现代分析入门

赵焕光　著

科学出版社

现代分析入门

赵焕光　著

科学出版社
北京

内 容 简 介

本书从五个不同的侧面，介绍现代分析入门的基础理论及其应用，主要讲述三类抽象空间(距离空间、赋范线性空间、内积空间)的结构及性质，有界线性算子与有界线性泛函的入门理论，凸分析初步，抽象分析初步，非线性分析初步等内容. 本书可用“突出基础，强调应用；关注背景，启迪创新；叙述简洁，视野开阔”概括其特色.

本书适用于数学专业的本科高年级学生、数学课程与教学论硕士研究生、理工科相关专业的硕士研究生、青年教师以及自然科学工作者学习参考.

图书在版编目(CIP)数据

现代分析入门/赵焕光著. —北京：科学出版社，2014. 8

ISBN 978-7-03-041473-1

Ⅰ. ①现… Ⅱ. ①赵… Ⅲ. ①泛函分析-研究 Ⅳ. ①O177

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2014) 第 166682 号

责任编辑：王丽平 / 责任校对：邹慧卿

责任印制：赵德静 / 封面设计：陈 敬

科学出版社 出版

北京东黄城根北街 16 号

邮政编码：100717

http://www.sciencep.com

北京通州皇家印刷厂 印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2014 年 8 月第 一 版 开本：720 × 1000 1/16

2014 年 8 月第一次印刷 印张：16 1/2

字数：340 000

定价：68.00 元

(如有印装质量问题，我社负责调换)

前　　言

现代分析入门是一门在几何观念启迪下研究分析运算 (包括代数运算与极限运算) 的数学专业基础课程, 它能让学习者感受到几何、代数、分析高度统一的美妙. 我们可以用 “真、善、美” 这三个字描述该课程的特征.

追求真理是人类的高雅目标.“存在性”是真理探讨的首要话题. 唐代诗人贾岛用美丽的诗句“*松下问童子, 言师采药去. 只在此山中, 云深不知处*”描述文学中 “存在” 的意境. 科学家们探索 “存在性” 问题, 需要找到 “真金白银” 的客观存在的真凭实据. 非常典型的例子是, 世界航海史上, 中国明朝的航海先驱郑和七次下西洋的壮举被历史遗忘的原因在于郑和没有解决航路存在问题; 而葡萄牙航海家麦哲伦一次横渡大西洋就名垂千秋, 其理由是他解决了新航路的存在性问题. 现代分析数学家们把探讨存在性问题作为认识真理的一种重要方法. 例如, 距离空间的核心理论是可分性、完备性与紧性, 研究这些性质的根本目的就是为解决 “存在性” 问题奠基. 又如, 现代分析中各种各样的不动点定理, 说的就是在特定的集合中, 满足特定条件的映射必存在不动点. 我们认为, 如果把不动点定理所蕴涵的哲理应用于现实社会中, 那么就可以得出一条非常有价值的社会学定律: *在好的社会环境下, 有好的社会制度作保障, 人们必定能找到核心价值观.*

法国数学家 Fourier 说, “*数学的主要目的是服务人类, 解释自然现象*”, 其实他所说的是数学的善. 数学与人类文明共存亡, 数学的点滴进步都为人类的发展奠定基础. 数学最大的善, 就在于它能为人类提供取之不尽, 用之不竭的新思想. 人类一直在苦苦探索统一世界的法门, 至今世界上没有一个国家, 也没有一种现成的理论能解决好这一棘手问题. 数学家们为此付出巨大努力, 并在数学世界 (理想世界) 中取得巨大成功. 线性泛函分析的核心理论部分是通过局部刻画整体, 把来自不同学科的众多理论统一在某个框架内讨论. 比如, 线性泛函分析中的 Hahn–Banach 泛函延拓定理、逆算子定理、共鸣定理能 “居高临下” “一劳永逸” 地用统一的模式解决某一大类相关联的问题. 逆算子定理及其派生出来的闭图像定理与共鸣定理是研究现代微分方程与积分方程的重要工具. 毫不夸张地说, Hahn–Banach 泛函延拓定理及其派生出来的凸集分离定理, 强有力地支撑起凸分析、最优化、逼近论等众多的学科. Hahn–Banach 泛函延拓定理是指子空间上的有界线性泛函必能保范延拓到大空间上. 如果把此定理所蕴涵的哲理运用到社会学中, 那么我们认为又可以得到另一个社会学定律: *在好的社会环境中, 在好的社会制度下, 小范围可行的好政策 (试点) 必定能扩大到大范围.*

