

FEIGAOSI ZAOSHENG HUANJINGXIA DE  
XINHAO JIANCE YU ZISHIYING LVBO FANGFA

# 非高斯噪声环境下的 信号检测与自适应滤波方法

沈锋 姜利 单志明 著



国防工业出版社  
National Defense Industry Press

# 非高斯噪声环境下的 信号检测与自适应滤波方法

沈 锋 姜 利 单志明 著

国防工业出版社

·北京·

# 内 容 简 介

本书系统深入地介绍了  $\alpha$  稳定分布非高斯模型下的信号处理理论、方法与应用。全书共分为 7 章，内容包括：绪论；非高斯信号处理的国内外现状； $\alpha$  稳定分布及分数低阶统计量理论； $\alpha$  稳定分布参数估计方法； $\alpha$  稳定分布环境下的信号检测技术；未知噪声模型下自适应局部最佳检测； $\alpha$  稳定分布下的自适应滤波算法。

本书通过引入当前的研究进展，试图充分反映关于  $\alpha$  稳定分布下的信号处理新理论、新技术和新方法，帮助读者掌握本领域学术研究的前沿。

本书适合电子信息类的各专业教师、研究生阅读，也可作为有关科技工作者的参考用书。

## 图书在版编目 (CIP) 数据

非高斯噪声环境下的信号检测与自适应滤波方法/沈锋等著.

—北京：国防工业出版社，2014.9

ISBN 978-7-118-09656-9

I. ①非… II. ①沈… III. ①信号检测—研究

IV. ①TN911.23

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2014) 第 202121 号

※

国防工业出版社出版发行

(北京市海淀区紫竹院南路 23 号 邮政编码 100048)

北京京华虎彩印刷有限公司印刷

新华书店经售

\*

开本 710×1000 1/16 印张 11¼ 字数 243 千字

2014 年 9 月第 1 版第 1 次印刷 印数 1—2000 册 定价 79.00 元

---

(本书如有印装错误，我社负责调换)

国防书店：(010) 88540777

发行邮购：(010) 88540776

发行传真：(010) 88540755

发行业务：(010) 88540717

# 前 言

信号处理的主要任务是通过信号数学上的分析及基于对信号分析所设计的算法,经由观察得到的有限数据样本而提取信号中的信息。在大多数情况下,信号往往是不确定的,且观察信号中往往混有随机噪声。由于信号和噪声的随机性,需要采用统计的方法来分析处理。信号处理发展至今,所诞生的大多数理论和技术成果仍是在随机信号服从高斯分布的假设下取得的。然而实际信号的统计特性并不总是符合高斯假设,在实际应用中所遇到的大量的非高斯信号或噪声具有显著的尖峰脉冲特性。由于这种脉冲特性,使得这类非高斯过程的统计特性显著偏离高斯分布,特别是其概率密度函数的衰减过程要比高斯分布慢,从而造成了显著的拖尾。研究表明,水声信号、语音信号、低频大气噪声、许多生物医学信号以及许多人为产生的信号和噪声都属于这类过程。如果采用高斯分布模型来描述这类过程,将会由于模型与信号噪声不能很好地匹配而导致所设计的信号处理器显著退化。正因为如此,对非高斯信号的处理成为目前信号处理领域的热点和发展方向。

近年来,基于广义中心极限定理的  $\alpha$  稳定分布受到了学界的广泛重视。广义中心极限定理表明,包含无限方差的无穷多个独立同分布随机变量的极限分布是一种  $\alpha$  稳定分布。这正如提出常规的高斯分布的动因是中心极限定义一样,  $\alpha$  稳定分布在理论上的合理性与高斯分布一样。当然,  $\alpha$  稳定分布具有更普遍的意义,因为它能够描述更加广泛的数据,甚至可以描述许多不满足中心极限定理的数据。同时,  $\alpha$  稳定分布是一种能够保持自然噪声过程的产生机制和传播条件的极限分布,是一种更加广义化的高斯分布,或者说高斯分布是  $\alpha$  稳定分布的一个特例,并保持有  $\alpha$  稳定分布的一些特性,其中最重要的是所谓稳定特性,即  $\alpha$  稳定分布概率密度函数的卷积是封闭的,且其随机变量的相加也是封闭的。这表明具有相同特征指数的  $\alpha$  稳定分布随机变量的线性组合仍为  $\alpha$  稳定分布随机变量,但是具有不同的分散系数。因此,输入为  $\alpha$  稳定分布的线性系统,其输出仍然是  $\alpha$  稳定分布的,并且用于高斯分布信号的线性系统理论的许多方面可以直接扩展到  $\alpha$  稳定分布信号的场合。正是基于以上特征,并且能够较好地描述信号统计分布的非高斯性和重尾性,国内外学者针对  $\alpha$  稳定分布开展了广泛的研究。

