

混凝土与组合结构 退化梁非线性有限元

Nonlinear Degenerated Beam Finite Element for
Concrete and Composite Structures

向天宇 童育强◎著



人民交通出版社股份有限公司
China Communications Press Co., Ltd.

混凝土与组合结构 退化梁非线性有限元

向天宇 童育强 著



人民交通出版社股份有限公司

China Communications Press Co., Ltd.

内 容 提 要

本书介绍了退化梁单元在混凝土结构和组合结构的材料非线性分析、双非线性分析以及收缩徐变效应分析中的应用。内容包括退化梁单元基本理论、材料非线性和几何非线性基本理论、非线性有限元分析求解算法以及徐变效应分析理论等。同时,结合作者多年科研成果,本书给出了应用退化梁单元开展的数个大型实际桥梁的非线性分析算例。

本书可供桥梁工程和结构工程专业相关科研人员和工程技术人员参考使用。

图书在版编目(CIP)数据

混凝土与组合结构退化梁非线性有限元 / 向天宇,
童育强著. — 北京:人民交通出版社股份有限公司,
2014.8

ISBN 978-7-114-11603-2

I. ①混… II. ①向… ②童… III. ①混凝土结构—
组合结构—梁—非线性—有限元分析 IV. ①TU323.3

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2014)第 184422 号

书 名:混凝土与组合结构退化梁非线性有限元

著 作 者:向天宇 童育强

责任编辑:曲 乐 卢俊丽

出版发行:人民交通出版社股份有限公司

地 址:(100011)北京市朝阳区安定门外外馆斜街3号

网 址:<http://www.ccpres.com.cn>

销售电话:(010)59757973

总 经 销:人民交通出版社股份有限公司发行部

经 销:各地新华书店

印 刷:北京市密东印刷有限公司

开 本:720×960 1/16

印 张:10

字 数:167 千

版 次:2014 年 8 月 第 1 版

印 次:2014 年 8 月 第 1 次印刷

书 号:ISBN 978-7-114-11603-2

定 价:25.00 元

(有印刷、装订质量问题的图书由本公司负责调换)

前 言

对混凝土结构材料非线性有限元分析的研究始于 20 世纪 60 年代,经过大半个世纪的发展,在混凝土结构行为学领域,这一方法已成为与结构试验相辅相成的重要研究手段。通过材料非线性有限元分析,我们能够获得大量结构全过程反应信息,可以从本质上对结构进行深入全面的研究,为结构设计提供更为可靠的依据。

对于绝大多数建筑结构以及桥梁结构,基于梁单元的有限元分析是工程中常用的数值计算手段。为了满足实际工程应用的需要,有必要开展基于梁系单元的混凝土结构的非线性有限元分析研究,本书的工作正是顺应了这一工程实践发展的需求。

本书所讨论的退化梁单元(Degenerated Beam Element)的理论基础是 Timoshenko 梁理论。所谓退化的概念,是指它的位移插值模式是通过三维空间位移场引入 Timoshenko 梁平截面假定退化而得到的。在这种单元中,对截面应力非线性的处理是基于把截面划分成若干个小块或者小条,进而独立地描述每一个小块或者小条上的材料非线性行为,即所谓的“纤维”化方法。

本书是作者近十余年应用退化梁单元开展混凝土结构和组合结构非线性有限元分析研究工作的一个总结,全书共分六章。第一章简要介绍了混凝土结构材料非线性有限元分析的技术发展,以及基于梁单元的混凝土结构和组合结构非线性有限元分析的技术特点;第二章为了方便读者理解退化梁单元理论,简要阐述了有限元基本原理;第三章以 Timoshenko 梁理论为基础,介绍了退化梁单元有限元列式推导过程,讨论了退化梁单元单元刚度矩阵以及结构内力形成中所采用的分片积分技术;第四章探讨了退化梁单元在混凝土结构以及组合结构的材料非线性有限元分析中的应用;第五章讨论了退化梁单元在混凝土结构和组合结构材料和几何双非线性分析中的应用,以及在考虑双非线性行为下的结构压溃分析;第六章介绍了退化梁单元在混凝土和组合结构收缩徐变效应分析中的应用。其中,第一、第五、第六章由西华大学向天宇编写,第二、第三、第四章由中交公路规划设计院有限公司童育强编写,全书由向天宇统稿。

在本书的算例部分,引用了徐腾飞、江科、吴小亮、赵刚云和马坤等人的博士或硕士学位论文的研究成果,在此表示衷心的感谢。与你们一起工作和学习的日子,是作者人生中值得回忆的一段岁月。同时,感谢西南交通大学赵人达教授多年来为本书的研究工作提供的支持与帮助。

