普通高等教育"十二五"规划教材

数学分析选讲

（第2版）

郝涌 王娜 王霞 郭淑利◎编著

Mathematical Analysis

(Second Edition)

国防工业出版社
National Defense Industry Press

普通高等教育"十二五"规划教材

数学分析选讲

(第2版)

郝涌　王娜　王霞　郭淑利　编著

国防工业出版社
·北京·

内容简介

本书是作者在长期从事数学分析教学的基础上写成的，也是数学分析基本概念、基本定理及各类问题常用与典型方法的一个总结．书中对数学分析的内容按知识点进行整合，对各个重要知识点进行了系统讲解和辨析，对近些年来一些重点高校的典型考研试题进行了独到的分析和讨论，使得整个数学分析所涉及的知识结构更加清晰．

全书共17讲，每一讲都系统总结了相关知识点，并给出了一系列典型问题和解题方法．读者可从这些方法中加深对数学分析概念的理解，达到开阔思路、提高解题能力的目的．

本书可作为高等院校数学分析选讲课程的教材，也可作为大学理工科学生学习《数学分析》、《高等数学》的辅助教材，更是高校数学专业学生考研的备考用书，同时也可供高校教师及科研人员参考．

图书在版编目(CIP)数据

数学分析选讲／郝涌等编著．—2版．—北京：国防工业出版社，2014.4

ISBN 978-7-118-09419-0

Ⅰ.①数…　Ⅱ.①郝…　Ⅲ.①数学分析－高等学校－教材　Ⅳ.①O17

中国版本图书馆CIP数据核字(2014)第062877号

※

国防工業出版社出版发行

（北京市海淀区紫竹院南路23号　邮政编码100048）

涿中印刷厂印刷

新华书店经售

*

开本 787×1092　1/16　**印张** 17¾　**字数** 437千字

2014年4月第2版第1次印刷　**印数** 1—3000册　**定价** 35.00元

国防书店：(010)88540777　　发行邮购：(010)88540776

发行传真：(010)88540755　　发行业务：(010)88540717

前　言

随着我国高等教育进入大众化阶段，科教兴国战略和人才强国战略的落实，国家对高层次人才的需求越来越迫切，越来越多的本科毕业生选择考研，以实现高层次就业和继续深造的目的. 数学分析和高等数学作为数学专业和多数理工科专业的考研必考科目，迫切需要一本专门用于数学分析和高等数学后继学习或考研辅导的好教材.

我们根据数十年讲授数学分析和数学分析考研辅导课程的经验和体会，编写了《数学分析选讲》这一分析后续课程教材. 它是数学分析基本方法、基本定理、各类问题常用与典型方法的系统总结，许多解题方法和技巧是同类教材中不多见的. 本书在内容安排上，以数学分析中主要知识点和相关典型问题及其解法为主线，而不拘泥于通常的逻辑顺序. 本书的特点主要有以下 6 个方面：

(1) 知识结构的整体性. 它不同于常见的数学分析教材，对知识点按块分类. 如讲数列极限时，把分散在数学分析各个章节中各种类型的极限的求法(如泰勒展式法、定积分法、级数法等)进行归纳、比较，便于发现规律.

(2) 知识结构的联系性. 考虑到数学分析考研题不仅局限于本课程的知识点，还常常涉及其他相关课程的知识，如实变函数、泛函分析、复变函数、微分方程等. 因此在本书中，根据需要对数学分析的相关知识点进行了适当的拓展. 如在讲实数的完备性时，补充了完备距离空间的定义等.

(3) 强调对基本概念的理解和辨析. 例如在讲一元函数极限概念时，总结了 24 种极限类型及其否定(共 48 种)，让学生写出它们的数学定义，同时给出 6 种类型的柯西准则、24 种类型的归结原则等.

(4) 专题性. 在本书中，对许多重要的知识点进行了专题讨论，如凸函数、一致连续性的条件、Legendre 多项式的微积分性质、收敛的广义积分被积函数趋于零的条件等.

(5) 注重解题方法的分析与创新. 例如三重积分的换序问题，给出了一个较简单的方法，学生容易掌握.

(6) 力求简明扼要. 凡是数学分析教材中讲过的一般知识都略去，去粗取精，侧重基本概念分析和解题方法的讨论，试图启发读者思维.

全书共 17 讲，每讲都附有适量的练习题. 作为教材大约可用 72 学时讲完.

本书自 2010 年出版以来，被许多兄弟院校作为《数学分析》后续课程教材. 从读者反馈的情况看，普遍认可了本书的选材、体系以及对数学分析相关内容深层次地开掘，数学分析思想与方法系统分析、应用. 按照高等院校不断深化教学改革的要求，根据读者的反馈与作者本人在教学实践中的体会，对第 1 版作了修订、扩充和完善.