德国哲学大师海德格尔曾激情澎湃地说过,"人要诗意地栖居在大地上."诗通常与"美好、简洁、直观、深刻"联系在一起, 好的数学如同诗, 它们都是心灵与心灵的对话、思想与思想的握手, 它们都用简单的事物表达深刻的思想. 现代分析数学中有和谐、有宁静、有撼人心魄的美, 这种美不留痕迹, 尽得风流."最喜人心恰似水, 等闲平地起波澜."我们只要有一双善于发现与欣赏的眼睛, 就必定会体会到现实生活中处处都有现代分析数学的美学基因. 例如, 线性泛函分析中有一个著名的共鸣定理, 它是说定义在 Banach 空间上逐点有界的有界线性算子族必定一致有界, 这是一个非常优美的数学定理. 如果把这个定理所蕴涵的哲理应用到社会学中, 那么我们认为又可以得到另一条社会学定律: 在好的社会环境中, 有好的社会制度作后盾, 每个人都善良, 整个社会必善良; 反之, 如果社会贪得无厌, 那么该社会中必定有某些个人贪得无厌.

上面我们对现代分析这门学科中最优美的核心内容及其在社会学中的巧妙应用作了简单介绍, 接下来我们着重谈谈本书的写作动机及其特色. 本书作者长期从事《泛函分析》《Banach 空间理论》《非线性分析》《现代分析基础》等数学本科及应用数学硕士研究生课程的教学工作. 写作本书的主要目的, 是将作者积累多年的教学经验以及对现代分析这门学科的认识, 整理成一本兼具教材与专著特色的书稿, 为青年读者提高分析数学素养尽一点微薄之力. 本书将以"突出基础, 强调应用; 关注背景, 启迪创新"为写作指导思想, 努力追求"叙述简洁、文字生动、意境高雅、起点容易、视野开阔、结构新颖"的写作境界.

丰富的数学思想通常蕴涵在数学概念中, 深刻的数学概念往往能把过去的知识统一起来, 同时又能为未来的发展留下伏笔. 本书的最大特色是介绍重大数学概念及其相关的重大结果时, 基本上都有背景聚焦、相关链接、基础训练与拓展这三部分内容, 帮助读者寻找数学思想的源头及其发展轨迹, 让读者找到"众里寻他千百度, 蓦然回首, 那人却在灯火阑珊处"的美好感觉.

现代分析无疑属于高度抽象数学的范畴. 现实社会中, 很少有人会本能地喜欢抽象的东西, 而且学好数学的最大障碍在于人们在处理抽象概念能力方面具有天然的局限性, 这是不争的事实. 本书尽量通过生动的实例佐证, 运用通俗的直观语言解释抽象深奥的理论, 帮助读者从感性的现实世界迈向抽象的数学世界寻找通道, 追求在抽象的高层次上重新获得可洞察、易把握的直观, 努力达到"昨夜西风凋碧树, 独上高楼, 望尽天涯路"的境界. 这是本书力求体现的第二个特色.

学好数学的关键在于学会变换情境去发现问题、探索规律、寻找证明. 数学历史上许多重大发明都源自数学家发现一种新奇的视角去看问题, 帮助学生学会提出问题是当今我国各个层次的数学教育急需解决的重大课题. 本书的第三个特色是力求引导读者用独特的视角去发现问题、解决问题, 用简洁的形式去表述问题, 激发读者自觉地欣赏和喜欢现代分析这门优美学科, 努力进入"衣带渐宽终不悔, 为伊

消得人憔悴"的学习状态.

