ,  $g(x) = x + 1$ , 则  $f(x) < g(x)$ ,  $x \in (-\infty, +\infty)$ . 但(A), (B), (D) 不成立, 故选(C).

3. 应选(C).

**解** 注意到当  $|x| < 1$  时,  $\lim_{n \rightarrow \infty} x^n = 0$ , 当  $|x| > 1$  时,  $\lim_{n \rightarrow \infty} x^n = \infty$ , 易求得

$$f(x) = \begin{cases} -3\sin \frac{1}{x}, & 0 < |x| < 1 \\ -\frac{1}{2}\sin \frac{1}{x}, & |x| = 1 \\ 2\sin \frac{1}{x}, & |x| > 1 \end{cases},$$

可见,  $x = -1$  和  $x = 1$  都是  $f(x)$  的第一类间断点, 而  $x = 0$  是  $f(x)$  的第二类间断点, 故选(C).

**评注:** 函数  $f(x)$  的间断点  $x_0$  分为两类:  $f(x)$  在  $x_0$  的左、右极限存在的间断点称为第一类间断点, 其中左、右极限相等的间断点称为可去间断点.  $f(x)$  在  $x_0$  的左、右极限至少有一个不存在的间断点称为第二类间断点.

4. 应选(B).

**解**  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin x}{x^2} = +\infty$ ,  $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^2 - 1}{x - 1} e^{\frac{1}{1-x}} = \lim_{x \rightarrow 1^-} (x + 1) e^{\frac{1}{1-x}} = +\infty$ ,

而  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \arctan \frac{|x|}{x \ln(1-x)} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \arctan \frac{1}{\ln(1-x)} = -\frac{\pi}{2}$ ,

$\lim_{x \rightarrow 1^-} \arctan \frac{|x|}{x \ln(1-x)} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \arctan \frac{1}{\ln(1-x)} = 0$ .

所以, 只有函数  $\arctan \frac{|x|}{x \ln(1-x)}$  在  $(0, 1)$  内有界. 故选(B).

**评注:** 判断函数的有界性除了用定义及已知函数的有界性外, 下列结论也是很有用的: 设  $f(x)$  在开区间  $(a, b)$  内连续, 若  $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$  及  $\lim_{x \rightarrow b^-} f(x)$  存在, 则  $f(x)$  在  $(a, b)$  内有界.

5. 应选(C).

**解** 由局部保号性定理, 存在  $a$  的去心邻域  $\dot{U}(a)$ , 使得

当  $x \in \dot{U}(a)$  时,  $\frac{f(x) - f(a)}{(x-a)^4} < 0$ , 即  $f(x) < f(a)$ ,

而由  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x-a} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{(x-a)^4} (x-a)^3 = (-2) \times 0 = 0$ ,

知  $f(x)$  在  $x = a$  处可导, 当然在  $x = a$  处连续.

所以,  $f(x)$  在  $x=a$  处有极大值. 故选(C).

评注: 注意极限表达式中隐含的连续、可导等条件及结论.

### 三 解答题

1. 分析 因为  $f(x)$  为偶函数, 所以只需证明  $f(x)$  在  $[0, +\infty)$  上有界. 要证  $f(x)$  在  $[0, +\infty)$  上有界, 只要证明  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$  存在.

解 由  $f(-x) = (-x)e^{-x^2} \int_0^{-x} e^{t^2} dt$  及  $\int_0^{-x} e^{t^2} dt \xrightarrow{t=-u} -\int_0^x e^{u^2} du = -\int_0^x e^{t^2} dt$  可知:  
 $f(-x) = f(x)$ .

所以,  $f(x)$  是偶函数. 只需证明  $f(x)$  在  $[0, +\infty)$  上有界.

