“十二五”规划大学教材

GAILVLUNYUSHULITONGJI

概率论与数理统计

夏　薇　葛礼霞◎主编

东北师范大学出版社
NORTHEAST NORMAL UNIVERSITY PRESS

概率论与数理统计

概率论与数理统计

主　编　夏　微　葛礼霞

东北师范大学出版社

长　春

图书在版编目（CIP）数据

概率论与数理统计 / 夏微，葛礼霞主编. —长春 ：东北师范大学出版社，2012. 5

ISBN 978-7-5602-8313-5

Ⅰ. ①概… Ⅱ. ①夏… ②葛… Ⅲ. ①概率论-高等学校-教材②数理统计-高等学校-教材 Ⅳ. ①O21

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2012）第 103697 号

□责任编辑：王春彦　□封面设计：赖氏图书
□责任校对：赵世鹏　□责任印制：张允豪

东北师范大学出版社出版发行
长春净月经济开发区金宝街 118 号（邮政编码：130117）
电话：010－82920765
传真：010－82920765
网址：http://www.nenup.com
电子函件：sdcbs@mail.jl.cn
赖氏图书制版
北京市彩虹印刷有限责任公司印装
2012 年 5 月第 1 版　2012 年 5 月第 1 次印刷
幅面尺寸：185 mm×260 mm　印张：13.25　字数：339 千字

定价：26.00 元

前言

概率论与数理统计是高等院校理工科专业的必修课，同时也是工学和经济学硕士研究生入学考试数学科目的必考内容。

从学科分类看，概率论、数理统计都是近代数学的分支，它们在科学研究、工程技术、国民经济等领域都有广泛的应用。概率论是对随机现象统计规律演绎的研究，而数理统计是对随机现象统计规律归纳的研究。虽然两者在方法上有着明显的不同，但它们却是相互渗透、相互联系的。

《概率论与数理统计》由著名的一线教师编写，更加贴近学生，符合教学规律。本书主编为黑龙江农垦职业学院的夏微与牡丹江师范学院理学院的葛礼霞，其中夏微编写第一章至第五章，葛礼霞编写第六章至第九章。

本书在编写过程中努力做到通俗易懂、简详得当，在选材和叙述上尽量做到联系实际，突出基本内容的掌握和基本方法的训练，注重数理统计的应用，所选用的例子不仅能加深对基本概念和基本方法的了解，同时也能提高读者学习的兴趣。为了帮助读者巩固所学知识，本书在习题的选择上也做了些努力，既有基本训练题，也有较为复杂的综合应用题，这些题目都是饶有趣味的，有的就能直接应用于实际，读者可酌量做一部分以开拓思路，加深理解。

编　者

目 录 CONTENTS

第一章 随机事件与概率

自然界和社会上发生的现象是多种多样的，概括起来可分为两类现象:确定性的和随机性的. 例如:向上抛一石子必然下落;同性电荷相互排斥，异性电荷相互吸引;太阳必然从东方升起;水在自然条件下温度达到 100℃时必然沸腾，温度为 0℃时必然结冰等，这类现象称为确定性现象，它们在一定的条件下一定会发生. 另有一类现象，在一定条件下，试验有多种可能的结果，但事先又不能预测是哪一种结果，此类现象称为随机现象. 例如:在相同条件下抛同一枚硬币，落地时面的朝向;用同一门炮向同一目标射击，弹着点的确切位置;测量一个物体的长度，该次测量误差的大小;股票市场将来某时刻的指数;从一批电视机中随便取一台，该台电视机的寿命长短等都是随机现象. 人们在长期的生产和生活实践中发现对于随机现象，在一次试验或观察之前虽然不能预知确定的结果，但大量的重复试验或观察下，其结果却呈现出某种规律性. 例如，多次重复抛一枚硬币得到正面朝上大致有一半;同一门炮射击同一目标的弹着点按照一定规律分布等. 这种在大量重复试验或观察中所呈现出的固有规律称为**统计规律性**. **概率论与数理统计，就是研究和揭示随机现象统计规律性的一门数学学科.**

随机现象总是与一定的条件密切联系的. 例如:某超市某柜台的营业额，在指定的一天内，营业额多少是一个随机现象，而“指定的一天内”就是条件，若换成五天内，一个月内。营业额就会不同. 如将营业额换成顾客流量，差别就会更大，故随机现象与一定的条件是有密切联系的.