本书以  $\alpha$  稳定分布为研究对象,重点研究了  $\alpha$  稳定分布下的信号检测与滤波技术。全书共分为 7 章,内容包括:绪论,非高斯信号处理现状,  $\alpha$  稳定分布与分数低阶统计量理论,  $\alpha$  稳定分布参数估计方法,  $\alpha$  稳定分布下的信号检测技术,未

知噪声模型下的信号检测技术,  $\alpha$  稳定分布下的自适应滤波方法等。

本书通过整理作者及课题组近些年在  $\alpha$  稳定分布方面的研究成果及当前国内外相关研究进展, 试图充分反映关于  $\alpha$  稳定分布下的信号处理新理论、新技术和新方法, 并与读者分享。

本书的研究成果是在国家自然科学基金项目(61102107, 61374208)、教育部中央高校科研基金(HEUCFX41310)、黑龙江省博士后科研启动金(LBH—Q13039)等相关项目的资助下取得的。同时, 特别感谢中国电子科技集团第 14 研究所赵丕杰博士提供的相关研究成果。

由于作者水平有限, 本书难免存在一些缺点和不足之处, 恳请读者批评指正。

# 目 录

第 1 章 绪论 .....	1
1.1 概述 .....	1
1.2 非高斯信号处理理论的研究进展 .....	2
1.3 本书的主要内容 .....	4
第 2 章 非高斯信号处理的国内外现状 .....	5
2.1 常用的非高斯噪声模型 .....	5
2.1.1 混合高斯分布 .....	5
2.1.2 广义高斯分布 .....	5
2.1.3 $t$ 分布 .....	6
2.1.4 Middleton 模型 .....	7
2.1.5 柯西分布 .....	9
2.2 $\alpha$ 稳定分布 .....	11
2.2.1 $\alpha$ 稳定分布的历史回顾 .....	11
2.2.2 $\alpha$ 稳定分布理论的发展动因 .....	13
2.2.3 $\alpha$ 稳定分布理论研究的意义 .....	14
2.3 $\alpha$ 稳定分布的应用与进展 .....	15
参考文献 .....	17
第 3 章 $\alpha$ 稳定分布及分数低阶统计量理论 .....	20
3.1 稳定分布的定义和性质 .....	20
3.1.1 $\alpha$ 稳定分布的定义 .....	20
3.1.2 $\alpha$ 稳定分布的性质 .....	22
3.2 $\alpha$ 稳定分布的概率密度函数 .....	24
3.2.1 傅里叶逆变换法 .....	24
3.2.2 幂级数展开法 .....	24
3.2.3 有限高斯混合近似法 .....	25
3.2.4 数值积分法 .....	26
3.3 分数低阶统计量理论 .....	27

3.3.1	分数低阶矩 .....	27
3.3.2	负阶矩和对数矩 .....	28
3.3.3	共变及其性质 .....	28
3.3.4	分数低阶协方差 .....	30
3.4	$\alpha$ 稳定分布的线性理论 .....	30
3.4.1	$\alpha$ 稳定随机变量的线性空间 .....	30
3.4.2	最小分散系数准则 .....	31
3.5	$\alpha$ 稳定分布的参数系和样本产生 .....	32
3.5.1	$\alpha$ 稳定随机样本的产生 .....	32
3.5.2	$\alpha$ 稳定分布的参数系及其表征 .....	33
3.5.3	仿真实验及分析 .....	34
3.6	本章小结 .....	37
	参考文献 .....	37
<b>第 4 章</b>	<b><math>\alpha</math> 稳定分布参数估计方法 .....</b>	<b>40</b>
4.1	经典 $\alpha$ 稳定分布参数估计 .....	40
4.1.1	最大似然方法 .....	40
4.1.2	样本特征函数法 .....	41
4.1.3	样本分位数法 .....	42
4.2	基于分数阶矩的参数估计 .....	43
4.2.1	分数低阶矩法 .....	43
4.2.2	对数矩法 .....	45
4.3	基于 M-H 算法的 $\alpha$ 稳定分布参数估计 .....	46
4.3.1	贝叶斯推理模型的构建 .....	46
4.3.2	马尔可夫链蒙特卡罗方法 .....	48
4.3.3	$\alpha$ 稳定参数估计的 M-H 算法实现 .....	49
4.3.4	仿真实验及分析 .....	50
4.4	自适应 Markov 链 $\alpha$ 稳定分布参数估计 .....	56
4.4.1	基于 DR 算法的 $\alpha$ 稳定分布参数估计 .....	56
4.4.2	基于 AM 算法的 $\alpha$ 稳定分布参数估计 .....	57
4.4.3	基于 DRAM 算法的 $\alpha$ 稳定分布参数估计 .....	58
4.4.4	仿真实验及分析 .....	59
4.5	本章小结 .....	65
	参考文献 .....	66
<b>第 5 章</b>	<b><math>\alpha</math> 稳定分布环境下的信号检测技术 .....</b>	<b>67</b>
5.1	预备知识 .....	67