本书在写作过程中, 参阅了大量的文献, 借鉴了他人的不少优秀成果, 这里谨对成果被引用的作者表示深深的感谢. 本书在出版过程中得到高利新教授、王玮明教授、倪仁兴教授、张宗劳教授、何文明教授、应裕林副教授、方均斌副教授、黄忠裕副教授、黄友初副教授、赵才地副教授、郭洪兴副教授、何明昌副教授、谭金芝副教授、樊明宇副教授、章勤琼博士、杨胜博士、于恒国博士、王迪博士以及我的研究生陈远兰、张章、李树茂、毛蓓蕾、岳芳珍、李群芳、王娜、常改利、项凌云等的大力帮助; 程国正副教授仔细通读本书的初稿并提出许多宝贵的修改建议; 吾妻钱亦青老师在书稿打印及查阅资料方面付出巨大的努力; 本书的正式出版得到浙江省重点建设学科、浙江省省级教学团队、温州大学重点学科、温州大学重点建设专业、温州大学研究生精品课程等建设基金资助, 在此一并表示感谢.

温州大学数学与信息科学学院
赵焕光
2013 年 9 月 28 日

目　　录

第 1 章　三类抽象空间的结构及性质

精美绝伦的经典分析奠基在欧几里得空间这片古老沃土上, 丰富多彩的现代分析却需要与奇妙无比的抽象空间伴随. 数学家们建立抽象空间理论的内在动力来自两个方面: 其一是 19 世纪后期因更新数学基础而引发的公理化浪潮所推动; 其二是源自数学家们试图将经典分析结果拓展到函数空间中的数学探索需要. 所谓抽象空间, 就是在其元素间规定了某种关系的集合, 而这种关系通常借助于一组数学公理来刻画. 本章仅介绍现代分析学中所涉及的三类最基本的抽象空间: 距离空间、赋范线性空间与内积空间.

1.1　距离空间的结构及性质

1.1.1　距离空间的定义与例子

背景聚焦　数学家们把日常生活中的距离概念的本质属性 (距离三公理) 抽象出来构建抽象距离与距离空间的概念, 他们引进距离这种数学工具的目的, 在于研究抽象空间的性质, 并用于解决实际问题. 这方面的最初工作归属于法国数学家弗雷歇 (Fréchet, 1878—1973), 他在 1906 年写的博士论文中将当时来自微分方程和积分方程中函数族的概念统一表述为函数空间, 并引入距离与极限概念, 为泛函分析这门学科的诞生作出了开创性工作.

1. 距离与收敛概念

定义 1.1.1 (距离空间)　给定非空集合 X. 如果按照某一法则, 对于 X 中的任意两个元素 x, y, 都有唯一确定的实数 $d(x,y)$ 与之对应, 且满足下述三条公理:

(1) $d(x,y)\geqslant 0$, 而且 $d(x,y)=0$ 当且仅当 $x=y$(非负性);

(2) $d(x,y)=d(y,x)$(对称性);

(3) $d(x,y)\leqslant d(x,z)+d(z,y)$(三角不等式),

那么称 d 是 X 上的距离函数, 并称 $d(x,y)$ 为 x 与 y 之间的距离.

配备了距离 d 的集合 X 称为一个距离空间 (也称度量空间), 简记作 (X,d). 在不至于引起混淆的情形下可写作 X(例如, 常用的实数集 $\mathbf{R}$, 二维实平面 $\mathbf{R}^2$ 等).

给定距离空间 (X,d), 如果对于 X 中的非空子集 Y, 仍以 X 上的距离作为 Y 上的距离, 那么 Y 也是距离空间, 并称它为 X 的子空间, 简记作 $(Y,d)\subset(X,d)$.