相信通过这门课程的学习，不仅能加深读者对数学概念的理解、对数学知识框架的整体认识，而且可大大提高读者分析问题解决问题的能力. 本书可作为本科院校数学分析和高等数学考研辅导教材，也可以作为理工科专业数学分析、高等数学课程的辅助教材.

本书许多内容和方法是编著者的学习心得和体会. 由于我们水平所限，书中难免有不当或错误之处，恳请读者批评指正.

编　者

目　　录

第一讲　实数与实函数

1.1　实数与实函数的基本概念

一、实数

实数包括有理数和无理数. 有理数,就是能够表示成$\frac{p}{q}$形式的数,其中 p 是整数,q 是不为零的整数. 如果用小数表示,有理数都可以表示成有限小数,或无限循环小数. 无理数,就是不能表示成$\frac{p}{q}$形式的数,也就是无限不循环的小数. 如果将有限小数也表示成无限小数,例如:数 1 可表示为 $1=1.000\cdots$; 也可以表示为 $1=0.999\cdots$(注:这是实无限的观点),为唯一性起见,数学上作了一个约定,就是不以零为循环节. 数 1 约定的表示为 $1=0.999\cdots$,因此,实数就是一个可以用无限小数表示的数.

二、实数的性质

1. 实数集合 R 是一个阿基米德有序域

(1) 在实数集合 $\mathbf{R}$ 上定义加法"+"和乘法"×"两种运算,对两种运算分别满足交换律、结合律,以及乘法关于加法的分配律; 对加法,有"零元"和"负元"; 对乘法有"单位元"和"逆元"; $\mathbf{R}$ 成为一个"域".

(2) 在集合 $\mathbf{R}$ 上定义了一种序关系"<",且满足传递性:即对 $\forall a、b、c\in\mathbf{R}$,若 $a<b,b<c$,则 $a<c$; 三歧性:即对 $\forall a,b\in\mathbf{R}$,关系 $a<b,a=b,a>b$ 三者必居其一,也只居其一. $\mathbf{R}$ 是一个全序集.

(3) $\mathbf{R}$ 中的元素满足阿基米德性:对 $\mathbf{R}$ 中的任意两个正数 a,b,必存在自然数 n,使得$na>b$.

2. 实数集合 R 是一个完备集

定义 1.1(距离空间)　设 X 是一个集合,定义映射 $\rho:X\times X\to\mathbf{R}^+$,满足

(1) 非负性: 对 $\forall x,y\in X,\rho(x,y)\geqslant 0,\rho(x,y)=0\Leftrightarrow x=y$;

(2) 对称性:$\rho(x,y)=\rho(y,x)$;

(3) 三角不等式:$\rho(x,y)\leqslant\rho(x,z)+\rho(z,y)$;

则称 ρ 是点集 X 上的一个距离. 如果 X 是一个线性空间,称(X,ρ)是一个距离空间.

在实数集 $\mathbf{R}$ 上定义距离 $\rho(x,y)=|x-y|$ (可以验证满足定义中的三条),则(R,ρ)是一个距离空间.

定义 1.2　设$\{x_n\}$是距离空间(X,ρ)中的点列,若对 $\forall\varepsilon>0,\exists N>0$,当 $m,n>N$ 时,恒有 $\rho(x_n,x_m)<\varepsilon$,则称$\{x_n\}$是 X 中的柯西列.

定义 1.3　若距离空间 X 中的任意柯西列都在 X 中收敛,则称 X 是完备的距离空间.

由柯西收敛准则很容易知道，作为距离空间的实数集 **R** 是完备的. 有 6 个刻画实数集 **R** 完备性的且彼此等价的定理，它们分别是

(1) 确界原理：设 S 是非空数集. 若 S 有上界，则 S 必有上确界；若 S 有下界，则 S 必有下确界.

(2) 单调有界原理：单调有界点列（函数）必存在极限.

(3) 区间套定理：若 $\{[a_n,b_n]\}$ 是一个区间套，则存在唯一的实数 ξ，使得 $\xi\in[a_n,b_n]$，$n=1,2,\cdots$，即 $a_n\leqslant\xi\leqslant b_n$，$n=1,2,\cdots$.

(4) 有限覆盖定理：设 H 是对闭区间 $[a,b]$ 的一个任意开覆盖，则从 H 中可选出有限个开区间来覆盖 $[a,b]$.

(5) 聚点定理：实轴上的任一有界无限点集 S 至少有一个聚点.

推论（致密性定理）：有界点列必有收敛子列.