5.1.1	局部最优检测器	67
5.1.2	秩检测技术	69
5.1.3	直扩系统的基本原理	70
5.2	非高斯环境下的信号检测技术	74
5.2.1	相干直扩信号检测	75
5.2.2	非相干直扩信号检测	80
5.2.3	性能分析	84
5.3	相关非高斯噪声下的信号检测技术	86
5.3.1	相干直扩信号检测	87
5.3.2	非相干直扩信号检测	95
5.4	乘性噪声环境下的信号检测技术	102
5.4.1	相干直扩信号检测	103
5.4.2	非相干直扩信号检测	110
5.5	乘性噪声环境下基于符号秩统计量的信号检测技术	115
5.5.1	观测模型	115
5.5.2	局部最佳秩检测统计量	117
5.5.3	性能分析	119
5.6	本章小结	120
	参考文献	121
<b>第 6 章</b>	<b>未知噪声模型下自适应局部最佳检测</b>	<b>123</b>
6.1	引言	123
6.2	未知噪声的最大熵 PDF 估计算法	124
6.2.1	信息熵	124
6.2.2	最大熵 PDF 估计算法	126
6.3	基于分数最大熵 PDF 估计的 LOD 捕获结构	129
6.3.1	直扩系统捕获模型	129
6.3.2	LOD 捕获结构	131
6.4	捕获性能仿真与分析	134
6.5	实验数据处理验证	135
6.6	本章小结	141
	参考文献	142
<b>第 7 章</b>	<b><math>\alpha</math> 稳定分布下的自适应滤波算法</b>	<b>144</b>
7.1	自适应滤波的原理、应用及现状	144
7.2	稳定分布下的时域自适应滤波算法	147
7.2.1	最小平均 $p$ 范数及其归一化算法	147



7.2.2	广义归一化最小平均 $p$ 范数算法	149
7.2.3	递归最小 $p$ 范数算法	150
7.3	稳定分布下的变换域自适应滤波算法	151
7.3.1	小波变换理论	151
7.3.2	变换域 LMP 算法	156
7.3.3	小波变换域 LMP 算法	160
7.3.4	算法性能分析	162
7.3.5	仿真实验及分析	163
7.4	本章小结	164
附录 A	非高斯环境下的局部最佳检测器统计量推导	165
附录 B	乘性噪声环境下局部最佳秩检测器检测统计量的推导	167
	参考文献	171

# 第1章 绪论

## 1.1 概述

信号是电子信息科学技术领域最重要的基本概念之一。信号是信息的载体和物理表现形式，而信息则是信号的具体内容。科技的发展使得几乎所有的工程技术领域都要涉及信号处理问题，其根本任务就是从含噪观测数据中揭示出所需要的期望信号的相关信息。考虑到信号和噪声在大多数情况下都是不确定的，所以为了实现信号处理的目标，通常都假设信号和噪声符合一定的统计模型。

在信号处理文献中高斯模型占据绝对统治的地位，人们亦习惯于假设信号和噪声服从高斯分布，其优势在于仅用二阶统计量就可以进行信号特性分析、参数估计和滤波等信号处理。高斯假定的理论基础源于中心极限定理(Central Limit Theorems, CLT)，它表明具有有限方差的无限多个独立同分布随机变量的和趋向于高斯分布。此外，高斯假定是在 Hilbert 空间进行线性信号处理，通常都能获得相关问题的闭式最优解，无论是理论分析还是算法推导都比较方便；而信号或噪声的任何非高斯假定都不可避免地引入非线性问题，非线性就意味着更复杂的信号处理算法。正是出于以上原因，基于高斯假定和二阶统计量的理论和方法历来都是各领域的研究重点。实际上，在 20 世纪 80 年代以前，包括信号分析、系统辨识、参数估计等问题在内的统计信号处理基本上都是建立在二阶统计量基础上的，例如对随机信号的均值、方差、相关函数和功率谱密度函数等分析，以及基于二阶统计量的预测、滤波、检测与估值等。

尽管许多信号和噪声都可以用理想的高斯模型来描述，但是在实际中非高斯信号才是更普遍的信号类型；对于非线性系统而言，无论系统输入采用何种信号类型，其输出必为非高斯信号；对于非高斯和非最小相位系统，二阶统计量不能提供理解信号的非高斯特性所需要的足够信息（例如相位信息），在这种情况下高阶统计量就可能比仅仅使用二阶统计量能够从信号中揭示出更多的信息。严格地说，非高斯随机信号需要利用概率密度函数才能对其进行完整的刻画，但是并非所有随机信号都存在解析形式的概率密度函数，幸运的是信号的统计矩能够描述概率密度函数的特征，所以高阶统计量理论在非高斯信号处理中备受重视并得到广泛的应用。