相关链接　给定距离空间 (X,d), 可派生出下述相关概念:

(i) 给定 $x_0 \in X$, $r > 0$, 称点集 $B(x_0, r) = \{x \in X | d(x, x_0) < r\}$ 为以 x_0 为中心 r 为半径的开球, 相应地, 称 $\bar{B}(x_0, r) = \{x \in X | d(x, x_0) \leqslant r\}$ 为闭球;

(ii) 给定 X 的非空子集 A, B, 称 $d(A, B) = \inf\{d(x, y) | x \in A, y \in B\}$ 为集合 A 和 B 之间的距离. 特别地, 当 A 为单点集 $\{a\}$ 时, 称 $d(\{a\}, B)$ 为点 a 到集合 B 的距离, 并简记作 $d(a, B)$;

(iii) 给定 X 的非空子集 A, 称 $\operatorname{diam}(A) = \sup\{d(x, y) | x, y \in A\}$ 为集合 A 的直径;

(iv) 给定 X 的非空子集 A. 如果存在 X 中的一个开球 $B(x_0, r) \supset A$, 则称 A 是 X 中的有界集 (等价于 $\operatorname{diam}(A) < +\infty$).

定义 1.1.2 (收敛)　设 (X, d) 是距离空间, $\{x_n\} \subset X$, $x_0 \in X$. 若

$$\lim_{n \to \infty} d(x_n, x_0) = 0,$$

则称点列 $\{x_n\}$ 按距离 d 收敛于 x_0, 记作 $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = x_0$ 或 $x_n \to x_0$, 并称 x_0 为点列 $\{x_n\}$ 的极限.

相关链接　由收敛定义及距离三角不等式不难证明下述命题成立:

(i) 距离空间中的收敛点列的极限必唯一;

(ii) 距离空间中的收敛点列必有界;

(iii) (四边形不等式) 给定距离空间 (X, d), 则 $\forall x, y, x_1, y_1 \in X$ 有

$$|d(x, y) - d(x_1, y_1)| \leqslant d(x, x_1) + d(y, y_1);$$

(iv) 在距离空间 (X, d) 中, 若 $x_n \to x_0$, $y_n \to y_0$, 则

$$d(x_n, y_n) \to d(x_0, y_0);$$

(v) 在距离空间 (X, d) 中, 若 A 是 X 的非空子集, 则 $\forall x, x_0 \in X$ 有

$$|d(x, A) - d(x_0, A)| \leqslant d(x, x_0).$$

证　仅证 (ii) 与 (v) 为例. 设距离空间 (X, d) 中的点列 $x_n \to x_0$, 对 $\varepsilon = 1$, 存在 N, 当 $n > N$ 时有 $d(x_n, x_0) < 1$, 于是当 $n \geqslant 1$ 时有

$$d(x_n, x_0) < d(x_1, x_0) + d(x_2, x_0) + \cdots + d(x_N, x_0) + 1 \triangleq \alpha,$$

即 $\{x_n\} \subset B(x_0, \alpha)$, (ii) 得证;

由定义及三角不等式, 对 $\forall y \in A$ 有

$$d(x, A) \leqslant d(x, y) \leqslant d(x, x_0) + d(x_0, y),$$

两边关于 y 取下确界及下确界的性质可得

$$d(x,A) \leqslant d(x,x_0) + d(x_0,A),$$

同理可得 $d(x_0,A) \leqslant d(x_0,x) + d(x,A)$, 再由对称性, (v) 得证.

2. 几个具体例子

例 1.1.1 (离散距离空间) 设 X 是一个任意的非空集合, 规定

$$d(x,y) = \begin{cases} 1, & x \neq y, \\ 0, & x = y. \end{cases}$$

不难验证 (X,d) 是距离空间, 且 (X,d) 中的收敛点列必是常点列 (从某一项开始所有的项都相同), 这个距离空间通常称为离散距离空间或平凡距离空间.

点评 光从表面上看, 例 1.1.1 似乎没有多少实际意义, 例如, 在实数集上定义离散距离之后成为一个平凡的距离空间, 在该空间中, 实数理论中的许多精美理论完全丧失了. 然而, 这个简单的特例对研究距离空间的理论却是很有用的. 一方面它说明在任何集合上都可以定义距离使其成为距离空间 (普适性); 另一方面它在构造数学反例时常起重要作用 (特殊性). 特别地, 利用它可以说明欧几里得空间的一些性质在一般的距离空间中并非一定成立. 当然, 我们更感兴趣的是内涵更为丰富的其他距离空间.

