

线性代数及其应用

马新顺 王 涛 郭 燕 编



高等教育出版社

线性代数及其应用

Xianxing Daishu jiqi Yingyong

马新顺 王 涛 郭 燕 编

高等教育出版社·北京

内容提要

本书内容包括:线性方程组理论,矩阵论基础,向量空间理论,特征值与特征向量,二次型理论等,并在书后配有每章单数习题的答案。本书在编写过程中参考了国内外主流线性代数教材,注重理论联系实际应用,融入数值计算思想,统筹安排正文、评注、练习、例子和习题等内容。教材起点低、观点高,其理论深度高于国内主流教材,适应现代数学理论及应用的发展方向,并注重将抽象理论与其应用有机结合。

本书可供高等学校非数学类理工专业使用,也可供广大科技工作者或有兴趣的读者阅读与参考。

图书在版编目(CIP)数据

线性代数及其应用/马新顺,王涛,郭燕编. --北京:高等教育出版社,2014.7

ISBN 978-7-04-039832-8

I. ①线… II. ①马…②王…③郭… III. ①线性代数-高等学校-教材 IV. ①O151.2

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2014)第 105106 号

策划编辑 贾翠萍	责任编辑 贾翠萍	封面设计 张 志	版式设计 童 丹
插图绘制 尹文军	责任校对 张小镝	责任印制 田 甜	

出版发行 高等教育出版社
社 址 北京市西城区德外大街 4 号
邮政编码 100120
印 刷 三河市华润印刷有限公司
开 本 787mm×960mm 1/16
印 张 13.75
字 数 240 千字
购书热线 010-58581118

咨询电话 400-810-0598
网 址 <http://www.hep.edu.cn>
<http://www.hep.com.cn>
网上订购 <http://www.landaco.com>
<http://www.landaco.com.cn>
版 次 2014 年 7 月第 1 版
印 次 2014 年 7 月第 1 次印刷
定 价 20.60 元

本书如有缺页、倒页、脱页等质量问题,请到所购图书销售部门联系调换
版权所有 侵权必究
物 料 号 39832-00

前言

线性代数是讨论矩阵理论、与矩阵结合的向量空间及其线性变换理论的一门学科。主要理论成熟于 19 世纪,其第一块基石(二、三元线性方程组的解法)早在两千年前已出现(见于中国古代数学名著《九章算术》)。线性代数在数学、物理学和各种工程技术学科中都有重要应用。随着计算机技术的飞速发展,线性代数这门课程的作用与地位显得日益重要,为解决实际问题提供了强有力的数学工具,并为进一步学习后继课程和将来的工作实践奠定必要的数学基础。

本教材参考国内外主流线性代数教材,注重理论联系实际应用,融入数值计算思想,统筹安排正文、评注、练习、例子和作业等内容。教材起点低、观点高,其理论深广度高于国内主流教材,适应现代数学理论及应用的发展方向,并注重将抽象理论与其应用有机结合。

全书内容包括:线性方程组理论,矩阵论基础,向量空间理论,特征值与特征向量,二次型理论。第一章从高斯消元法引出矩阵的概念及初等变换,并介绍了矩阵的秩及方程组解的判别。第二章介绍了矩阵及行列式的相关运算及矩阵的因式分解。第三章介绍了向量空间、方程组解的结构以及正交投影与正交矩阵。第四章介绍了特征值、特征向量及其数值估计。第五章介绍了二次型相关理论。

限于我们的水平,书中必定有许多不足之处,恳请读者批评指正。

编者

2014 年 3 月

参 考 书 目

- [1] David C. Lay. 线性代数及其应用. 刘深泉等, 译. 2 版. 北京: 机械工业出版社, 2005.
- [2] Carl D. Meyer. Matrix analysis and applied linear algebra. SIAM, 2000.
- [3] 郝志峰, 谢国瑞, 方文波, 汪国强. 线性代数(修订版). 北京: 高等教育出版社, 2008.
- [4] 同济大学数学系. 工程数学——线性代数, 5 版. 北京: 高等教育出版社, 2007.
- [5] Gilbert Strang. Linear algebra and its applications. Thomson-Brooks/Cole(4th Edition), 2006
- [6] I. Farkas 等. 线性代数引论. 潘鼎坤, 译. 北京: 人民教育出版社, 1982.
- [7] Peter D. Lax. Linear algebra and its application. 2th Edition, New York: Wiley, 1997.