高阶统计量理论为非高斯、非最小相位以及非平稳信号处理提供了重要的数学工具，从不同视角解决了许多无法用二阶统计量分析得到满意结果的问题。然而，大量研究表明，在诸如雷达、通信、水声、生物医学以及经济计量学等领域的实际应用中，许多非高斯信号或噪声都呈现显著的尖峰脉冲特性，例如水声信号、低频大气噪声、

心电信号和星际间引力场等，都属于此类信号。时域上大量显著的尖峰脉冲意味着频繁的异常数据，其统计特性就表现为较厚的概率密度函数拖尾，这类过程既不存在有限的二阶矩，更不存在高阶统计量，因此需要寻找一种能够对其进行合理描述的信号模型。

研究表明，强尖峰脉冲特性和较厚的统计密度拖尾正是 Alpha( $\alpha$ )稳定分布过程的典型特征。 $\alpha$  稳定分布又称为非高斯稳定分布、重尾分布，它是高斯分布的广义化形式。根据广义中心极限定理 (Generalized Central Limit Theorems, GCLT)， $\alpha$  稳定分布是唯一一类构成独立同分布随机变量归一化和的极限分布。由于去除了有限方差限制， $\alpha$  稳定分布能够保持自然信号或噪声过程的产生机制与传播条件，非常好地与实际数据相吻合，所以  $\alpha$  稳定分布模型更适合描述具有显著尖峰脉冲波形和代数型统计密度拖尾的随机信号。

若随机过程具有显著的尖峰脉冲特性，则其高阶统计量甚至二阶统计量都是不存在的，在这种情况下高斯假定不再成立，相应的优化准则大多会失效，所以传统的信号分析和处理方法会出现性能退化甚至无法预料的结果。此时，基于信号噪声  $\alpha$  稳定分布假设和分数低阶统计量而导出的信号处理算法，对诸如信号噪声模型不确定性、与实际情况有误差等情况具有良好的韧性，即便是在高斯环境下这种假定也依然有效。然而，由于  $\alpha$  稳定分布必须用 4 个特征参数才能完全确定统计特性，因此模型与参数估计问题就成为利用  $\alpha$  稳定分布和分数低阶统计量设计信号处理算法的基础。信号统计检测与自适应滤波是现代统计信号与非平稳信号处理的主要内容，因此研究  $\alpha$  稳定分布下的信号检测与自适应滤波算法将有助于统计检测理论与自适应信号处理理论的进一步发展和完善。

综上所述， $\alpha$  稳定分布和分数低阶统计量理论及其应用问题是当前国际信号处理界的研究热点和发展前沿，深入地研究相关理论和方法能够使人们解决许多过去不能解决或解决得不好的问题。从统计量的角度来看，分数低阶统计量的发展尚处于起步阶段，有必要进行深入研究，使统计信号处理形成一个完整的理论体系。

## 1.2 非高斯信号处理理论的研究进展

非高斯信号处理理论是现代信号处理理论的重要组成部分，对非高斯信号理论的研究是当前国内外信号处理领域的前沿课题。传统的信号处理理论和方法基本上都是基于高斯分布和二阶统计量的，而与之不同的是非高斯信号处理主要使用高阶统计量 (Higher Order Statistics, HOS) 和分数低阶统计量 (Fractional Lower Order Statistics, FLOS) 作为信号分析和处理的数学工具。统计量的分布如图 1-1 所示。

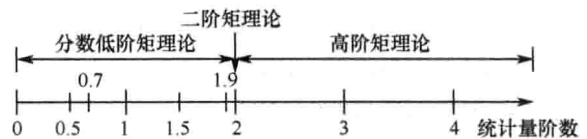


图 1-1 随机信号统计量的分布

由此可知，高阶统计量或高阶矩包含了二阶以上的统计矩，取值为  $(2, +\infty)$  范围的任意整数；分数低阶统计量或分数低阶矩包含了二阶以下大于零的统计矩，取值为  $(0, 2)$  范围内的任意值；与高斯分布对应的是二阶统计量或二阶矩。常见的相关函数、方差、协方差以及功率谱密度等都是基于二阶统计量的信号分析方法。若对所有的信号和噪声都做高斯假定，则其信号处理方法就是基于二阶统计量的，并且利用数学期望和方差来描述概率密度函数；然而当高斯假定的条件不成立时，其概率密度函数就不能仅由均值和方差来确定，例如非高斯  $\alpha$  稳定分布的特征函数就需要 4 个参数来描述。