概率论与数理统计的应用是非常广泛的，几乎渗透到所有科学技术领域，如工业、农业、国防与国民经济的各个部门. 例如，工业生产中，可以应用概率统计方法进行质量控制. 工业试验设计，产品的抽样检查等. 还可使用概率统计方法进行气象预报、水文预报和地震预报等. 另外，概率统计的理论与方法正在向各基础学科、工程学科、经济学科渗透. 产生了各种边缘性的应用学科，如排队论、计量经济学、信息论、控制论、时间序列分析等.

第一节　样本空间、随机事件

一、随机试验(Random trial)

我们对客观世界现象的认识一般都是通过一定的观察或实验来实现的.

随机试验:对随机现象加以研究所进行的观察或实验,称为随机试验,简称试验,记为 E.

人们是通过试验去研究随机现象的,在这里,我们把试验看作是一个广泛的术语,具体来说,若一个试验具有下列三个特点:

1. 可以在相同的条件下重复地进行;
2. 每次试验的可能结果不止一个,并且事先可以明确试验所有可能出现的结果;
3. 进行一次试验之前不能确定哪一个结果会出现. 则这一试验为随机试验.

随机试验的一些例子:

E_1:抛一枚硬币,观察正面 H 和反面 T 出现的情况.

E_2:掷两颗骰子,观察出现的点数.

E_3:在一批电视机中任意抽取一台,测试它的寿命.

E_4:城市某一交通路口,观察其一小时内的汽车流量.

E_5:记录某一地区一昼夜的最高温度和最低温度.

E_6:检查生产流水线上的一件产品是否合格.

E_7:统计某商店某柜台一天的营业额.

二、样本空间(Sample space)与随机事件(Random event)

对于一个随机试验,尽管在每次试验之前不能预知试验的结果,但事先可以明确该试验所有可能出现的基本结果,这些结果满足:

1. 每进行一次试验,必然出现且只能出现其中的一个基本结果;
2. 任何结果,都是由其中的一些基本结果所组成.

样本空间:随机试验 E 的所有基本结果组成的集合称为**样本空间**,记为 Ω. 样本空间的元素,即 E 的每个基本结果,称为**样本点**.

下面写出前面提到的试验互 $E_k(k=1,2,3,4,5,6,7)$的样本空间 Ω_k:

Ω_1:$\{H,T\}$;

Ω_2:$\{(i,j)\mid i,j=1,2,3,4,5,6\}$;

Ω_3:$\{t\mid t\geqslant 0\}$;

Ω_4:$\{0,1,2,3,\cdots\}$;

Ω_5:$\{(x,y)\mid T_0\leqslant x\leqslant y\leqslant T_1\}$,这里 x 表示最低温度,y 表示最高温度,并设这一地区温度不会小于 T_0 也不会大于 T_1。

Ω_6:$\{Y,N\}$,其中 Y 表示合格,N 表示不合格;

Ω_7:$\{q\mid q\geqslant 0\}$;

随机事件:随机试验 E 的样本空间 Ω 的子集称为 E 的随机事件,简称事件,一般用大写字母 $A,B,C,\cdots$表示.

事件发生:在每次试验中,当且仅当一个事件 A 中的一个样本点出现时,称这一**事件发生**.

例如,在掷骰子的试验中,可以用 A 表示"出现点数为奇数"这个事件,若试验结果是"出现 3 点",就称事件 A 发生.同样,"出现 5 点",事件 A 也发生.

特别地,由一个样本点组成的单点集(亦即基本结果),称为**基本事件**.例如,试验 E_1 有两个基本事件$\{H\}$、$\{T\}$;试验 E_2 有 36 个基本事件$\{(1,1)\}$、$\{(1,2)\}$、$\cdots$、$\{(6,6)\}$.