本书的编写过程,得到了中交公路规划设计院有限公司和西华大学建筑与土木工程学院领导和同事的大力帮助与支持,在此一并表示感谢。

最后,感谢我们的家人,你们的支持和相伴是我们人生中最珍贵的财富。

由于作者水平所限,谬误之处在所难免,恳请专家和读者批评指正。

向天宇 童育强

2014-6-20

目 录

第 1 章 绪论	1
1.1 钢筋混凝土结构非线性有限元分析	1
1.2 基于梁系单元的钢筋混凝土结构非线性有限元分析	4
1.3 组合结构的发展与非线性分析	5
1.4 本书的主要内容	6
本章参考文献	7
第 2 章 有限元法基本理论	9
2.1 有限元法基本思想	9
2.2 最小势能原理	10
2.3 有限元分析基本过程	13
2.4 Euler-Bernoulli 平面梁单元	15
2.5 平面四节点等参数单元	18
本章参考文献	22
第 3 章 退化梁单元基本理论	23
3.1 前言	23
3.2 基于退化理论的空间梁单元有限元列式推导	24
3.3 算例分析	32
本章参考文献	44
第 4 章 混凝土结构和组合结构的材料非线性有限元分析	47
4.1 前言	47
4.2 混凝土和钢材的单轴应力—应变关系	47
4.3 非线性方程组求解的 Newton-Raphson 迭代	60
4.4 算例分析	62
本章参考文献	85
第 5 章 几何非线性及双非线性有限元分析	88
5.1 前言	88

5.2 几何非线性分析的一般理论.....	88
5.3 退化梁单元几何非线性有限元分析.....	94
5.4 弧长法.....	96
5.5 算例分析	103
本章参考文献.....	112
第 6 章 收缩徐变效应分析	114
6.1 前言	114
6.2 混凝土收缩徐变模型	115
6.3 混凝土徐变效应分析方法	129
6.4 基于退化梁单元的考虑施工阶段徐变效应有限元分析原理	132
6.5 算例分析	133
本章参考文献.....	150

第1章 绪 论

1.1 钢筋混凝土结构非线性有限元分析

众所周知,对于绝大多数固体力学问题,一般很难直接获得解析解。寻求这些问题的数值解,是科学工作者和工程技术人员一直致力解决的问题。自20世纪60年代有限元法被正式提出以来,经过不同时期学者的发展,这一方法已成为解决固体力学问题最行之有效的数值方法,被广泛应用于工程结构的设计与分析。尤其是最近30年,由于计算机技术的飞速发展,有限元方法成为了与理论分析和试验研究并列的科学研究和工程设计手段,在结构工程及相关学科的科学研究和工程设计中具有举足轻重的地位。

在土木工程的结构分析中,会涉及大量的非线性问题,这里面主要包括材料非线性问题与几何非线性问题。对于钢筋混凝土结构,材料非线性主要由混凝土的开裂和压溃、钢筋的塑性流动以及钢筋与混凝土之间的黏结滑移等引起,在这些情况下,材料的应力与应变关系不再服从胡克定律。所谓几何非线性,是指结构出现大位移及大转角变形时,应变和位移表现为非比例关系。自有限元法开始应用于工程结构分析之日起,各国学者都在寻求应用有限元法解决工程结构中出现的各种非线性问题的方法。

混凝土结构的材料非线性有限元分析研究始于20世纪60年代。1967年,Ngo和Scordelis把线性有限元方法引入到混凝土结构分析中,同时在开裂路径上预设虚拟弹簧模拟混凝土的开裂过程,开创了混凝土结构非线性有限元分析之先河^[1]。1968年,Nilsson将钢筋和混凝土之间的非线性黏结关系和混凝土的非线性应力应变关系引入有限元分析,进一步拓展了这一问题的研究思路^[2]。Zienkiewicz领导的有限元研究小组将等参单元用于钢筋和混凝土的组合单元,在提出一个适合于混凝土的屈服准则的同时,建立了基于塑性增量理论的混凝土本构关系模型^[3]。1982年,美国土木工程师学会(American Society of Civil Engineers, 简写ASCE)组织编写了《钢筋混凝土有限元分析的技术现状报告》,内容涉及混凝土的本构关系与破坏理论、钢筋模拟、混凝土与钢筋黏结滑移的描述、混凝土的裂缝模型与裂缝面上的剪力传递、混凝土时变效应与非线性动力分

析等多方面内容^[4]。在 20 世纪 70 ~ 80 年代,各国学者在混凝土三维本构关系模型、非线性有限元分析技术、裂缝处理等方面开展了大量卓有成效的研究工作,极大地推动了这一领域的研究进展^[5]。

钢筋混凝土结构材料非线性有限元分析技术的出现,为钢筋混凝土结构行为的研究提供了一种与结构试验可相辅相成的研究手段。具体来讲,钢筋混凝土结构非线性有限元分析方法具有以下几个方面的技术特点:

(1)进行钢筋混凝土结构非线性有限元分析,可以提供大量结构全过程反应信息,如结构位移、钢筋与混凝土应力和应变的变化、混凝土压溃、钢筋塑性流动、钢筋与混凝土黏结滑移以及结构的破坏荷载等。