例 1.1.2 (n 维欧氏空间) 设 $\mathbf{R}^n = \{x = (\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n) | \xi_i \in \mathbf{R}, 1 \leqslant i \leqslant n\}$, 我们规定

$$d_2(x,y) = \left(\sum_{i=1}^{n} |\xi_i - \eta_i|^2 \right)^{1/2},$$

其中 $x = (\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n)$, $y = (\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_n) \in \mathbf{R}^n$. 利用柯西不等式

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i \right)^2 \leqslant \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2 \right) \cdot \left(\sum_{i=1}^{n} b_i^2 \right)$$

及定义 1.1.1 可推证 d_2 是 $\mathbf{R}^n$ 上的距离, 通常称 $(\mathbf{R}^n, d_2)$ 为 n 维欧几里得空间, 并简记为 $\mathbf{R}^n$. 进一步, 在 $\mathbf{R}^n$ 上按 d_2 收敛等价于按坐标收敛.

例 1.1.3 (连续函数空间) 设 $C[a,b] = \{x | x : [a,b] \to \mathbf{R}$ 连续 $\}$, 规定

$$d(x,y) = \max_{a \leqslant t \leqslant b} |x(t) - y(t)|, \quad \forall x, y \in C[a,b].$$

利用闭区间上的连续函数的性质, 不难证明 d 是 $C[a,b]$ 上的距离, 通常用 $C[a,b]$ 表示距离空间 $(C[a,b], d)$. 进一步, 在 $C[a,b]$ 中点列 $\{x_n\}$ 按距离 d 收敛于 x_0 等价于连续函数列 $\{x_n\}$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛于连续函数 x_0.

例 1.1.4 (实数列空间 s) 设 $s=\{x|x=\{\xi_i\},\xi_i\in\mathbf{R},i=1,2,\cdots\}$, 规定

$$d(x,y)=\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{2^i}\cdot\frac{|\xi_i-\eta_i|}{1+|\xi_i-\eta_i|},$$

其中 $x=\{\xi_i\}$, $y=\{\eta_i\}\in s$. 利用函数

$$\varphi(x)=\frac{x}{1+x}$$

在 $[0,+\infty)$ 上的单调性或者绝对值三角不等式可证 d 是 s 上的距离; 利用级数 $\sum\limits_{i=1}^{\infty}\frac{1}{2^i}$ 的收敛性及 $\varphi(x)=\frac{x}{1+x}$ 在 $[0,+\infty)$ 上的单调性可证在 s 上点列按 d 收敛等价于按数列的各个坐标收敛.

例 1.1.5 (可测函数空间 S) 设 $S=\{x|x:[a,b]\to\mathbf{R}$ 是 Lebesgue 可测函数 $\}$, 我们规定

$$d(x,y)=\int_{[a,b]}\frac{|x(t)-y(t)|}{1+|x(t)-y(t)|}\mathrm{d}t,\quad \forall x,y\in S.$$

利用函数 $\varphi(x)=\frac{x}{1+x}$ 在 $[0,+\infty)$ 上的单调性及 Lebesgue 积分的性质可以证明 d 是 S 上的距离, 而且 S 上的点列收敛等价于可测函数列依测度收敛.

1.1.2 距离空间中的点集构造

本小节借助通常的几何术语, 对距离空间中点集的构造给出形象化的描述, 建立若干基本概念, 这些概念对于学习与研究泛函分析都是随时用到的基本知识. 此外, 这些基本概念的几何直观是极为明显的, 因此值得我们充分加以利用, 但又必须注意不能用直观想象来代替逻辑论证.

定义 1.1.3 设 (X,d) 是距离空间, $A\subset X$, $x_0\in A$.