每次试验中都必然发生的事件,称为**必然事件**.样本空间 Ω 包含所有的样本点,它是 Ω 自身的子集,每次试验中都必然发生,故它就是一个必然事件.因而必然事件我们也用 Ω 表示.在每次试验中不可能发生的事件称为**不可能事件**.空集 $\varnothing$ 不包含任何样本点,它作为样本空间的子集,在每次试验中都不可能发生,故它就是一个不可能事件.因而不可能事件我们也用 $\varnothing$ 表示.

三、事件之间的关系与运算

事件是一个集合,因而事件间的关系与事件的运算.可以用集合之间的关系与集合的运算来处理,但在这里要注意事件的概率意义.

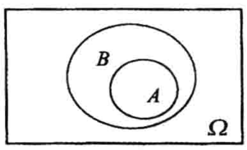
下面给出这些关系和运算在概率论中的提法,并根据事件发生的含义给出它们在概率论中的含义.

1. **包含关系**

如果事件 A 发生必然导致事件 B 发生,则称事件 A 包含于事件 B(或称事件 B 包含事件 A),记作 $A\subset B$(或 $B\supset A$),如图 1-1.

若 $A\subset B$ 且 $B\subset A$,则称事件 A 与 B 相等(或等价),记为 $A=B$.

与集合论相似,规定对于任一事件 A,有 $\varnothing\subset A$.显然,对于任一事件 A,有 $A\subset\Omega$.

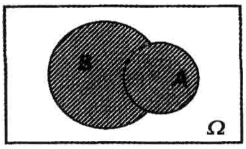


$A\subset B$

图 1-1

2. **和事件**

"事件 A 与 B 中至少有一个发生"的事件称为 A 与 B 的和事件.简称和,记为 $A\cup B$ 或 $A+B$.从集合论的角度描述就是 A 和 B 的并集,如图 1-2.



$A\cup B$

图 1-2

由事件并的定义，立即得到：

对任一事件 A，有

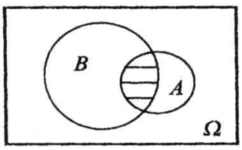
$$A\cup\Omega=\Omega,A\cup\varnothing=A.$$

$A=\bigcup\limits_{i=1}^{n}A_i$ 表示"$A_1,A_2,\cdots,A_n$ 中至少有一个事件发生"这一事件.

$A=\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}A_i$ 表示"可列无穷多个事件 A_i 中至少有一个发生"这一事件.

3. **积事件**

"事件 A 与 B 同时发生"的事件称为 A 与 B 的积事件，简称积（或交），记为 $A\cap B$ 或 AB. 从集合论的角度描述就是 A 和 B 的交集，如图 1-3.



$A\cap B$

图 1-3

由事件积的定义，立即得到：

对任一事件 A，有

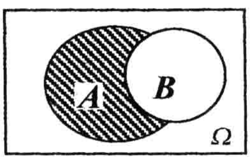
$$A\cap\Omega=A;A\cap\varnothing=\varnothing.$$

$B=\bigcap\limits_{i=1}^{n}B_i$ 表示"$B_1,\cdots,B_n$ 这 n 个事件同时发生"这一事件.

$B=\bigcap\limits_{i=1}^{\infty}B_i$ 表示"可列无穷多个事件 B_i 同时发生"这一事件.

4. **差事件**

"事件 A 发生而 B 不发生"的事件称为 A 与 B 的差事件，简称差，记为 $A-B$，如图 1-4. 由事件差的定义，立即得到：



$A-B$

图 1-4

对任一事件 A，有

$$A-A=\varnothing;A-\varnothing=A;A-\Omega=\varnothing.$$

5. **互不相容**

如果两个事件 A 与 B 不可能同时发生，则称事件 A 与 B 为互不相容（互斥），记作 $A\cap B=\varnothing$，如图 1-5.