(6) 柯西收敛准则：数列 $\{a_n\}$ 收敛的充要条件是数列 $\{a_n\}$ 是柯西列.

关于上述六个定理的等价性证明可参考文献[1].

三、关于实数点集的一些重要概念

1. 有界点集

S 是一实数点集，若 $\exists M>0$ 使对 $\forall x\in S$ 恒有 $|x|\leqslant M$，则称 S 是有界点集.

2. 无界点集

S 是一实数点集，若对 $\forall M>0$，$\exists x\in S$ 使得 $|x|\geqslant M$，则称 S 是无界点集.

3. 有界函数

$f(x)$ 是定义在点集 I 上的函数，若 $\exists M>0$ 使对 $\forall x\in I$ 恒有 $|f(x)|\leqslant M$，则称 $f(x)$ 在 I 上有界.

4. 无界函数

$f(x)$ 是定义在点集 I 上的函数，若对 $\forall M>0$，$\exists x\in I$ 使得 $|f(x)|\geqslant M$，则称 $f(x)$ 在 I 上无界.

例 1.1 证明函数 $f(x)=\dfrac{1}{x}$ 在 $(0,1)$ 上无界.

证明：对 $\forall M>0$，$\exists x_0=\dfrac{1}{M+1}\in(0,1)$ 使得 $f(x_0)=M+1>M$，故 $f(x)=\dfrac{1}{x}$ 在 $(0,1)$ 上无界.

5. 上确界

设 E 为一个实数点集，α 为一是实常数，若满足：① 对 $\forall x\in E$，恒有 $x\leqslant\alpha$（即 α 为 E 的上界）；② 对 $\forall\varepsilon>0$，存在 $x_0\in E$，使得 $x_0>\alpha-\varepsilon$（即 α 是 E 的最小的上界），则称 α 为 E 的上确界，记作 $\alpha=\sup E$.

6. 下确界

设 E 为一个实数点集，β 为一是实常数，若满足：① 对 $\forall x\in E$，恒有 $x\geqslant\beta$（即 β 为 E 的下界）；② 对 $\forall\varepsilon>0$，存在 $x_0\in E$，使得 $x_0<\beta+\varepsilon$（即 β 是 E 的最大的下界），则称 β 为 E 的下确界，记作 $\beta=\inf E$.

注：点集 E 的上确界或下确界可以属于 E，也可以不属于 E.

命题 (1) $\alpha=\sup E$，则 $\alpha\in E\Leftrightarrow\alpha=\max E$.

(2) $\beta=\inf E$，则 $\beta\in E\Leftrightarrow\beta=\min E$.

证明显然，请读者自证.

例 1.2 设 A、B 皆为非空有界集，定义数集

$$A+B=\{z\mid z=x+y, x\in A, y\in B\}$$

证明：(1) $\sup(A+B)=\sup A+\sup B$；

(2) $\inf(A+B)=\inf A+\inf B$.

证明：(1) 由已知，A、B 非空有界，可知 $A+B$ 也是非空有界集. 根据确界原理，它们的上、下确界都存在. 对 $\forall z\in A+B$，由定义，存在 $x\in A$ 及 $y\in B$ 使得

$$z=x+y\leqslant \sup A+\sup B$$

即实数 $\sup A+\sup B$ 是数集 $A+B$ 的上界；又对 $\forall\varepsilon>0$，$\exists x'\in A, y'\in B$，使得

$$x'>\sup A-\frac{\varepsilon}{2}, y'>\sup B-\frac{\varepsilon}{2}\Rightarrow x'+y'>\sup A+\sup B-\varepsilon$$

记 $z'=x'+y'\in A+B$，则 $z'>\sup A+\sup B-\varepsilon$. 由定义可得

$$\sup(A+B)=\sup A+\sup B$$

(2) 证明与(1)类似，从略.

例 1.3 设 f 在区间 I 上有界. 记

$$M=\sup_{x\in I}f(x),\ m=\inf_{x\in I}f(x)$$

证明：$\sup\limits_{x',x''\in I}|f(x')-f(x'')|=M-m$.

证明：对 $\forall x', x''\in I$，有

$$m\leqslant f(x')\leqslant M, m\leqslant f(x'')\leqslant M$$

则

$$|f(x')-f(x'')|\leqslant M-m \tag{$*$}$$

又对 $\forall\varepsilon>0$，$\exists x_1, x_2\in I$，使得

$$f(x_1)>M-\frac{\varepsilon}{2},\ f(x_2)<m+\frac{\varepsilon}{2}$$

可得

$$|f(x_1)-f(x_2)|>(M-m)-\varepsilon \tag{$**$}$$

由式($*$)、式($**$)可知

$$\sup_{x',x''\in I}|f(x')-f(x'')|=M-m$$

7. 聚点

定义 1.4(点集的聚点)：设 E 是一个点集，ξ 是一个点，若在 ξ 的任意邻域内都含有 E 的无穷多个点，则称 ξ 为点集 E 的聚点.