广义上讲，高阶统计量应该包括高阶循环统计量和高阶非循环统计量，具体包括高阶矩、高阶累积量、高阶矩谱、高阶累积量谱、高阶循环矩、高阶循环累积量、高阶循环矩谱、高阶循环累积量谱。但是，人们习惯上用高阶统计量代替高阶非循环统计量，即高阶矩、高阶累积量、高阶矩谱和高阶累积量谱。目前高阶统计量的应用研究主要集中于 3 阶、4 阶累积量及其相应的高阶谱方面。高阶统计量这种数学工具描述了随机过程的高阶统计特性，具体而言就是高阶矩、高阶累积量及其傅里叶变换——高阶矩谱和高阶累积量谱。尽管直到 20 世纪 80 年代后期才形成对高阶统计量理论的研究热潮，但是其本身却是一个很传统的数学领域，从 1900 年皮尔逊 (Pearson) 关于矩方法的研究起，至今已经有 100 多年的历史。60 年代初，统计学家们开始研究高阶统计量的应用问题，随后 Mendel 等人利用高阶统计量研究了系统辨识技术，并在地震信号的反卷积应用中取得显著效果。高阶统计量理论的快速发展得益于现代计算机技术和数字信号处理器技术的进步，由于解决了计算量问题，高阶统计量信号处理理论和技术开始迅速发展，首届国际高阶谱分析学会于 1989 年召开，次年 IEEE 便出版了高阶统计量的专刊，这标志着对高阶统计量的研究进入一个新的发展阶段。从 20 世纪 80 年代后期起，高阶统计量的研究和应用得到了迅速的发展。高阶统计量不仅能自动抑制高斯有色噪声的影响，有时也能抑制非高斯有色噪声的影响，高阶循环统计量还能自动抑制任何平稳（高斯与非高斯）噪声的影响。已有的研究和应用表明：一方面，基于高阶统计量的方法可以有效增强信噪比，具有在有色高斯噪声中提取非高斯噪声的能力，可以抽取得到不同于高斯信号的多种信号特征；另一方面，高阶统计量不仅揭示了随机过程的幅值信息，而且还揭示了随机过程的相位信息，因而高阶统计量具有重构非最小相位系统的能力，可以分析和处理循环平稳信号或系统。正是由于高阶统计量方法能够有效地辨识非因果、非最小相位系统和非线性系统。因而，近年来高阶统计理论为信号处理开辟了一个崭新的研究领域。基于高阶统计量的理论和算法的层出不穷，不仅推动了高阶统计理论的发展，同时也很好地解决了实际中存在的问题。此外，高阶统计量理论的重要性还在于它带动了高阶循环统计量理论的诞生与发展，使得循环平稳信号分析与处理这一新领域得以问世。

在信号处理领域，提出并发展高阶统计量的动因主要有以下几点：①抑制功率谱密度未知的加性高斯有色噪声；②对非最小相位系统进行辨识或重构非最小相位信号；③提取与高斯性偏离有关的重要信息；④检测和表征信号中的非线性以及辨识非线性

系统等。总之，高阶统计量比二阶统计量包含更多的有用信息，凡是二阶统计量无法描述或经过分析与处理而又未得到满意结果的任何问题，都值得重新试用高阶统计量的方法。

分数低阶统计量描述了随机过程的分数低阶统计特性，具体而言就是分数低阶矩、共变、分数低阶协方差及其谱表示—— $\alpha$  谱、共变谱和分数低阶协方差谱等。对  $\alpha$  稳定分布的研究同样历史悠久，大致从 1919 年天文学家 Holtsmark 发现星际间引力场随机波动服从  $\alpha=1.5$  的稳定分布起，至今也有 90 多年历史了。但是  $\alpha$  稳定分布理论的研究相对发展比较缓慢，直到 1978 年 Stuck 才首次提出了优化理论——最小分散系数准则，它是最小均方误差准则的直接推广，现在该准则已成为  $\alpha$  稳定分布信号处理中最重要的优化准则。20 世纪 90 年代后对  $\alpha$  稳定分布理论和应用的研究进入高潮并涌现出一大批新理论和新方法，如 1994 年 Samorodnitsky 和 Taqqu 出版了关于  $\alpha$  稳定分布的首部专著等。

在信号处理领域，提出并发展  $\alpha$  稳定分布理论的动因主要有以下几点：①  $\alpha$  稳定分布是唯一满足广义中心极限定理的分布族；②  $\alpha$  稳定分布是一种能够保持自然信号或噪声过程的产生机制与传播条件的极限分布；③  $\alpha$  稳定分布是属于广义高斯分布，其最重要的特征是满足所谓的稳定性，即卷积和加法是封闭的；④最重要的是  $\alpha$  稳定分布数据能够非常好地与实际数据相吻合。