(i) 若 $\exists\delta>0$ 使得 $B(x_0,\delta)\subset A$, 则称 x_0 是 A 的内点; 集合 A 的内点全体记作 A^0, 称其为集合 A 的内核;

(ii) 若 $\forall\delta>0$, 都有 $B(x_0,\delta)\cap A\neq\varnothing$, 则称 x_0 为 A 的接触点; 集合 A 的接触点全体记作 $\bar{A}$, 称其为 A 的闭包;

(iii) 若 $\forall\delta>0$, 都有 $B(x_0,\delta)\cap(A\backslash\{x_0\})\neq\varnothing$, 则称 x_0 为 A 的聚点 (或极限点); 集合 A 的聚点全体记作 A', 称其为 A 的导出集;

(iv) 若 $\forall\delta>0$, 都有 $B(x_0,\delta)\cap A\neq\varnothing$ 且 $B(x_0,\delta)\cap A^C\neq\varnothing$(其中 A^C 为 A 的补集), 则称 x_0 为 A 的边界点; 集合 A 的边界点全体记作 ∂A, 称其为 A 的边界;

(v) 若 $\bar{A}=A$, 则称 A 为闭集; 若 $A=A^0$, 则称 A 为开集.

相关链接 由定义 1.1.3 不难证明下述命题成立:

(i) 在任何距离空间 (X,d) 中, $\varnothing$ 与 X 既是开集又是闭集;

(ii) 在离散距离空间 (X,d) 中, X 的任何子集既是开集也是闭集;

(iii) 距离空间中的任何开球是开集, 闭球是闭集;

(iv) 距离空间 (X,d) 中的集合 A 是开集当且仅当 A^C 是闭集;

(v) 在距离空间中, 开集类关于有限交、任意并运算封闭; 闭集类关于有限并、任意交运算封闭;

(vi) 对于距离空间 (X,d) 中的任何集合 A, 都有

$$A^{00}=A^0, \quad \overline{\overline{A}}=\bar{A}, \quad A''\subset A',$$

从而 A^0 是开集, $\bar{A}$ 与 A' 都是闭集.

证 仅证 (vi) 为例. $\forall x\in A^0$, $\exists\delta>0$ 使得 $B(x,\delta)\subset A$. 任取 $y\in B(x,\delta)$, 令 $\delta'=\delta-d(x,y)$, 则有 $B(y,\delta')\subset B(x,\delta)\subset A$, 因此 $y\in A^0$, 从而有 $B(x,\delta)\subset A^0$, 因此 $x\in A^{00}$, 于是有 $A^0\subset A^{00}$; $A^{00}\subset A^0$ 显然, 故 $A^{00}=A^0$.

下证 $A''\subset A'$. 任取 $x\in A''$, 由定义 $\forall\delta>0$, 可取 $y\in B(x,\delta)\cap(A''\backslash\{x\})$, 令 $\varepsilon=\min\{\delta-d(x,y),d(x,y)\}$, 则有 $B(y,\varepsilon)\subset B(x,\delta)$ 而且 $x\notin B(y,\varepsilon)$, 由 $y\in A'$ 可取 $z\in B(y,\varepsilon)\cap(A\backslash\{y\})$, 此时必有 $z\in B(x,\delta)\cap(A\backslash\{x\})$, 于是有 $x\in A'$, 这样证得 $A''\subset A'$. 同理可证 $\overline{\overline{A}}=\bar{A}$. 证毕.

命题 1.1.1(聚点等价刻画) 设 (X,d) 是距离空间, A 是 X 的非空子集, $x_0\in X$. 下列陈述相互等价:

(1) $x_0\in A'$;

(2) $\forall\delta>0$, $B(x_0,\delta)\cap A$ 无限集;

(3) 存在两两互异的点列 $\{x_n\}\subset A$ 使得 $x_n\to x_0$.