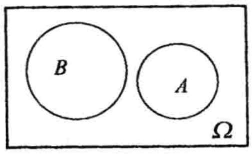


图 1-5

基本事件是两两互不相容的.

6. **对立事件**

若 $A\cup B=\Omega$ 且 $A\cap B=\varnothing$，则称事件 A 与事件 B 互为对立事件（逆事件）.

A 的对立事件记为 $\overline{A}$，$\overline{A}$ 是由 Ω 中所有不属于 A 的样本点组成的事件，它表示"A 不发生"这样一个事件. 显然 $\overline{A}=\Omega-A$，如图 1-6.

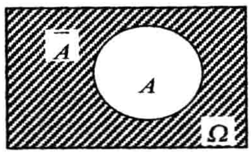


图 1-6

在一次试验中，若 A 发生，则 $\overline{A}$ 必不发生（反之亦然），即在一次试验中，A 与 $\overline{A}$ 二者只能发生其中之一，并且也必然发生其中之一。显然有 $\overline{\overline{A}}=A$. 对立事件必为互不相容事件，反之，互不相容事件未必为对立事件.

与集合运算的规律一样，一般事件的运算满足如下关系：

1. **交换律**

$A\cup B=B\cup A,A\cap B=B\cap A;$

2. **结合律**

$A\cup(B\cup C)=(A\cup B)\cup C,$

$A\cap(B\cap C)=(A\cap B)\cap C;$

3. **分配律**

$A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C),$

$A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C);$

4. $A-B=A\overline{B}=A-AB;$

5. **棣莫弗律**

$$\overline{A\cup B}=\overline{A}\cap\overline{B};\overline{A\cap B}=\overline{A}\cup\overline{B}$$

本节例讲

例 1

1. 设试验 E_1

将一枚硬币掷三次，观察正面 H，反面 T 出现的情况. A_1 表示“第一次出现的是 H”，即

$$A_1=\{H\ H\ H, H\ H\ T, H\ T\ H, H\ T\ T\}.$$

A_2：表示“三次出现同一面”，即

$$A_2=\{H\ H\ H, T\ T\ T\}.$$

2. 设试验 E_2

在一批灯泡中任意抽取一只，测试它的寿命. A_3 表示“寿命小于 1000 小时”，即

$$A_3=\{0\leqslant t<1000\}.$$

3. 设试验 E_3

记录某地一昼夜的最高温度和最低温度. 事件 A_4 表示“最高温度与最低温度相差 10℃，即

$$A_4=\{(x,y)\mid y-x=10, T_0\leqslant x\leqslant y\leqslant T_1\}$$

例 2 设事件 A 表示“甲种产品畅销，乙种产品滞销”，求其对立事件 $\overline{A}$.

解 设 B=“甲种产品畅销”，C=“乙种产品滞销”，则 $A=BC$，故 $\overline{A}=\overline{BC}=\overline{B}\cup\overline{C}=$“甲种产品滞销或乙种产品畅销”.

例 3 设 A,B,C 为三个事件，用 A,B,C 的运算关系表示下列事件：

())A 发生而 B 与 C 都不发生：$A\overline{B}\overline{C}$ 或 $A-B-C$ 或 $A-(C\cup B)$.

(2)A,B 都发生而 C 不发生：$AB\overline{C}$ 或 $AB-C$.

(3)A,B,C 至少有一个事件发生：$A\cup B\cup C$.

(4)A,B,C 至少有两个事件发生：$(AB)\cup(AC)\cup(BC)$.

(5)A,B,C 恰好有两个事件发生：$(AB\overline{C})\cup(AC\overline{B})\cup(BC\overline{A})$.

(6)A,B,C 恰好有一个事件发生：$(A\overline{B}\overline{C})\cup(B\overline{A}\overline{C}\cup(C\overline{A}\overline{B})$.

(7)A,B 至少有一个发生而 C 不发生：$(A\cup B)\overline{C}$.

(8)A,B,C 都不发生：$\overline{A\cup B\cup C}$或$\overline{A}\overline{B}\overline{C}$.