郑重声明

高等教育出版社依法对本书享有专有出版权。任何未经许可的复制、销售行为均违反《中华人民共和国著作权法》，其为人将承担相应的民事责任和行政责任；构成犯罪的，将被依法追究刑事责任。为了维护市场秩序，保护读者的合法权益，避免读者误用盗版书造成不良后果，我社将配合行政执法部门和司法机关对违法犯罪的单位和个人进行严厉打击。社会各界人士如发现上述侵权行为，希望及时举报，本社将奖励举报有功人员。

反盗版举报电话 (010)58581897 58582371 58581879

反盗版举报传真 (010)82086060

反盗版举报邮箱 dd@hep.com.cn

通信地址 北京市西城区德外大街4号 高等教育出版社法务部

邮政编码 100120

目 录

第 1 章 线性方程组	1
1.1 三元线性方程组的消元法	1
1.1.1 消元法及等价变形	1
1.1.2 矩阵的初等变换	4
1.2 线性方程组与矩阵	5
1.2.1 基本概念	5
1.2.2 解的存在、惟一性问题	6
1.2.3 矩阵的阶梯形与行最简形	8
1.2.4 主元位置、主元列、主元	9
1.2.5 线性方程组的通解	12
1.3 矩阵的秩及方程组解的判别	15
1.3.1 矩阵秩的概念	15
1.3.2 矩阵的秩与线性方程组的解	16
习题 1	18
第 2 章 矩阵及其运算	21
2.1 一些特殊形状的矩阵	21
2.2 矩阵的基本运算	22
2.2.1 矩阵的加法	23
2.2.2 数乘	23
2.2.3 乘法	24
2.2.4 矩阵的乘幂	27
2.2.5 矩阵的迹	27
2.2.6 转置	27
2.3 分块矩阵及运算	28
2.3.1 加法与数乘	29

2.3.2	分块转置	29
2.3.3	矩阵的分块乘法	30
2.3.4	矩阵分析中一些常用的分块法	32
2.4	逆矩阵	34
2.4.1	概念	34
2.4.2	可逆矩阵的性质	35
2.4.3	初等矩阵	36
2.5	方阵的行列式	41
2.5.1	基本概念	42
2.5.2	行列式的性质	44
2.5.3	行列式函数的线性性质	47
2.5.4	伴随矩阵、克拉默法则	51
2.6	矩阵的分解	55
2.6.1	LU 分解	55
2.6.2	LU 分解算法	56
	习题 2	59
第 3 章	向量空间	67
3.1	基本概念	67
3.1.1	向量及其线性组合	67
3.1.2	向量空间、子空间	72
3.2	线性相关、线性无关	75
3.2.1	概念	75
3.2.2	性质	76
3.2.3	向量组的秩	79
3.2.4	矩阵的行秩、列秩	82
3.2.5	矩阵秩的等价定义	85
3.3	向量空间的基与维数、坐标系、过渡矩阵	87
3.3.1	基与维数	87
3.3.2	坐标系、过渡矩阵	91
3.4	矩阵的零空间、列空间线性方程组的结构	97
3.4.1	零空间	97
3.4.2	列空间	99
3.4.3	线性方程组的结构与秩定理	102