从总体上来讲，现代信号分析与处理的本质可以用一个“非”字高度概括，即：非高斯、非线性、非平稳、非因果、非最小相位系统、分形（非整数维）信号和非白色的加性噪声等。而高阶统计量和分数低阶统计量则是“非”字信号处理的主要数学工具，其应用范围包括雷达、声呐、地球物理、语音及生物医学等信号处理、图像重构、文理分析、机械故障诊断、谐波恢复、阵列处理、盲反卷积、盲均衡、盲估计、盲信号分离和非线性波形分析等。因此，对非高斯信号处理理论的研究以及大量新理论新算法的提出，必将有力地推动信号处理各领域的发展和进步。

### 1.3 本书的主要内容

本书紧密围绕非高斯噪声环境下的信号检测与滤波展开，主要内容分为三部分： $\alpha$  稳定分布模型与参数估计、非高斯噪声环境下的直扩信号检测技术、非高斯噪声环境下的自适应滤波技术，共分 7 章来具体讨论。

第一部分为第 1 章至第 4 章，其中：第 1 章概述了著作本书的目的、非高斯信号处理的研究进程；第 2 章介绍了常用的非高斯噪声模型，并引入了  $\alpha$  稳定分布模型，介绍了  $\alpha$  稳定分布的发展历程；第 3 章详细介绍了  $\alpha$  稳定分布的定义、概率密度函数及分数低价矩理论；第 4 章介绍了  $\alpha$  稳定分布的参数估计方法。

第二部分为第 5 章和第 6 章，其中：第 5 章研究了不同非高斯噪声环境下的信号检测方法；第 6 章研究了未知噪声环境下的信号检测方法。

第三部分为第 7 章，研究了  $\alpha$  稳定分布环境下的自适应滤波技术。

## 第2章 非高斯信号处理的国内外现状

### 2.1 常用的非高斯噪声模型

#### 2.1.1 混合高斯分布

混合高斯分布是一种简单的、应用十分广泛的非高斯模型。混合高斯模型跟高斯变量之和描述相似，容易混淆。混合高斯模型给出的概率密度函数实际上是几个高斯概率密度函数的加权和，即

$$p(x) = \sum_{i=1}^n p_i N(x; \bar{x}_i, P_i) \quad (2-1)$$
$$\sum_{i=1}^n p_i = 1$$

定义事件  $A_i = \{x \sim N(\bar{x}_i, P_i)\}$ ，则  $P\{A_i\} = p_i$ ，据此可以产生服从上述混合高斯概率密度分布的样本。

混合分布的均值为

$$\bar{x} = \sum_{i=1}^n p_i \bar{x}_i \quad (2-2)$$

方差为

$$E\left((x - \bar{x})(x - \bar{x})'\right) = \sum_{i=1}^n p_i P_i + \sum_{i=1}^n p_i \bar{x}_i \bar{x}_i' - \bar{x} \bar{x}' \quad (2-3)$$

计算均值和方差的公式不仅适用于几个（多维）高斯分布混合的情况，还适用于非高斯分布的情况。

#### 2.1.2 广义高斯分布

广义高斯分布是指具有如下概率密度函数（PDF）的分布，即

$$g(x) = C_1 \exp(-C_2 x^\nu) \quad (2-4)$$

$$C_1 = \nu \Phi(\sigma, \nu) / 2\Gamma(1/\nu)$$

$$C_2 = [\Phi(\sigma, \nu)]^\nu$$

$$\Phi(\sigma, \nu) = \frac{1}{\sigma} \left[ \frac{\Gamma(3/\nu)}{\Gamma(1/\nu)} \right]^{1/2}$$

式中： $\nu$  为描述分布的形状参数。

当  $\nu=2$  时，分布为高斯分布；当  $\nu=1$  时分布为拉普拉斯分布。随着  $\nu$  的减小，分布越来越集中在 0 值附近，其概率密度在 0 值处出现尖峰；而当  $\nu \rightarrow \infty$  时，分布趋于均匀分布。参数  $C_1, C_2$  为常数，保证其概率密度函数在  $-\infty$  到  $+\infty$  区间内积分值为 1，并决定了该分布的方差  $R$ 。  $R=10, \nu=2, 1, 0.7$  时的广义高斯分布概率密度函数如图 2-1 所示。