证 (1) $\Rightarrow$(2): 若有 $B(x_0,\delta)\cap A=\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$, 可设 $x_0\notin\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$, 令 $\delta'=\min\limits_{1\leqslant i\leqslant n}\{d(x_i,x_0)\}$, 则 $B(x_0,\delta')\cap(A\backslash\{x_n\})=\varnothing$, 这与 $x_0\in A'$ 矛盾;

(2) $\Rightarrow$(3): 令 $\delta_n=\dfrac{1}{n}$, 归纳地, 取 $x_n\in B(x_0,\delta_n)\cap(A\backslash\{x_1,x_2,\cdots,x_{n-1}\})$, $n=1,2,\cdots$, 则 $\{x_n\}$ 两两互异而且 $x_n\to x_0$;

(3) $\Rightarrow$(1): 显然. 证毕.

命题 1.1.2 (接触点等价刻画) 设 (X,d) 是距离空间, A 是 X 的非空子集, $x_0\in X$. 下列陈述相互等价:

(1) $x_0\in\bar{A}$; (2) $x_0\in A\cup A'$;

(3) 存在点列 $\{x_n\}\subset A$, 使得 $x_n\to x_0$; (4) $d(x_0,A)=0$.

证明留作练习.

命题 1.1.3 (运算相互表示) 设 A 是距离空间 (X,d) 中的非空子集. 下述运算关系成立:

(1) $\bar{A} = A^{C0C} = A^0 \cup \partial A$;

(2) $A^0 = (\overline{A^C})^C = \bar{A}\backslash\partial A = A\backslash\partial A$;

(3) $\partial A = \bar{A}\cap\overline{A^C} = \bar{A}\backslash A^0$.

证　仅证 $\bar{A} = A^{C0C}$ 与 $A^0 = (\overline{A^C})^C$ 为例.

由

$$\begin{aligned} x \notin \bar{A} &\Leftrightarrow \exists\delta > 0 \text{使得} B(x,\delta)\cap A = \varnothing \\ &\Leftrightarrow \exists\delta > 0 \text{使得} B(x,\delta) \subset A^C \Leftrightarrow x \in (A^C)^0, \end{aligned}$$

得 $(\bar{A})^C = (A^C)^0$, 即 $\bar{A} = A^{C0C}$;

再由

$$\begin{aligned} x \in A^0 &\Leftrightarrow \exists\delta > 0 \text{使得} B(x,\delta) \subset A \\ &\Leftrightarrow \exists\delta > 0 \text{使得} B(x,\delta)\cap A^C = \varnothing \Leftrightarrow x \notin \overline{A^C} \Leftrightarrow x \in (\overline{A^C})^C, \end{aligned}$$

得 $A^0 = (\overline{A^C})^C$. 证毕.

命题 1.1.4 (闭集等价刻画)　设 A 是距离空间 (X,d) 的子集. 下列陈述等价:

(1) A 是闭集;

(2) $\bar{A} \subset A$;

(3) $\partial A \subset A$;

(4) $A' \subset A$;

(5) A 关于极限运算封闭 (即 A 中的任何收敛序列的极限属于 A).

证明留作练习.

1.1.3　稠密与可分

我们在实分析中已经知道, 有理数集是可数集, 实数集是不可数集, 每个实数都可以用有理数近似代替 (或逼近). 直观地说, “少量” 的元素可以替代 “大量” 的元素, 这种思想在现代分析中具有广泛应用, 稠密与可分就是由这种思想派生出来的数学概念.

定义 1.1.4 (稠密与可分)　设 (X,d) 是距离空间, $A, B \subset X$. 若 $\bar{A} \supset B$, 则称集合 A 在集合 B 中稠密; 若有 $\bar{A} = X$, 则称 A 为 X 的稠密子集; 若 X 有可数稠密子集, 则称 (X,d) 为可分距离空间.