又

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x e^{-x^2} \int_0^x e^{t^2} dt = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\int_0^x e^{t^2} dt}{\frac{1}{x} e^{x^2}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{x^2}}{2e^{x^2} - \frac{1}{x^2} e^{x^2}} = \frac{1}{2}.$$

于是, 对于  $\varepsilon = \frac{1}{2}$ , 存在  $A > 0$ , 当  $x > A$  时, 有

$$\left| f(x) - \frac{1}{2} \right| < \frac{1}{2},$$

即当  $x > A$  时, 有  $0 < f(x) < 1$ .

因为  $f(x)$  在  $[0, A]$  上连续, 因此,  $f(x)$  在  $[0, A]$  上有界, 注意到在  $[0, +\infty)$  上  $f(x) \geq 0$ . 故,  $\exists M_1 > 0$ , 使得  $\forall x \in [0, A]$ , 有  $0 \leq f(x) \leq M_1$ . 取  $M = \max\{1, M_1\}$ , 则对  $\forall x \in [0, +\infty)$ , 有  $0 \leq f(x) \leq M$ . 从而可知, 对  $\forall x \in (-\infty, +\infty)$ , 有  $0 \leq f(x) \leq M$ .

评注:

(1) 要判断函数  $f(x)$  在  $(-\infty, +\infty)$  上的有界性, 需考察  $f(x)$  在间断点  $x_0$  及在无穷远点的极限. 若  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$  存在, 则  $f(x)$  在  $x_0$  附近有界, 若  $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x)$  存在, 则  $f(x)$  在  $x_0$  的左邻域内有界, 若  $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x)$  存在, 则  $f(x)$  在  $x_0$  的右邻域内有界. 若  $f(x)$  在  $(a, b)$  内连续, 又  $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x), \lim_{x \rightarrow b^-} f(x)$  均存在, 则  $f(x)$  在  $(a, b)$  内有界.

在闭区间上连续函数一定有界, 但在开区间上不连续的函数也可能有界. 例如:

$$f(x) = \begin{cases} x, & x > 0 \\ 1, & x = 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}$$

$f(x)$  在  $x=0$  处不连续, 但  $f(x)$  在  $(-1, 1)$  内有界.

(2) 在本题的证明中取  $\varepsilon = \frac{1}{2}$  (或取其他一个确定的正数) 是非常必要的. 如果用 “ $\forall \varepsilon > 0, \exists A > 0$ , 当  $x > A$  时, 有  $|f(x) - \frac{1}{2}| < \varepsilon$ ” 来证明  $f(x)$  在  $[A, +\infty)$  上有界就是错误的, 因为此时的“界”不确定.

(3) 用变量替换可证明  $f(x)$  与其原函数  $\int_0^x f(t) dt$  的奇偶性有着密切的联系:

若  $f(x)$  连续, 则

1)  $\int_0^x f(t) dt$  为奇(偶) 函数  $\Leftrightarrow f(x)$  为偶(奇) 函数.

2)  $\forall a \in \mathbf{R}, \int_a^x f(t) dt$  为偶函数  $\Leftrightarrow f(x)$  为奇函数.

2. 分析 只要确定常数  $k$ , 使得  $\varphi(x) = F(x) - kx$  以  $T$  为周期.

解 (1) 由  $\varphi(x+T) = F(x+T) - k(x+T)$

$$\begin{aligned} &= \int_0^x f(t) dt - kx + \int_x^{x+T} f(t) dt - kT \\ &= \varphi(x) + \int_0^T f(t) dt - kT \quad \left( \int_x^{x+T} f(t) dt = \int_0^T f(t) dt \right) \end{aligned}$$

令  $k = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) dt$ , 则  $\varphi(x) = F(x) - kx$  是以  $T$  为周期的周期函数. 从而有  $F(x) = kx + \varphi(x)$ .

(2) 因为  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\left( \int_0^x f(t) dt \right)'}{(x)'} = \lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$  不一定存在, 所以不能用洛必塔法则求该极限.