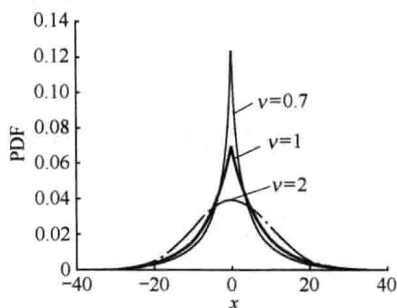


图 2-1 广义高斯分布的概率密度函数

近年来，广义高斯分布（GGD）受到国内外学者越来越广泛的重视。广义高斯分布是一类以高斯分布、拉普拉斯分布为特例，以  $\delta$  函数和均匀分布为极限形式的对称分布。它在许多领域都有广泛的应用，在图像处理中，它被用于描述离散余弦变换（DTC）和小波变换的系数。例如：根据数字图像 DCT 变换交流系数建立广义高斯分布模型，应用弱信号检测理论，对盲图像水印技术进行研究；再如，小波变换应用于图像压缩时，其变换系数除最低频外均近似服从形状参数为 0.7 的广义高斯变换；在图像去噪领域，以广义高斯分布作为图像小波系数的先验模型，基于贝叶斯准则的贝叶斯萎缩法能够自适应地处理各子带阈值，经过该方法去噪后的图像与含噪图像相比均方误差和信噪比都有了很大的改善，去噪效果良好；在纹理检索中，用广义高斯分布来逼近小波变换系数的边缘分布，以便捕捉到更精确的纹理信息。另外，广义高斯分布在拟合非高斯噪声和地球物理信号方面也有重要的应用，例如在研究地震信号时发现，采用广义高斯概率密度函数来拟合反射系数序列的概率密度函数可准确地表征反射系数序列的分布特征，并且其表达式简单，可增加计算稳定性和降低计算复杂性，对提高地震资料解释精度以及指导精细勘探与开发将发挥重要作用。此外，在独立成分分析（ICA）中，评价函数通常被假设为广义高斯分布的。

### 2.1.3 t 分布

学生  $t$  分布可简称为  $t$  分布。其推导由威廉·戈塞于 1908 年首先发表，当时他还在都柏林的健力士酿酒厂工作。因为不能以他本人的名义发表，所以论文使用了学生（Student）这一笔名。之后  $t$  检验以及相关理论经由罗纳德·费雪的工作发扬光大，而正是他将此分布称为学生分布。在概率论和统计学中，学生  $t$  分布（Student's  $t$ -distribution）应用在对呈正态分布的母群体的均值估计。它是对两个样本均值差异进行显著性测试的学生  $t$  检定的基础。 $t$  检定改进了  $Z$  检定（ $Z$ -test），不论样本数量大或小皆可应用。在样本数量大（超过 120）时，可以应用  $Z$  检定，但  $Z$  检定用在小的样

本会产生很大的误差，因此样本很小的情况下得改用学生  $t$  检定。在数据有三组以上时，因为误差无法压低，此时可以用变异数分析代替学生  $t$  检定。当母群体的标准差是未知的但却又需要估计时，可以运用学生  $t$  分布。

正态分布有两个参数，即  $\mu$  和  $\sigma$ ，决定了正态分布的位置和形态。为了应用方便，常将一般的正态变量  $x$  通过  $u$  变换  $[u = x - \mu / \sigma]$  转化成标准正态变量  $u$ ，以使原来各种形态的正态分布都转换为  $\mu = 0, \sigma = 1$  的标准正态分布 (standard normal distribution)，亦称  $u$  分布。根据中心极限定理，通过上述的抽样模拟试验表明，在正态分布总体中以固定  $n$  (本次试验  $n = 10$ ) 抽取若干个样本时，样本均数的分布仍服从正态分布，即  $N(\mu, \sigma)$ 。所以，对样本均数的分布进行  $u$  变换  $[u = \bar{x} - \mu / \sigma_x]$ ，也可变换为标准正态分布  $N(0, 1)$ 。

由于在实际工作中，往往  $\sigma$  是未知的，常用  $s$  作为  $\sigma$  的估计值。为了与  $u$  变换区别，称为  $t$  变换，即

$$t = \frac{\bar{x} - \mu}{s_x} \quad (2-5)$$

统计量  $t$  值的分布称为  $t$  分布。

$t$  分布有如下特征：

(1) 以 0 为中心，左右对称的单峰分布；

(2)  $t$  分布是一簇曲线，其形态变化与  $n$  (确切地说与自由度  $\nu$ ) 大小有关。自由度  $\nu$  越小， $t$  分布曲线越低平；自由度  $\nu$  越大， $t$  分布曲线越接近标准正态分布 ( $u$  分布) 曲线，如图 2-2 所示。

对应于每一个自由度  $\nu$ ，就有一条  $t$  分布曲线，每条曲线都有其曲线下统计量  $t$  的分布规律，计算较复杂。因此，统计学家上根据自由度  $\nu$  的大小与  $t$  分布曲线下面积的关系，编制了  $t$  界值表，以便于应用。表中的横标目为自由度  $\nu$ ，纵标目为概率  $P$ ，表中数字表示自由度  $\nu$  为某值且  $P$  为某值时  $t$  的界值。因  $t$  分布是以 0 为中心的对称分布，故  $t$  界值表中只列出正值，如果算出的  $t$  值为负值，可以用绝对值查表。 $t$  分布曲线下面积为 95% 或 99% 的界值不是一个常量，而是随着自由度大小而变化的，分别用  $t_{0.05\nu}$  和  $t_{0.01\nu}$  表示。对应于每一个自由度  $\nu$ ，就有一条  $t$  分布曲线，每条曲线都有其曲线下统计量  $t$  的分布规律，计算较复杂。