命题 设 E 是一个点集，ξ 是一个点，下列说法等价：

(1) ξ 为点集 E 的聚点.

(2) 在 ξ 的任意邻域内都含有 E 的异于 ξ 的一个点.

(3) 在 E 中存在互异的点列 $\{x_n\}$，使得 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\xi$.

证明：(1)⇒(2). 显然.

(2)$\Rightarrow$(3). 取 $\varepsilon_1=1$，在 $U(\xi;\varepsilon_1)$ 内，$\exists x_1\in E\setminus\{\xi\}$，取 $\varepsilon_2=\min\left\{\dfrac{1}{2},|x_1-\xi|\right\}>0$，在 $U(\xi;\varepsilon_2)$ 内，$\exists x_2\in E\setminus\{\xi\}$，…，一般地，取 $\varepsilon_n=\min\left\{\dfrac{1}{n},|x_{n-1}-\xi|\right\}>0$，在 $U(\xi,\varepsilon_n)$ 内，$\exists x_n\in E\setminus\{\xi\}$，$n=1,2,\cdots$. 显然 $\{x_n\}\subseteq E$，且是互异的，同时显然有 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\xi$.

(3)$\Rightarrow$(1). 对 $\forall\varepsilon>0$，$\exists N>0$，当 $n>N$ 时，$\{x_n\}\subset U(\xi,\varepsilon)$. 注意到 $x_n\in E$，$n=1,2,\cdots$，即 ξ 为点集 E 的聚点.

注：(1) 从定义可知，有限点集必无聚点.

(2) 点集 E 的聚点可以属于 E，也可以不属于 E. 例如，设 A 是开区间 $(0,1)$ 中的所有有理点所构成的集合，则闭区间 $[0,1]$ 中的所有点都是 A 的聚点.

定义 1.5(点列的聚点)：设 $\{x_n\}$ 是一个点列，ξ 是一个点，若在 ξ 的任意邻域内都含有 $\{x_n\}$ 的无穷多项，则称 ξ 为点列 $\{x_n\}$ 的聚点.

注意：点集的聚点与点列的聚点不同，例如 $\{x_n\}=\{(-1)^n\}$ 作为点列，它有两个聚点：-1 和 1，但是如果把它们看做点集，则它是一个仅含有两个元素的集合 $\{-1,1\}$，无聚点.

把点列的最大(小)聚点，叫做点列的上(下)极限，分别记作 $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}x_n$ 和 $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}x_n$.

8. 覆盖

设 $H=\{\Delta_\alpha\mid\alpha\in\Gamma\}$ 是一个开区间集，其中 Γ 是一个指标集，Δ_α 是开区间. 设 I 是一个点集，如果对 $\forall x\in I$，总存在 $\Delta_\alpha\in H$，使得 $x\in\Delta_\alpha$，称 H 覆盖了 I，或称 H 是 I 的一个开覆盖. 如果 H 是有限集而覆盖了 I，则称 H 是 I 的一个有限开覆盖；如果 H 是一个无限集合而覆盖了 I，则称 H 是 I 的一个无限开覆盖.

前面提到的有限覆盖定理，是一个十分重要的定理. 它可以推广到一般的距离空间上去，这里就不多说了.

例 1.4 设 $\{x_n\}$ 是单调数列，证明：若 $\{x_n\}$ 存在聚点，则必是唯一的，且是 $\{x_n\}$ 的确界.

证明：不妨设 $\{x_n\}$ 是单调递增数列. 假设 A、B 都是它的一个聚点，且不等. 不妨设 $A>B$，由聚点的定义，取 $\varepsilon=\dfrac{A-B}{2}>0$，在 $U(A;\varepsilon)$ 内，含有 $\{x_n\}$ 的无穷多项，假设 $x_{n_0}\in\{x_n\}\cap U(A,\varepsilon)$，则 $|x_{n_0}-A|<\varepsilon\Rightarrow x_{n_0}>A-\varepsilon=\dfrac{A+B}{2}$，又根据 $\{x_n\}$ 是单调递增的，当 $n>n_0$ 时，$x_n>\dfrac{A+B}{2}$，即在 $U(B;\varepsilon)$ 内至多含有 $\{x_n\}$ 的有限项，与 B 是聚点矛盾.