第二节　频率与概率

任一随机事件(除必然事件与不可能事件外)在一次试验中都有可能发生，也有可能不发生. 我们常常希望了解某些事件在一次试验中发生的可能性的大小，一般来说，总是希望用一个合适的数来度量事件在一次试验中发生的可能性大小. 为此，我们首先引入频率的概念，它描述了事件发生的频繁程度，进而我们再引出度量事件在一次试验中发生的

可能性大小的数——概率.

一、频率(Frequency)

某一次试验或观察中出现结果的偶然性并不等于说随机现象是毫无规律的，当我们对随机现象进行大量重复的试验或观察时，就会呈现出明显的规律性——频率的稳定性.

定义 1.1　设在相同的条件下，进行了 n 次试验. 若随机事件 A 在 n 次试验中发生了 k 次，则比值 k/n 称为事件 A 在这 n 次试验中发生的频率，记为 $f_n(A)=k/n$.

由定义 1.1 容易知，频率具有以下性质：

1. 对任一事件 A，有 $0\leqslant f_n(A)\leqslant 1$；
2. 对必然事件 Ω，有 $f_n(\Omega)=1$；
3. 若事件 A,B 互不相容，则

$$f_n(A\cup B)=f_n(A)+f_n(B).$$

一般地，若事件 $A_1,A_2,\cdots,A_m$ 两两互不相容，则

$$f_n(\bigcup_{i=1}^{m}A_i)=\sum_{i=1}^{m}f_n(A_i).$$

事件 A 发生的频率 $f_n(A)$ 表示 A 发生的频繁程度，频率大，事件 A 的发生就频繁，在一次试验中，A 发生的可能性也就大. 反之亦然. 因而，直观的想法是用 $f_n(A)$ 表示 A 在一次试验中发生可能性的大小. 但是，由于试验的随机性，即使同样是进行 n 次试验，$f_n(A)$ 的值也不一定相同. 大量实验证实，**随着重复试验次数 n 的增加，频率 $f_n(A)$ 会逐渐稳定于某个常数附近，而偏离的可能性很小——“频率稳定性”**，这就是我们所说的统计规律性. 这一事实说明了刻画事件 A 发生可能性大小的数——概率具有一定的客观存在性.（严格说来，这是一个理想的模型，因为我们在实际上并不能绝对保证在每次试验时，条件都保持完全一样，这只是一个理想的假设）.

历史上有一些统计学家做过大量“抛硬币”试验，如棣莫弗(De Morgan)、蒲丰(Buffon)和皮尔逊(Pearson)，他们的结果如表 1-1 所示.

表 1-1

试验者	掷硬币次数	出现正面次数	出现正面的频率
棣莫弗	2048	1061	0.5181
蒲丰	4040	2048	0.5069
皮尔逊	12000	6019	0.5016
皮尔逊	24000	12012	0.5005

可见出现正面的频率总在 0.5 附近摆动，随着试验次数增加，它逐渐稳定于 0.5. 这个 0.5 就反映正面出现的可能性的大小（同样反映反面出现的可能性大小）.

每个事件都存在一个这样的常数与之对应，因而可将频率 $f_n(A)$ 在 n 无限增大时逐渐趋向稳定的这个常数定义为事件 A 发生的概率. 这就是概率的统计定义.

定义 1.2　设事件 A 在 n 次重复试验中发生的次数为 k，当 n 很大时，频率 k/n 在某一数值 p 的附近波动，而随着试验次数 n 的增加，发生较大波动的可能性越来越小，则称数 p 为事件 A 发生的概率，记为 $P(A)=p$.

要注意的是，上述定义并没有提供确切的计算概率的方法，因为我们永远不可能依据它确切地定出任何一个事件的概率. 在实际中，我们不可能对每一个事件都做大量的试验，况且我们不知道 n 取多大才行；如果 n 取得很大，不一定能保证每次试验的条件都完全相同. 而且也没有理由认为，取试验次数为 $n+1$ 来计算频率，总会比取试验次数为 n 来计算频率更准确、更逼近所求的概率.