3.5	向量的内积 正交阵	106
3.5.1	内积与正交	106
3.5.2	正交投影与最小二乘问题	110
3.5.3	正交化方法	115
3.5.4	正交矩阵	117
3.5.5	矩阵的QR分解	118
*3.6	线性差分方程	121
	习题3	123
第4章	特征值与特征向量	133
4.1	特征值问题引入	133
4.2	特征值与特征向量	134
4.2.1	概念	134
4.2.2	特征子空间	141
4.2.3	特征值、特征向量的应用	143
4.3	矩阵的相似对角化	146
4.3.1	相似矩阵	146
4.3.2	对角化定理	148
*4.4	特征值的估计与数值计算	153
4.4.1	幂法	153
4.4.2	反幂法	158
	习题4	161
第5章	实对称矩阵与二次型	164
5.1	实对称矩阵的对角化	164
5.1.1	实对称矩阵的特征值、特征向量	164
5.1.2	谱分解	168
5.2	二次型及标准形	170
5.2.1	概念	170
5.2.2	合同	171
5.2.3	化二次型为标准形	172
5.2.4	惯性定理	176
5.3	正定二次型与正定矩阵	179
5.3.1	基本概念	179

IV 目录

5.3.2 正定二次型与正定矩阵的判定	180
*5.4 矩阵的奇异值分解	186
习题 5	191
单数习题参考答案	193
附录	208
参考书目	209

第1章 线性方程组

解方程是代数中的一个基本问题. 在初等代数中, 我们求解过一元、二元、三元以至四元一次方程组, 在线性代数课程中, 我们要讨论一般的多元一次方程组, 即 n 元线性方程组. 线性方程组是线性代数的核心问题, 本章我们从求解简单的三元线性方程组的消元法出发, 引出线性代数的许多重要概念.

1.1 三元线性方程组的消元法

1.1.1 消元法及等价变形

消元法作为解线性方程组的重要方法, 最早出现在我国的《九章算术》中. 在该书的第八章“方程术”描述了如下问题:

今有上禾三秉, 中禾二秉, 下禾一秉, 实三十九斗; 上禾二秉, 中禾三秉, 下禾一秉, 实三十四斗; 上禾一秉, 中禾二秉, 下禾三秉, 实二十六斗. 问上、中、下禾实一秉各几何?

这里, 禾、秉、实分别为庄稼、捆、粮食之意. 用现代符号表达, 该问题相当于解如下的三元一次线性方程组:

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 39 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 34, \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 26 \end{cases} \quad (1.1)$$

其中, x_1, x_2, x_3 分别表示上、中、下禾各一秉之实. 在《九章算术》中, 用算筹(一种带有颜色的竹签)将各个系数及常数, 在一个“计算板”上排列成一个长方阵, 按照“遍乘直除”算法进行计算. 后来, 这种方法传到世界各地, 不过算筹被数字取代, 而“计算板”也被笔和纸取代. 在欧洲, 这个方法被称为高斯(Gauss)消元法以纪念伟大的数学家高斯.

消元法的基本思路是通过一些等价变形(即不改变方程组解的变换)把一个方程组变换成另一个容易求解的方程组. 例如, 可以用第一个方程中含 x_1 的项消去其他方程中含 x_1 的项, 然后用第二个方程中含 x_2 的项消去其他方程中含 x_2

的项,以此类推,直到最后每个方程仅含一个变量.

线性方程组有以下3种基本的等价变换(等价变换):

- (1) 互换两个方程;
- (2) 某一个方程的所有项乘一个非零常数(简称倍乘变形);
- (3) 把某一个方程换成它与另一个方程的倍数之和(简称为倍加变形).

对方程组(1.1),我们保留第一个方程的 x_1 ,把其他方程的 x_1 消去,进行的变换是:第2个方程乘3,再减去第1个方程的2倍(即第2个方程换成它的3倍与第1个方程的-2倍之和);类似地,将第3个方程乘3,再减去第1个方程,此时(1.1)变换为

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 39 \\ 5x_2 + x_3 = 24. \\ 4x_2 + 8x_3 = 39 \end{cases} \quad (1.2)$$

接下来,把第3个方程乘5,再减去第2个方程的4倍,并消去第3个方程的公因子9,可得

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 39 \\ 5x_2 + x_3 = 24. \\ 4x_3 = 11 \end{cases} \quad (1.3)$$