再证 $A=\sup\{x_n\}$：首先证明对 $\forall n$，$x_n\leqslant A$. 事实上，假设有某一项 $x_{n_0}>A$，插入 ε_0，使 $x_{n_0}>\varepsilon_0>A$. 由 $\{x_n\}$ 的单增性，当 $n>n_0$ 时，$x_n>x_{n_0}>\varepsilon_0>A$. 此与 A 为聚点矛盾. 与唯一性的证明类似，可以证明 A 必是最小的上界，即 $A=\sup\{x_n\}$.

* 注：此题可有一个推论：若 $\{x_n\}$ 是单调数列，且有聚点，则必收敛. 若 $\{x_n\}$ 是单调增，则 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\sup x_n$；若 $\{x_n\}$ 是单调减的，则 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\inf x_n$.

四、实函数

(1) 要理解函数的定义，一定要搞清楚映射的定义，而一元实函数实际上就是一个从实数集到实数集的映射，这里不去赘述. 确定一个函数的基本要素是定义域和对应法则，当然函数的值域也是函数的要素之一，但它是随定义域与对应法则而定的.

(2) 函数的运算包括:①四则运算;②复合运算;③极限运算;④微分运算;⑤积分运算;⑥取大(小)运算($\max\{f(x),g(x)\}$,$\min\{f(x),g(x)\}$)等. 这里需要特别强调的是,要注意它们的定义域,使得上述运算有意义.

(3) 几种具有特性的函数:①有界函数;②单调函数;③奇、偶函数;④周期函数. 这些函数的基本概念不再赘述.

(4) 初等函数与非初等函数.

① 六类基本初等函数:常函数、幂函数、指数函数、对数函数、三角函数、反三角函数;

② 初等函数:由基本初等函数经过有限次四则运算与复合运算所得到的函数,统称为初等函数;

③ 非初等函数:不是初等函数的函数,称为非初等函数.

一般的分段函数,都是非初等函数,例如符号函数 $\operatorname{sgn}x=\begin{cases}1, x>0\\ 0, x=0\\ -1, x<0\end{cases}$ 就是非初等函数,但是分段函数 $|x|=\begin{cases}x, x>0\\ 0, x=0\\ -x, x<0\end{cases}$ 可以看做初等函数,因为 $|x|=\sqrt{x^2}$ 是两个幂函数的复合.

下面几个非初等函数都很重要:

狄利克雷(Dirichlet)函数 $D(x)=\begin{cases}1, x\text{ 为有理数}\\ 0, x\text{ 为无理数}\end{cases}$.

黎曼(Riemann)函数 $R(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{q}, x=\dfrac{p}{q}\left(p,q\in N_+,\dfrac{p}{q}\text{为既约真分数}\right)\\ 0, x=0,1\text{ 和}(0,1)\text{内的无理数}\end{cases}$.

取整函数$[x]$:不超过 x 的最大整数.

勒让德(Legendre)多项式 $X_n(x)=C_n\dfrac{\mathrm{d}^n(x^2-1)^n}{\mathrm{d}x^n}$.

它们的一些性质,将在后面详细讨论.

有些函数乍一看好像不是初等函数,例如 $x^x(x>0)$,把它叫做幂指函数,利用对数恒等式,$x^x=\mathrm{e}^{x\ln x}$是由一些基本初等函数复合而成的,所以它也是初等函数.

1.2 实数与实函数的典型问题讨论

例 1.5 设函数 $f(x)$在$[a,b]$有定义,且在每一点处的极限存在,证明 $f(x)$在$[a,b]$上有界.

证法 1:对 $\forall x'\in[a,b]$,因$\lim\limits_{x\to x'}f(x)$存在,由局部有界性,$\exists m'>0$ 及 $\delta'>0$,使得当 $x\in U(x';\delta')$时,恒有$|f(x')|\leqslant m'$. 当 x 跑遍$[a,b]$时,在每一点 x 处都具备上述性质. 令 $H=\{U(x;\delta_x)\mid x\in[a,b]\}$,则 H 是$[a,b]$的一个开覆盖,据有限覆盖定理,必存在有限的子覆盖. 即存在$[a,b]$上的有限个点,不妨设为 $x_1,x_2,\cdots,x_k$,这 k 个点就有$\bigcup\limits_{i=1}^{k}U(x_i;\delta_i)\supset[a,b]$. 注意到对每个 $U(x_i;\delta_i)$都存在相应的 $M_i>0$,使当 $x\in U(x_i;\delta_i)$时,恒有$|f(x)|\leqslant M_i(i=1,2,\cdots,k)$. 记 $M=\max\{M_1,M_2,\cdots,M_k\}$,则对$\forall x\in[a,b]$恒有$|f(x)|\leqslant M$,即函数 $f(x)$在$[a,b]$上有界.