但  $\int_0^x f(t) dt$  可写成:

$$\int_0^x f(t) dt = \frac{x}{T} \int_0^T f(t) dt + \varphi(x),$$

$\varphi(x)$  在  $(-\infty, +\infty)$  连续且以  $T$  为周期. 于是  $\varphi(x)$  在  $[0, T]$  上有界, 在  $(-\infty, +\infty)$  上有界, 所以,

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} \int_0^x f(t) dt &= \frac{1}{T} \int_0^T f(t) dt + \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\varphi(x)}{x} \\ &= \frac{1}{T} \int_0^T f(t) dt. \quad (\text{无穷小量与有界变量的乘积仍为无穷小量}) \end{aligned}$$

评注:

(1) 设  $f(x)$  是以  $T$  为周期的连续函数, 则有如下结论:

1)  $f(x)$  的原函数  $\int_a^x f(t) dt$  是以  $T$  为周期的函数的充分必要条件是  $\int_0^T f(t) dt = 0$ .

2)  $\forall a \in \mathbf{R}, \int_a^{a+T} f(x) dx = \int_0^T f(x) dx$ .

3)  $\int_0^{nT} f(x) dx = n \int_0^T f(x) dx$ .

(2) 对“ $\frac{0}{0}$ ”和“ $\frac{\infty}{\infty}$ ”型极限, 当  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}$  存在或为无穷大量时, 可由洛必塔法则得知

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

但当  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}$  不存在且不为无穷大量时, 不能断定  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)}$  不存在.

3. 分析  $f(x)$  的表达式中含有参变量的积分, 应经变量替换将参变量移至积分号外或积分限上, 再求极限.

$$\int_0^x t f'(x-t) dt \stackrel{x-t=u}{=} \int_0^x (x-u) f'(u) du$$

$$= x \int_0^x f'(u) du - \int_0^x u f'(u) du.$$

将参变量  $x$  提到积分号外后, 已知条件可化为:

$$f(x) = x + x \int_0^x f'(u) du - \int_0^x u f'(u) du.$$

解 由已知条件  $f(x) = x + \int_0^x t f'(x-t) dt$  可化为

$$f(x) = x + x \int_0^x f'(u) du - \int_0^x u f'(u) du.$$

两边对  $x$  求导, 得:

$$\begin{aligned} f'(x) &= 1 + \int_0^x f'(u) du + x f'(x) - x f'(x) \\ &= 1 + f(x) - f(0) \\ &= 1 + f(x) \quad (f(0) = 0). \end{aligned}$$

于是,  $f(x) = e^x - 1$ . 所以  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (e^x - 1) = -1$ .

评注:

(1) 本题的关键是求出  $f(x)$  的表达式. 当已知条件是由积分方程给出时, 通过求导可得出  $f(x)$  所满足的微分方程:

$$f'(x) - f(x) = 1, \quad f(0) = 0.$$

由通解公式, 可得通解为:

$$f(x) = e^{\int (-1) dx} \left[ \int 1 \cdot e^{\int (-1) dx} dx + c \right] = ce^x - 1.$$

由  $f(0) = 0$ , 得  $f(x) = e^x - 1$ .

一般地, 一阶线性微分方程  $y' + p(x)y = q(x)$  的通解为:

$$y = e^{-\int p(x) dx} \left[ \int q(x) e^{\int p(x) dx} dx + c \right].$$

(2) 在计算含参变量的积分时, 应通过变量替换将参变量提至积分号外或积分限上, 再作计算.

4. 分析 是“ $\frac{0}{0}$ ”型, 用洛必塔法则, 且当  $x \rightarrow 0$  时,  $\sqrt{1+x^4} - 1 \sim \frac{1}{2}x^4$ ,  $\ln(1+x) \sim x$ ,  $\sin^2 x \sim x^2$ .

$$\begin{aligned} \text{解 原式} &= 2 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^{\sin^2 x} \ln(1+t) dt}{x^4} \\ &= 2 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+\sin^2 x) \cdot 2 \sin x \cos x}{4x^3} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+\sin^2 x)}{x^2} \cdot \frac{\sin x}{x} \\ &= 1. \end{aligned}$$