至此,我们可以通过下面的回代过程求出 x_1, x_2, x_3 :由第3个方程求出 $x_3 = 11/4$,再将 x_3 代入第2个方程可得 $x_2 = 17/4$,再将 x_2, x_3 代入第1个方程可得 $x_1 = 37/4$.回代过程亦可通过消元法获得:由第3个方程出发消去第2和第1个方程的 x_3 ,即第1、2个方程的4倍分别减去第3个方程,并消去第2个方程的公因子5,得到

$$\begin{cases} 12x_1 + 8x_2 = 145 \\ 4x_2 = 17. \\ 4x_3 = 11 \end{cases} \quad (1.4)$$

继续以第1个方程减去第2个方程的2倍,并消去第1个方程的公因子3,得

$$\begin{cases} 4x_1 = 37 \\ 4x_2 = 17. \\ 4x_3 = 11 \end{cases} \quad (1.5)$$

整理后得

$$\begin{cases} x_1 = 37/4 \\ x_2 = 17/4, \\ x_3 = 11/4 \end{cases} \quad (1.6)$$

即为方程组的解.

从以上求解过程可以看出:等价变换仅作用于方程组的系数及其右端的常

数上,至于未知量的符号本身并不影响求解结果.为了简化以上算法过程并更深入研究线性方程组的结构性质,针对以上问题,把各方程未知量的系数及其右端常数按如下方式排列成2个数表(或矩形阵列,矩阵(Matrix)):

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & 39 \\ 2 & 3 & 1 & 34 \\ 1 & 2 & 3 & 26 \end{pmatrix}.$$

我们称 $\mathbf{A}$ 、 $\mathbf{B}$ 分别为方程组(1.1)的系数矩阵、增广矩阵.系数矩阵 $\mathbf{A}$ 是把方程组(1.1)每一个变量的系数写在对齐的一列后形成的矩阵,而增广矩阵是在系数矩阵 $\mathbf{A}$ 的右边增加了一列,该列对应3个方程的右端常数.矩阵 $\mathbf{A}$ 称为由3行3列构成的 3×3 的矩阵,简称为 3×3 矩阵;矩阵 $\mathbf{B}$ 是由3行4列构成的 3×4 的矩阵,简称为 3×4 矩阵.一般地,我们给出下面的定义.

定义1 设 m, n 是正整数,由 $m \times n$ 个数 $a_{ij} (i=1, 2, \dots, m; j=1, 2, \dots, n)$ 排成的一个 m 行 n 列的矩形阵列

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

称为一个 m 行 n 列矩阵,简称 $m \times n$ 矩阵.矩阵中横写的称为行,从上到下分别称为第1行,第2行,……,第 m 行.竖写的称为列,从左到右分别称为第1列,第2列,……,第 n 列. a_{ij} 是位于第 i 行第 j 列的元素,称为矩阵的 (i, j) 元素.

矩阵一般用大写英文字母表示.在不致引起混淆时,常将矩阵简记为 $\mathbf{A} = (a_{ij})_{m \times n}$ 或 $\mathbf{A} = (a_{ij})$,有时为标明矩阵 $\mathbf{A}$ 的行数和列数,将矩阵记作 $\mathbf{A}_{m \times n}$ 或 $\mathbf{A}_{m \times n}$.

当 $m=n$ 时,矩阵称为 n 阶矩阵或 n 阶方阵.

元素全为实数的矩阵称为实矩阵,元素为复数的矩阵称为复矩阵.

当两个矩阵的形状相同(称为同型)且对应元素完全相等时称两个矩阵相等,即当矩阵 $\mathbf{A}$ 和 $\mathbf{B}$ 的行数、列数均相同,且 $\mathbf{A}$ 和 $\mathbf{B}$ 对应元素均相等时,则称 $\mathbf{A}$ 和 $\mathbf{B}$ 相等,记作 $\mathbf{A} = \mathbf{B}$.