证法 2:(反证法)假设 $f(x)$在$[a,b]$上无界,则对$\forall M>0$,$\exists \bar{x}\in[a,b]$,使得$|f(\bar{x})|\geqslant M$. 让$M=1,2,\cdots,n,\cdots$,则相应地$\exists x_1,x_2,\cdots,x_n,\cdots\in[a,b]$,使得$|f(x_n)|\geqslant n$. 因$\{x_n\}\subset[a,b]$为有界数列,据聚点定理,必有收敛子列,即存在子列$\{x_{n_k}\}$,使$\lim\limits_{k\to\infty}x_{n_k}=x_0\in[a,b]$. 由已知,$f(x)$在$x_0$点的极限存在,记$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$,由归结原则,应有$\lim\limits_{k\to\infty}f(x_{n_k})=A$;但是由$\{x_n\}$的取法可知,$|f(x_{n_k})|\geqslant n_k\to+\infty$,$(k\to\infty)$,矛盾,即$f(x)$在$[a,b]$上有界.

例 1.6 试用有限覆盖定理证明聚点定理.

证明:设S是一个有界无穷点集. 下面用有限覆盖定理证它必有聚点. 因S有界,必有一个闭区间$[a,b]\supset S$. 对$\forall\varepsilon>0$,$\bigcup\limits_{x\in[a,b]}U(x;\varepsilon)\supset[a,b]\supset S$,由有限覆盖定理,必有有限的子覆盖,即存在有限个点:$x_1,x_2,\cdots,x_k\in[a,b]$,使$\bigcup\limits_{i=1}^{k}U(x_i;\varepsilon)\supset[a,b]\supset S$. 又因$S$是无穷点集,在这$k$个点中,至少有一个点的$\varepsilon$一邻域内含有$S$的无穷多个点,若记该点为$\bar{x}\in\{x_1,x_2,\cdots,x_k\}$,则$\bar{x}$就是$S$的聚点.

例 1.7 讨论狄利克雷函数的周期性.

解:狄利克雷函数以任意有理数为周期的周期函数,因为没有最小的正有理数,所以它没有基本周期. 事实上,任取一个有理数r,当x是有理数时,$r+x$还是有理数;当x是无理数时,$r+x$是无理数,因此

$$D(x+r)=\begin{cases}1, x\text{ 为有理数}\\ 0, x\text{ 为无理数}\end{cases}=D(x)$$

例 1.8 证明定义在对称区间$(-l,l)$上的任何函数$f(x)$都可以唯一地表示成一个偶函数与一个奇函数之和.

证明:令

$$H(x)=\frac{1}{2}[f(x)+f(-x)],G(x)=\frac{1}{2}[f(x)-f(-x)]$$

则$f(x)=H(x)+G(x)$,且容易验证:$H(-x)=H(x)$,$H(x)$是偶函数;$G(-x)=-G(x)$,$G(x)$是奇函数.

下面证明唯一性. 假设还存在偶函数$H_1(x)$和奇函数$G_1(x)$,使得$f(x)=H_1(x)+G_1(x)$,则有

$$H(x)-H_1(x)=G(x)-G_1(x) \tag{$*$}$$

用$-x$代替x,得$H(-x)-H_1(-x)=G(-x)-G_1(-x)$,即

$$H(x)-H_1(x)=G_1(x)-G(x) \tag{$**$}$$

将式($*$)、式($**$)相加,得$H(x)=H_1(x)$,再由式($*$)可得,$G(x)=G_1(x)$,唯一性得证.

例 1.9 设$f(x)=\begin{cases}1+x, & x<0\\ 1, & x\geqslant 0\end{cases}$,求$f(f(x))$.

解:$f(f(x))=\begin{cases}1+f(x), & f(x)<0\\ 1, & f(x)\geqslant 0\end{cases}$,而$x<-1$时,$f(x)<0$;$x\geqslant-1$时,$f(x)\geqslant0$,故有

$$f(f(x))=\begin{cases}2+x, & x<-1\\ 1, & x\geqslant-1\end{cases}$$

例 1.10 设f和g为区间(a,b)上的增函数,证明:

$$\Phi(x)=\max\{f(x),g(x)\};\Psi(x)=\min\{f(x),g(x)\}$$

都是(a,b)上的增函数.

证明：任取 $x_1,x_2\in(a,b)$且 $x_2>x_1$，由于 f,g 在(a,b)上单调递增，所以有

$$f(x_1)\leqslant f(x_2),g(x_1)\leqslant g(x_2)$$

即有

$$\Phi(x_1)=\max\{f(x_1),g(x_1)\}\leqslant\max\{f(x_2),g(x_2)\}=\Phi(x_2)$$

即 $\Phi(x)$在(a,b)上单调递增. $\Psi(x)$的单调性证法类似，从略.