5. 分析 当  $x \rightarrow 0^+$  时,  $x^x = e^{x \ln x} \rightarrow 1$ ,  $\arctan x \sim x$ ,  $1 - \cos x \sim \frac{1}{2}x^2$ ,  $\left(\frac{\sin x}{x}\right)^x - 1 \rightarrow 0$ .

$$\text{解 原式} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-x^x \left[ \left(\frac{\sin x}{x}\right)^x - 1 \right]}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-x \ln \left(\frac{\sin x}{x}\right)}{x^3}$$

$$\begin{aligned}
 &= -\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln\left[\left(\frac{\sin x}{x} - 1\right) + 1\right]}{x^2} = -\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{\sin x}{x} - 1}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x - \sin x}{x^3} \\
 &= \frac{1}{6}.
 \end{aligned}$$

**评注:**洛必塔法则是求“ $\frac{0}{0}$ ”和“ $\frac{\infty}{\infty}$ ”型未定式的重要工具,为了避免复杂的计算,减少错误,在使用该工具之前,应尽可能综合运用四则运算、连续性、恒等变形、等价无穷小替换和变量代换等方法进行简化.

在本题中我们分离出极限为 1 的因子  $x^x$ ,使函数中“ $\frac{0}{0}$ ”型未定式部分  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\left(\frac{\sin x}{x}\right)^x - 1}{x^3}$  更为突出,并利用恒等变形,简化了后面的计算. 否则,如果直接用洛必塔法则,就会很麻烦.

6. 分析 由已知,  $f(1) = 0, f'(1) = 1$ , 有  $\lim_{u \rightarrow 1} \frac{f(u)}{u-1} = 1$ .

当  $x \rightarrow 0$  时,  $\ln \cos x = \ln[1 + (\cos x - 1)] \sim \cos x - 1 \sim -\frac{1}{2}x^2$ .

令  $1 + e^{x^2} - e^t = u$ ,  $\int_0^{x^2} e^t f(1 + e^{x^2} - e^t) dt = \int_1^{e^{x^2}} f(u) du$ .

$$\begin{aligned}
 \text{解 原式} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_1^{e^{x^2}} f(u) du}{x^2 \cdot \left(-\frac{1}{2}x^2\right)} = -2 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_1^{e^{x^2}} f(u) du}{x^4} \\
 &= -2 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(e^{x^2}) \cdot e^{x^2} \cdot 2x}{4x^3} = -\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(e^{x^2})}{x^2} \\
 &= -\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(e^{x^2})}{e^{x^2} - 1} \cdot \frac{e^{x^2} - 1}{x^2} = -f'(1) \\
 &= -1.
 \end{aligned}$$

**评注:**在求极限时要注意重要条件的应用. 例如:

(1)  $f(x_0) = 0, f'(x_0) = A \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{x - x_0} = A$  ( $f(x)$  在  $x_0$  连续).

(2) 若  $f'(x_0)$  存在, 且  $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} h(x) = x_0$ , 则

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f[g(x)] - f[h(x)]}{x - x_0} = f'(x_0) \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{g(x) - h(x)}{x - x_0}.$$

7. 分析 先求  $f(x)$  在  $[0, 1]$  上的最大值  $M_n$ , 再求极限.

**解**  $f'(x) = n(1-x)^n - n^2x(1-x)^{n-1}$ .

令  $f'(x) = 0$ , 得  $n^2x(1-x)^{n-1} = n(1-x)^n$ , 即  $nx = 1-x$ . 于是得驻点  $x = \frac{1}{n+1}$ .

又  $f''\left(\frac{1}{n+1}\right) < 0$ , 所以  $M_n = f\left(\frac{1}{n+1}\right) = \frac{n}{n+1} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right)^n$  为  $f(x)$  在  $(0, 1)$  内的极大值.

比较  $f(0) = 0, f(1) = 0$  和  $M_n$  可知,  $f(x)$  在  $[0, 1]$  上的最大值为  $M_n = f\left(\frac{1}{n+1}\right) =$