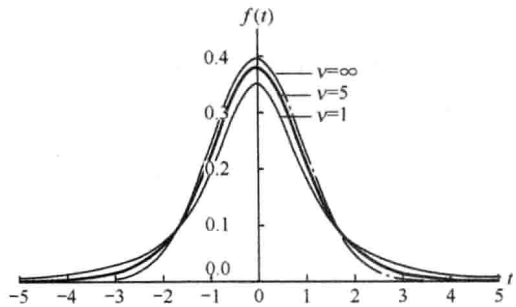


图 2-2 自由度为 1、5、 $\infty$  的  $t$  分布

## 2.1.4 Middleton 模型

Middleton 基于对噪声源统计特性的一般假设，提出了噪声统计物理模型，即：



ClassA, ClassB 和 ClassC。这些模型是标准的, 即不依赖对产生噪声机制的规范。当用它们对电磁干扰和声音噪声建模时, 通常给定如下的基本假设条件:

- (1) 有无限数量的源产生彼此相互独立的随机波;
- (2) 这些源在时间和空间上随机分布, 定义为不依赖于电波和传播定律的泊松分布。

这三种模型是由噪声和接收机之间的相对带宽来划分的。对于 ClassA 噪声, 信号带宽小于接收机带宽; 对于 ClassB 噪声, 情况正好相反; 对于 ClassC 噪声, 带宽情况介于二者之间。噪声和接收机带宽之间的关系导致 ClassB 噪声会在接收机端产生瞬变; 而对于 ClassA 噪声, 这种瞬变可以忽略。因此, ClassB 模型更具脉冲性。

ClassA 噪声的概率密度函数是由高斯分布概率密度函数标量混合而成的, 随机源瞬时包络的 PDF 表示为

$$p_X(x) = e^{-A} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{A^j}{j!} \frac{1}{\sqrt{2\pi N \delta_j^2}} \exp\left(-\frac{x^2}{2N \delta_j^2}\right) \quad (2-6)$$

式中:  $A$  为脉冲指数 (Impulsive Index), 等于单位时间内接收的平均脉冲与脉冲持续时间的乘积, 有  $A \leq 1$ ;  $N$  为总的噪声功率;  $\delta_j^2 = (j/A + T)/(1+T)$ ,  $T$  定义为高斯噪声分量和非高斯噪声分量的平均功率比。

更一般的 ClassB 噪声模型的 PDF 至少需要 6 个参数, 是 Hall 模型的扩展。ClassA 模型已经被推广用于通信系统阵列天线所接收的电磁干扰噪声的建模。

Middleton 将 Class A 非高斯噪声概率密度函数表示成不同强度的高斯噪声概率密度函数的加权和, 其归一化的概率密度函数表达式为

$$p_n(z) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{e^{-A} A^m}{m!} \cdot \frac{1}{2\pi \delta_m^2} \exp\left(-\frac{z^2}{2\delta_m^2}\right) \quad (2-7)$$

$$\delta_m^2 = \delta^2 \frac{m/A + \Gamma}{1 + \Gamma}$$

式中:  $A$  为脉冲指数,  $A$  值越小, 噪声的脉冲性越强, 表示噪声的非高斯趋势越强; 反之,  $A$  值越大, 表明噪声统计特性越接近高斯特性;  $\Gamma$  为高斯脉冲功率比 (Gauss-to-impulsive Power Ratio), 它代表噪声中高斯分量的功率与脉冲分量的功率的比值;  $\delta^2$  为噪声平均功率。

当  $A=10$ ,  $\Gamma=0.01$  时,  $p_n(z)$  几乎与高斯概率密度函数一致; 当  $A=0.01$ ,  $\Gamma=0.01$  时,  $p_n(z)$  描述的噪声非高斯趋势非常明显, 噪声的脉冲特性已经很强; 而当  $A$  从 10 变化到 0.01 时,  $p_n(z)$  则平滑地从高斯概率密度函数过渡到非高斯概率密度函数。因此, Middleton 的 Class A 噪声统计模型既可以描述弱非高斯过程 (接近高斯过程), 也可以表达强非高斯过程, 具有广泛的适用性。Class A 噪声模型参数估计是很复杂的问题, 这主要是因为它是复合随机过程。参数估计涉及 3 个标量参数  $A$ 、 $\Gamma$ 、 $\delta^2$  及  $N$  维