例 1.11 函数 f 在$[a,b]$上无界，求证存在一点 $c\in[a,b]$，使对任意的 $\delta>0$，f 在$(c-\delta,c+\delta)\cap[a,b]$上无界.

证法 1（反证法）：假设结论不成立，即对 $\forall c\in[a,b]$，$\exists\delta>0$，使 f 在$(c-\delta,c+\delta)\cap[a,b]$上有界，即存在常数 $M_c>0$，使当 $x\in(c-\delta,c+\delta)\cap[a,b]$时，有$|f(x)|\leqslant M_c$. 让 c 跑遍$[a,b]$，这样每一点的相应的 δ 邻域就构成$[a,b]$的一个开覆盖，由有限覆盖定理，存在有限个点：记为 $x_1,x_2,\cdots,x_k\in[a,b]$，它们的 $\delta_i(i=1,2,\cdots,k)$邻域之并就覆盖了$[a,b]$. 因为在每一个 $U(x_i;\delta_i)\cap[a,b]$上都存在相应的 $M_i>0$，使得 $x\in U(x_i;\delta_i)\cap[a,b]$时，$|f(x)|\leqslant M_i(i=1,2,\cdots,k)$，令 $M=\max\{M_1,M_2,\cdots,M_k\}$，则对 $\forall x\in[a,b]$，恒有$|f(x)|\leqslant M$，即 $f(x)$在$[a,b]$上有界. 与已知矛盾.

证法 2（直接证法）：由已知 f 在$[a,b]$上无界，将$[a,b]$二等分，得两个子区间$\left[a,\frac{a+b}{2}\right]$，$\left[\frac{a+b}{2},b\right]$. 则 f 至少在其中一个子区间上无界，把它记为$[a_1,b_1]$. 再将$[a_1,b_1]$二等分，选其中一个使得 f 无界的那个子区间记为$[a_2,b_2]$. 将上述步骤一直进行下去，就得到一闭区间列$\{[a_n,b_n]\}$，$n=1,2,\cdots$，满足：(1)它是一个区间套，实因：①$[a_n,b_n]\supset[a_{n+1},b_{n+1}]$，$n=1,2,\cdots$；②$b_n-a_n=\frac{b-a}{2^n}\to0(n\to\infty)$. (2)$f$ 在每个$[a_n,b_n]$上都是无界的. 由区间套定理：$\exists c\in[a_n,b_n]\subset[a,b]$，$n=1,2,\cdots$，且对 $\forall\delta>0$，$\exists N>0$，当 $n>N$ 时，恒有$[a_n,b_n]\subset(c-\delta,c+\delta)$. 由(2)知 f 在其上无界.

例 1.12 举出一个函数的例子，它在$[0,1]$上每一点都有定义，且取有限值，但是函数在$[0,1]$上每一点的任意邻域内都是无界的.

解：令 $f(x)=\begin{cases}q,x=\dfrac{p}{q},p,q\text{ 为互质的正整数}\\0,x\text{ 为无理数，或 }x=0,x=1\end{cases}$，则显然 f 为定义在$[0,1]$且每一点都取有限值的函数. 下面证明它在$[0,1]$上的每一点的任意邻域内都是无界的. 事实上，对 $\forall x_0\in[0,1]$，$\forall\varepsilon>0$，由有理数的稠密性，在邻域 $U(x_0;\varepsilon)$内总有有理点，不妨取 $r_0=\frac{p_0}{q_0}\in U(x_0;\varepsilon)$，其中 p_0,q_0 都是互质的正整数. 对 $\forall M>1$，总有某一个自然数 k，使得有理数 $r=\frac{k[M]}{k[M]+1}r_0=\frac{p_0k[M]}{q_0k[M]+q_0}\in U(x_0;\varepsilon)$（因为 $\lim\limits_{k\to\infty}r=r_0$），且注意到 r 的分子和分母是互质的，这时 $f(r)=q_0k[M]+q_0>M$，即 $f(x)$在 $U(x_0;\varepsilon)$内无界.

例 1.13 若数集 A 有上界，但无最大数，证明在 A 中必能找到严格单调增加的数列$\{x_n\}$，使得$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\sup A$.