元素全为零的矩阵称为零矩阵,记作 $\mathbf{O}$.注意不同型的两个零矩阵是不同的.

注 为了使用方便,约定 1×1 矩阵为一个数.

由矩阵的定义知,线性方程组与其增广矩阵是一一对应的.

练习1 写出下列方程组的系数矩阵和增广矩阵:

$$(1) \begin{cases} x_1 - 3x_2 + 4x_3 = -4 \\ 3x_1 - 7x_2 + 7x_3 = -8; \\ -4x_1 + 6x_2 - x_3 = 7 \end{cases} \quad (2) \begin{cases} x_1 - x_3 = 8 \\ 2x_1 + 2x_2 + 9x_3 = 7 \\ x_2 + 5x_3 = -2 \end{cases}.$$

练习2 如果以下矩阵为某个线性方程组的增广矩阵,试写出其对应的线性方程组:

$$(1) \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 2 \\ 3 & -2 & 1 & 7 \\ 1 & -3 & -2 & -7 \end{pmatrix}; \quad (2) \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 3 & -4 & 7 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 6 \\ 2 & 3 & 1 & 3 & 6 \end{pmatrix}.$$

1.1.2 矩阵的初等变换

对照线性方程组的等价变形引入矩阵的初等行(列)变换定义.

定义2 矩阵的初等行(列)变换是对一个矩阵施行下列3类变换:

(i) 互换两行(列):把两行(列)互换,记作 $r_i \leftrightarrow r_j$ ($c_i \leftrightarrow c_j$),表示把矩阵的第 i 行(列)和第 j 行(列)互换;

(ii) 行(列)倍乘变换:把某一行(列)的所有元素乘一个非零的数,记作 kr_i 或 $r_i \times k$ (kc_i 或 $c_i \times k$),表示矩阵的第 i 行(列)的每个元素乘非零数 k ;

(iii) 行(列)倍加变换:把某一行(列)换成它本身与另一行(列)的倍数的和,记作 $r_i + kr_j$ ($c_i + kc_j$),表示把第 i 行(列)换成该行(列)与第 j 行(列)的 k 倍的和.

矩阵的初等行变换和初等列变换,统称为矩阵的初等变换.

显然,3类初等变换都是可逆的,即,若对矩阵 $\mathbf{B}$ 施行初等变换化为矩阵 $\mathbf{B}_1$,则对矩阵 $\mathbf{B}_1$ 施行同类变换必能化为 $\mathbf{B}$. 这里,后者采用的变换称为前者的逆变换,反之亦然. 例如,变换 $r_i \leftrightarrow r_j$ 的逆变换就是其本身;变换 kr_i 的逆变换为 $\frac{1}{k}r_i$;变换 $r_i + kr_j$ 的逆变换为 $r_i + (-k)r_j$ (或记作 $r_i - kr_j$).

如果一个矩阵 $\mathbf{B}$ 经有限次初等行(列)变换化成另一个矩阵 $\mathbf{B}_1$,称 $\mathbf{B}$ 与 $\mathbf{B}_1$ 行(列)等价,记作 $\mathbf{B} \xrightarrow{r} \mathbf{B}_1$ ($\mathbf{B} \xrightarrow{c} \mathbf{B}_1$);如果一个矩阵 $\mathbf{B}$ 经有限次初等变换化成另一个矩阵 $\mathbf{B}_1$,称 $\mathbf{B}$ 与 $\mathbf{B}_1$ 等价,记作 $\mathbf{B} \sim \mathbf{B}_1$.

由于线性方程组与其所对应的增广矩阵是一一对应的,且线性方程组的等价变形对应其增广矩阵的初等行变换,所以有以下事实:若两个线性方程组的增广矩阵是行等价的,则它们具有相同的解.

注 矩阵的初等行变换是本书最常使用的方法之一,需要读者熟练掌握. 与此相比,初等列变换更多地应用于理论分析.

利用矩阵及其初等行变换的记号,可简化线性方程组的求解过程.