二、概率的公理化定义

前面给出的概率的统计定义很直观，但它在数学上是不严密的. 因为它是借助于频率的稳定性来定义的，而在频率的稳定性中，诸如"波动"和"常数"等都没有确切的含义. 例如，在掷硬币的随机试验中，我们无法确定出现正面的频率是在 0.5 还是 0.51 或 0.49 附近波动. 为了理论研究的需要，我们从频率的稳定性和频率的性质得到启发，给出概率的公理化定义.

定义 1.3　设 E 是随机试验，Ω 为其样本空间，A 为事件，对于每一个事件 A 赋予一个实数，记作 $P(A)$，如果 $P(A)$ 满足以下条件：

1. 非负性：$P(A)\geqslant 0$；

2. 规范性：$P(\Omega)=1$；

3. 可列可加性：对于两两互不相容的可列无穷多个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n,\cdots$，有

$$P(\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n)=\sum_{n=1}^{\infty}P(A_n),$$

则称实数 $P(A)$ 为事件 A 的概率(Probability).

当 $n\to\infty$ 时，频率 $f_n(A)$ 在一定意义下接近于概率 $P(A)$. 基于这一事实，我们往往用 n 大到"一定程度"的频率 $f_n(A)$ 作为 $P(A)$ 的近似值. 并有理由用概率 $P(A)$ 来表示事件 A 在一次试验中发生的可能性的大小.

由概率的公理化定义，可以推出概率的一些性质.

性质 1　$P(\varnothing)=0$.

证　令 $A_n=\varnothing(n=1,2,\cdots)$，则

$$\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n=\varnothing,\text{且 } A_iA_j=\varnothing(i\neq j,i,j=1,2,\cdots).$$

由概率的可列可加性得

$$P(\varnothing)=P(\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n)=\sum_{n=1}^{\infty}P(A_n)=\sum_{n=1}^{\infty}P(\varnothing),$$

而由 $P(\varnothing)\geqslant 0$ 及上式知 $P(\varnothing)=0$.

这个性质说明：不可能事件的概率为 0. 但逆命题不一定成立。

性质 2(有限可加性)　若 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 为两两互不相容事件，则有

$$P(\bigcup_{k=1}^{n}A_k)=\sum_{k=1}^{n}P(A_k).$$

证 令 $A_{n+1}=A_{n+2}=\cdots=\varnothing$,则 $A_iA_j=\varnothing$. 当 $i\neq j,i,j=1,2,\cdots$ 时,由可列可加性,得

$$P(\bigcup_{k=1}^{n}A_k)=P(\bigcup_{k=1}^{n}A_k)=\sum_{k=1}^{\infty}P(A_k)=\sum_{k=1}^{n}P(A_k).$$

性质 3 设 A,B 是两个事件,若 $A\subset B$,则有

$$P(B-A)=P(B)-P(A) \quad 或 \quad P(A)\leqslant P(B).$$

证 由 $A\subset B$,知 $B=A\cup(B-A)$且 $A\cap(B-A)=\varnothing$.

再由概率的有限可加性有

$$P(B)=P(A\cup(B-A))=P(A)+P(B-A)$$

即

$$P(B-A)=P(B)-P(A);$$

又由 $p(B-A)\geqslant 0$,得 $P(A)\leqslant P(B)$.

性质 4 对任一事件 A,$P(A)\leqslant 1$.

证 因为 $A\subset\Omega$,由性质 3 得 $P(A)\leqslant P(\Omega)=1$.