证明：根据确界原理，$\sup A$ 存在，记 $\alpha=\sup A$. 由已知 $\alpha\notin A$，由上确界的定义，对 $\varepsilon_1=1>0$，$\exists x_1\in A$，使得 $\alpha>x_1>\alpha-1$，对 $\varepsilon_2=\frac{1}{2}>0$，必存在 $x_2\in A$，使得 $\alpha>x_2>\max\left\{\alpha-\frac{1}{2},x_1\right\}$，一般地，对 $\varepsilon_n=\frac{1}{n}>0\ (n=1,2,\cdots)$，存在 $x_n\in A$，使得 $\alpha>x_n>\max\left\{\alpha-\frac{1}{n},x_{n-1}\right\}$，易知这样选取的数列 $\{x_n\}$ 即满足要求.

例 1.14 证明函数 $f(x)=x^3\mathrm{e}^{-x^2}$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上有界.

证明：因 $\lim\limits_{x\to\infty}x^3\mathrm{e}^{-x^2}=0$，所以对 $\varepsilon=1$，存在 $G>0$，当 $|x|>G$ 时，恒有 $|f(x)|<1$，又 $f(x)$ 在 $[-G,G]$ 上连续，从而有界，即存在 $M>0$，使当 $x\in[-G,G]$ 时，有 $|f(x)|\leqslant M$，取 $K=\max\{1,M\}$，则对 $\forall x\in(-\infty,+\infty)$，恒有 $|f(x)|\leqslant K$，即 f 在 $(-\infty,+\infty)$ 上有界.

例 1.15 设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上单调递增（未必连续），若 $f(a)\geqslant a$，$f(b)\leqslant b$，则必存在 $x_0\in[a,b]$，使得 $f(x_0)=x_0$.

证明：若 $f(a)=a$ 或 $f(b)=b$，则问题已经得证，不妨设 $f(a)>a$，$f(b)<b$. 作直线 L：$y=x$，则点 $(a,f(a))$ 在 L 的上方，而点 $(b,f(b))$ 在 L 的下方. 取 $c=\frac{a+b}{2}$，考查 $(c,f(c))$ 点，若在 L 上，则问题得证；否则若 $(c,f(c))$ 在 L 的上方，就记 $[c,b]=[a_1,b_1]$；若 $(c,f(c))$ 在 L 的下方，记 $[a,c]=[a_1,b_1]$，使得点 $((a_1,f(a_1))$ 与 $(b_1,f(b_1))$ 位于 L 的两侧. 这个过程一直进行下去，若有某一步得到 $a_n=f(a_n)$（即 $(a_n,f(a_n))$ 在 L 上），则问题得证，否则就得到一闭区间套 $\{[a_n,b_n]\}$，满足：① $[a_{n+1},b_{n+1}]\subset[a_n,b_n]\ (n=1,2,\cdots)$；② $b_n-a_n=\frac{1}{2^n}\to0\ (n\to\infty)$；③ $(a_n,f(a_n))$ 在 L 的上方，而 $(b_n,f(b_n))$ 在 L 的下方. 由闭区间套定理，存在唯一的 ξ：$a_n\leqslant\xi\leqslant b_n$，一方面，由 f 单增，$f(a_n)\leqslant f(\xi)\leqslant f(b_n)$，且由于 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\lim\limits_{n\to\infty}b_n=\xi$，单调函数在每一点的单侧极限存在，从而

$$\lim_{n\to\infty}f(a_n)=f(\xi-0)\leqslant f(\xi)\leqslant f(\xi+0)=\lim_{n\to\infty}f(b_n)$$

另一方面，由③，$f(a_n)>a_n\Rightarrow f(\xi-0)\geqslant\xi$；$f(b_n)<b_n\Rightarrow f(\xi+0)\leqslant\xi$，故必有 $f(\xi)=\xi$.

习 题 1

1. 设 $a,b\in R$，证明：

(1) $\max\{a,b\}=\frac{1}{2}(a+b+|a-b|)$；

(2) $\min\{a,b\}=\frac{1}{2}(a+b-|a-b|)$.

2. 设 $f\left(\frac{1}{x}\right)=x+\sqrt{1+x^2}$，求 $f(x)$.

3. 设 f,g 为 D 上的有界函数，证明：

(1) $\inf\limits_{x\in D}\{f(x)+g(x)\}\leqslant\inf\limits_{x\in D}f(x)+\sup\limits_{x\in D}g(x)$；

(2) $\sup\limits_{x\in D}f(x)+\inf\limits_{x\in D}g(x)\leqslant\sup\limits_{x\in D}\{f(x)+g(x)\}$；

(3) $\sup\limits_{x\in D}\{-f(x)\}=-\inf\limits_{x\in D}f(x)$；

(4) $\inf\limits_{x\in D}\{-f(x)\}=-\sup\limits_{x\in D}f(x)$.