设方程组(1.1)~(1.6)所对应的增广矩阵分别为 $\mathbf{B}, \mathbf{B}_1, \dots, \mathbf{B}_5$,则方程组(1.1)~(1.6)的变换对应矩阵的初等行变换如下:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & 39 \\ 2 & 3 & 1 & 34 \\ 1 & 2 & 3 & 26 \end{pmatrix} &\sim \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & 39 \\ 0 & 5 & 1 & 24 \\ 0 & 4 & 8 & 39 \end{pmatrix} \xrightarrow{\mathbf{B}_1} \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & 39 \\ 0 & 5 & 1 & 24 \\ 0 & 0 & 4 & 11 \end{pmatrix} \xrightarrow{\mathbf{B}_2} \begin{pmatrix} 12 & 8 & 0 & 145 \\ 0 & 4 & 0 & 17 \\ 0 & 0 & 4 & 11 \end{pmatrix} \xrightarrow{\mathbf{B}_3} \\
 &\sim \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 37 \\ 0 & 4 & 0 & 17 \\ 0 & 0 & 4 & 11 \end{pmatrix} \xrightarrow{\mathbf{B}_4} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 37/4 \\ 0 & 1 & 0 & 17/4 \\ 0 & 0 & 1 & 11/4 \end{pmatrix} \xrightarrow{\mathbf{B}_5},
 \end{aligned}$$

最后一个矩阵对应的方程组为

$$\begin{cases} x_1 = 37/4 \\ x_2 = 17/4. \\ x_3 = 11/4 \end{cases}$$

在上述变换过程中,可归纳为 2 个基本步骤:

第一步,由增广矩阵 $\mathbf{B}$ 的第 1 行出发把第 1 列中的第 2 和第 3 个元素化为零,再由第 2 行出发把第 2 列的第 3 个元素化为零,进而得到 $\mathbf{B}_2$;

第二步,与第一步类似,由 $\mathbf{B}_2$ 的第 3 行把第 3 列中的第 1 和第 2 个元素化为零,再由第 2 行把第 2 列中的第 1 个元素化为零,最终得到 $\mathbf{B}_5$.

为了表示矩阵具体的初等行变换过程,常将所使用的行变换写在初等行变换的符号“ $\sim$ ”的上面或下面.如上面 $\mathbf{B}$ 到 $\mathbf{B}_5$ 的变换过程可写成如下的形式:

$$\mathbf{B} \xrightarrow[3r_3 - r_1]{3r_2 - 2r_1} \mathbf{B}_1 \xrightarrow[(1/9)r_3]{5r_3 - 2r_1} \mathbf{B}_2 \xrightarrow[4r_1 - r_3, (1/5)r_2]{4r_2 - r_3} \mathbf{B}_3 \xrightarrow[(1/3)r_1]{r_1 - 2r_2} \mathbf{B}_4 \xrightarrow[(1/4)r_2]{(1/4)r_1, (1/4)r_2} \mathbf{B}_5.$$

注 矩阵的初等行变换过程亦可用符号“ $\rightarrow$ ”表示,如上面 $\mathbf{B}$ 到 $\mathbf{B}_1$ 的变换可写成 $\mathbf{B} \xrightarrow[3r_3 - r_1]{3r_2 - 2r_1} \mathbf{B}_1$.

练习 3 已知某个线性方程组的增广矩阵已用初等行变换化成了如下形式:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & -3 & 0 & -7 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 4 \end{pmatrix},$$

试进行适当的行变换并求出原方程组的解.

1.2 线性方程组与矩阵

1.2.1 基本概念

现在我们来讨论一般的线性方程组.所谓一般线性方程组是指形式为

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots \cdots \cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \quad (1.7)$$

的方程组,其中 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 为 n 个未知量, m 为方程的个数, a_{ij} ($i=1, 2, \cdots, m$; $j=1, 2, \cdots, n$) 称为方程组的系数, b_j ($j=1, 2, \cdots, m$) 称为常数项. 方程组中未知量的个数 n 与方程的个数 m 不一定相等. 系数 a_{ij} 的第一个下标 i 表示它在第 i 个方程, 第二个下标 j 表示它是 x_j 的系数. 如果右端常数项 b_j 全为零, 则称方程组为齐次线性方程组, 如果右端项不全为零, 则称为非齐次线性方程组.