相关链接　*由定义 1.1.4 可证稠密具有传递性 (若 A 在 B 中稠密, B 在 C 中稠密, 则 A 在 C 中稠密); A 在 B 中稠密并不意味着 $A \subset B$(甚至有 $A \cap B = \varnothing$); 离散距离空间 (X,d) 中的稠密子集只有 X 本身.*

命题 1.1.5 (稠密等价刻画)　设 (X,d) 是距离空间, $A, B \subset X$. 下列陈述等价:

(1) A 在 B 中稠密 (即 $B \subset \bar{A}$);

(2) $\forall \delta > 0$, 有 $B \subset \bigcup\limits_{x\in A} B(x,\delta)$;

(3) $\forall x \in B$, 存在点列 $\{x_n\} \subset A$ 使得 $x_n \to x$.

证明思路 (1)$\Rightarrow$(2): 显然;

(2) $\Rightarrow$(3): $\forall x \in B$, 对 $\delta_n = \dfrac{1}{n}$, 存在 $x_n \in A$ 使得 $x \in B(x_n, \delta_n)$, 显然 $x_n \to x$;

(3) $\Rightarrow$(1): 显然.

命题 1.1.6 (可分遗传性) 若 (X,d) 是可分的距离空间, $X_0 \subset X$, 则 (X_0,d) 也是可分的距离空间.

证 设 $\{x_n\}$ 是 X 的稠密子集. $\forall n,k$, 若有 $B(x_n,1/k)\cap X_0 \neq \varnothing$, 任取 $y_{n,k} \in B(x_n,1/k)\cap X_0$, 易见 $\{y_{n,k}\}$ 是 X_0 的可数稠密子集.

事实上, $\forall x\in X_0$, 由 $\overline{\{x_n\}} = X \supset X_0$, $\forall k$, 存在 n 使得$x\in B(x_n,1/k)$, 由 $B(x_n,1/k)\cap X_0 \neq \varnothing$ 及 $\{y_{n,k}\}$ 的构造, 必有

$$y_{n,k} \in B(x_n,1/k),$$

从而 $y_{n,k} \in B(x,2/k)$, 因此 $\overline{\{y_{n,k}\}} \supset X_0$. 证毕.

例 1.1.6 证明: 有理数集与无理数集都在实数集中稠密.

证 只需证任意开区间 (x,y) 中都有有理数与无理数. 考虑实数 α 的取整 $[\alpha]$, 有

$$[2/(y-x)] \leqslant 2/(y-x) < [2/(y-x)]+1.$$

令 $n = [2/(y-x)]+1$, 则有 $n(y-x) > 2$, 令 $m = [nx]+1$, 则有 $m \in (nx,ny)$, 从而 $m/n \in (x,y)$.

再由刚才所证, 任取有理数 $q \in (\sqrt{2}x, \sqrt{2}y)$, 则有 $q/(\sqrt{2}) \in (x,y)$. 证毕.

例 1.1.7 证明: n 维欧几里得空间 $\mathbf{R}^n$ 与连续函数空间 $C[a,b]$ 都是可分距离空间.

证明思路 $\mathbf{R}^n$ 可分可由有理数集的稠密性证之; $C[a,b]$ 的可分性可由数学分析中的魏尔斯特拉斯逼近定理 (多项式一致逼近连续函数) 及有理数稠密性证之.

例 1.1.8 (有界数列空间) 设 $l^\infty = \left\{x \middle| x = \{\xi_i\}, \sup\limits_{i\geqslant 1}|\xi_i| < +\infty\right\}$, 规定

$$d(x,y) = \sup_{i\geqslant 1}|\xi_i - \eta_i|, \quad \forall x = \{\xi_i\}, \quad y = \{\eta_i\} \in l^\infty.$$

证明: (l^∞, d) 是不可分的距离空间.

证 易证 (l^∞,d) 是距离空间. 令 $M = \{x | x = \{\xi_i\}, \xi_i = 0 \text{ 或 } 1, i = 1,2,\cdots\}$, 易见 $M \subset l^\infty$ 是不可数集, 而且当 $x,y \in M$, 而且 $x \neq y$ 时, 有 $d(x,y) = 1$. 如果 l^∞ 有可数稠密子集 $\{x_k\}$, 由稠密等价刻画, 有

$$M \subset l^\infty \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} B(x_k, 1/3),$$