性质 5 对于任一事件 A,有

$$P(\overline{A})=1-P(A).$$

证 因为 $\overline{A}\cup A=\Omega,\overline{A}\cap A=\varnothing$,

由有限可加性,得

$$1=P(\Omega)=P(\overline{A}\cup A)=P(\overline{A})+P(A),$$

即

$$p(\overline{A})=1-P(A).$$

性质 6(加法公式) 对于任意两个事件 A,B 有

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB).$$

证 因为 $A\cup B=A\cup(B-AB)$且 $A\cap(B-AB)=\varnothing$,

由性质 2,3 得

$$P(A\cup B)=P(A\cup(B-AB))=P(A)+P(B-AB)=P(A)+P(B)-P(AB).$$

性质 6 还可推广到三个事件的情形. 例如,设 A_1,A_2,A_3 为任意三个事件,则有

$$P(A_1\cup A_2\cup A_3)=P(A_1)+P(A_2)+P(A_3)-P(A_1A_2)$$
$$-P(A_1A_3)-P(A_2A_3)+P(A_1A_2A_3).$$

一般地,设 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 为任意 n 个事件. 可由归纳法证得

$$P(A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n)=\sum_{i=1}^{n}P(A_i)-\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}P(A_iA_j)$$
$$+\sum_{1\leqslant i<j<k\leqslant n}P(A_iA_jA_k)-\cdots+(-1)^{n-1}P(A_1A_2\cdots A_n).$$

本节例讲

例 设 A,B 为两事件,$P(A)=0.5,P(B)=0.3,P(AB)=0.1$,求:

(1)A 发生但 B 不发生的概率;

(2)A 不发生但 B 发生的概率;
(3)至少有一个事件发生的概率;
(4)A,B 都不发生的概率;
(5)至少有一个事件不发生的概率.

解 (1)$P(A\bar{B})=P(A-B)=P(A-AB)=P(A)-P(AB)=0.4$;
(2)$P(\bar{A}B)=P(B-AB)=P(B)-P(AB)=0.2$;
(3)$P(\bar{A}\cup B)=0.5+0.3-0.1=0.7$;
(4)$P(\bar{A}\bar{B})=P(\overline{A\cup B})=1-P(A\cup B)=1-0.7=0.3$;
(5)$P(\bar{A}\cup\bar{B})=P(\overline{AB})=1-P(AB)=1-0.1=0.9$.

第三节　古典概型与几何概率

一、古典概型

概率论的一个基本任务是计算各种随机事件发生的概率.在概率论的发展史上,古典概型是人们最初主要研究的对象,许多最初的概率论的概念和结果也都是对它作出的,直到现在,古典概型在概率论中仍有一定地位.这一方面是因为它简单而且直观,对它的讨论有助于理解概率论中的许多概念;另一方面,许多实际问题都可以归结为这一模型,古典概型有着较广泛的应用.

定义 1.4　若随机试验正满足以下条件:

1. 试验的样本空间 $\boldsymbol{\Omega}$ 只有有限个样本点,即

$$\boldsymbol{\Omega=\{\omega_1,\omega_2,\cdots,\omega_n\}};$$

2. 试验中每个基本事件的发生是等可能的,即

$$\boldsymbol{P(\{\omega_1\})=P(\{\omega_2\})=\cdots=P(\{\omega_n\})},$$

则称此试验为古典概型,或称为等可能概型.

由定义可知$\{\omega_1\},\{\omega_2\},\cdots,\{\omega_n\}$是两两互不相容的,故有

$$1=P(\Omega)=P(\{\omega_1\}\cup\cdots\cup\{\omega_n\})=P(\{\omega_1\})+\cdots+P(\{\omega_n\}).$$

又每个基本事件发生的可能性相同,即

$$P(\{\omega_1\})=P(\{\omega_2\})=\cdots=P(\{\omega_n\}),$$

故

$$1=nP(\{\omega_i\}),$$

从而

$$P(\{\omega_i\})=1/n,i=1,2,\cdots,n.$$

设事件 A 包含 k 个基本事件,即

$$A=\{\omega_{i_1}\}\cup\{\omega_{i_2}\}\cup\cdots\cup\{\omega_{i_k}\},$$

则有

$$P(A)=P(\{\omega_{i_1}\}\cup\{\omega_{i_2}\}\cup\cdots\cup\{\omega_{i_k}\})=P(\{\omega_{i_1}\})+P(\{\omega_{i_2}\})+\cdots+P(\{\omega_{i_k}\})$$