所谓线性方程组 (1.7) 的一个解是指, 由 n 个数 $s_1, s_2, \cdots, s_n$ 构成的有序数组 $(s_1, s_2, \cdots, s_n)$, 当 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 分别用 $s_1, s_2, \cdots, s_n$ 代入后, (1.7) 中的每个等式都变成恒等式. 方程组 (1.7) 的解的全体称为解集合 (简称解集). 解方程组实际上就是找出它全部的解, 即确定解集合. 如果两个方程组有相同的解集合, 则称它们为同解的.

正如我们在 1.1 中看到的, 如果确定了方程组 (1.7) 的全部系数和常数项, 则这个方程组就确定了. 确切地说, 线性方程组 (1.7) 可用下面的增广矩阵

$$B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}$$

来表示. 当 (1.7) 为齐次方程组时, 它可以用下面的系数矩阵

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

来表示. 由于矩阵 B 是在矩阵 A 的右边增加了一列得到的, 所以常将 B 写成 $B =$

$$(A, b) \text{ 或 } \bar{A}, \text{ 其中 } b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}.$$

1.2.2 解的存在、惟一性问题

对线性方程组 (1.7) 而言, 其解集合可能有以下 3 种情况出现:

1) 惟一解. 仅有一组有序数满足方程组, 即解集 S 仅包含惟一元 $\mathbf{x} = (s_1, s_2, \dots, s_n)$;

2) 无解. 任何一组有序数均不能满足方程组, 此时解集 $S = \emptyset$;

3) 有无穷多解. 有无穷多组有序数均能满足方程组, 解集 S 中包含无穷多个元.

值得说明的是, 若线性方程组有两个不同解, 则它必然有无穷多解(思考). 若方程组无解, 也称该方程组不相容, 否则称为相容的. 我们可以利用方程组的增广矩阵及矩阵的初等行变换研究线性方程组的相容性.

例 1 讨论下列线性方程组是否相容

$$\begin{cases} x_2 + 4x_3 = -5 \\ x_1 + 3x_2 + 5x_3 = -2. \\ 3x_1 + 7x_2 + 7x_3 = 6 \end{cases} \quad (1.8)$$

解 写出增广矩阵

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 4 & -5 \\ 1 & 3 & 5 & -2 \\ 3 & 7 & 7 & 6 \end{pmatrix},$$

为使第一个方程含 x_1 , 对换第 1, 2 行, 得

$$\mathbf{B}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & -2 \\ 0 & 1 & 4 & -5 \\ 3 & 7 & 7 & 6 \end{pmatrix},$$

将第 3 行减去第 1 行的 3 倍, 得

$$\mathbf{B}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & -2 \\ 0 & 1 & 4 & -5 \\ 0 & -2 & -8 & 12 \end{pmatrix},$$

将第 3 行加上第 2 行的 2 倍, 得

$$\mathbf{B}_3 = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & -2 \\ 0 & 1 & 4 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

注意到, 第 3 个方程为 $0=2$, 显然这是矛盾的, 所以满足(1.8)的未知量 x_1, x_2, x_3 的值是不存在的. 因此(1.8)是不相容的. 采用初等行变换的记号, 上述过程可以简化为

$$\mathbf{B} \xrightarrow{r_1 \leftrightarrow r_2} \mathbf{B}_1 \xrightarrow{r_3 - 3r_1} \mathbf{B}_2 \xrightarrow{r_3 + 2r_2} \mathbf{B}_3.$$

例 2 当 h 和 k 取何值时, 下列方程组相容

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 = h \\ -6x_1 + 3x_2 = k \end{cases} \quad (1.9)$$

解 写出增广矩阵并进行初等行变换