(2)可以从本质上对结构进行比较全面的研究,为设计提供更为可靠的依据。

(3)有限元分析可以改进试验研究方法并取代一部分试验,易于对影响结构性能的重要参数做系统的研究。

(4)非线性有限元分析还为传统试验方法难以研究的大型复杂混凝土结构提供了有力的分析研究手段。

必须提及的是,混凝土非线性有限元分析技术的发展,与近 30 年计算机技术的发展紧密相关。Bentz 在 2000 年用层合梁单元分析了一根预应力 T 梁(梁高 2.03m,翼缘板宽 2.49m),对比了不同时代计算机分析这一问题所需要的计算时间,结果如图 1-1 所示。从图 1-1 可以看出,从 20 世纪 70 年代到 21 世纪初,计算机的计算能力呈指数速度增长,分析时间由最初的需要数月计算时间缩短到如今只需短短 1 ~ 2min 的计算时间,其时间差异达到了 5 个数量级^[6]。

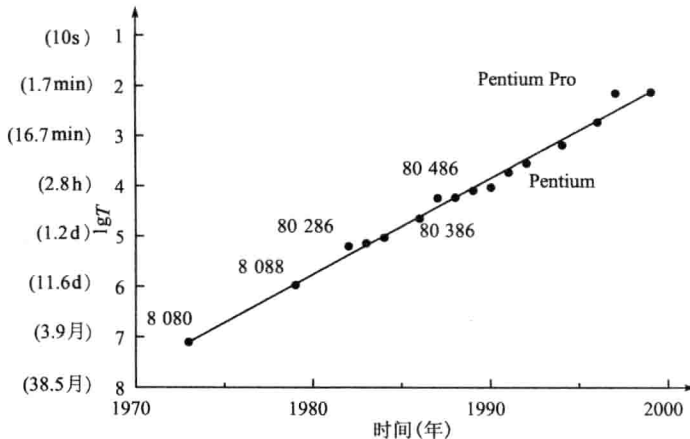


图 1-1 不同时代计算机的计算能力

虽然经过各国学者的努力,混凝土结构的材料非线性有限元分析研究取得了长足的进展。但是,必须认识到,由于混凝土材料力学性能的极端复杂性,尤其是对在复杂应力状态下混凝土的本构行为认识还远远不够,因而,对于这一问题的全面解决,还需更多研究工作的深入。这里,仅引用国际上比较有名的3次钢筋混凝土结构非线性有限元分析数值计算竞赛(Prediction Competition)来说明这一问题的复杂性和艰巨性。

1981年,国际桥梁与结构协会(International Association for Bridge and Structural Engineers, 简写 IABSE)在荷兰 Delft 的学术会议上,用加拿大多伦多大学所完成的受剪钢筋混凝土板作为竞赛对象,邀请了当时国际上这一领域的顶尖学者参与计算竞赛。这次竞赛是一次完全意义的双盲竞赛,试验结果信息对所有参与学者完全屏蔽,最终收到接近 30 份计算结果。图 1-2 给出了这些计算结果与试验结果的对比,可以看出,虽然约有一半的学者较为精确地预测出了板的极限抗剪承载能力。但是,剪应力和剪应变的计算结果在不同学者之间却表现出很大的差异性,鲜有学者较为准确地预测出了加载全过程剪应力—剪应变关系曲线^[7]。

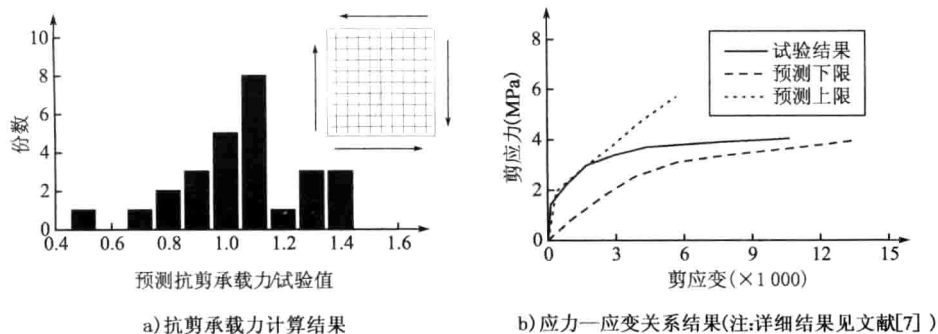


图 1-2 荷兰 Delft 学术会议数值计算竞赛结果^[7]

1995年,日本核能工程公司(Nuclear Power Engineering Corporation of Japan, 简写 NUPEC)发起了一次数值模拟竞赛,与上次竞赛相比,这次竞赛不再是双盲比赛,参与竞赛的人员对试验结果信息有部分了解。竞赛要求参加者对一大型剪力墙在循环动荷载下的极限承载能力和相应变形进行预测。计算结果汇总如图 1-3 所示,可以看出,虽然绝大多数计算结果都较好地预测了极限承载能力,但是对极限变形的预测结果依然较差^[8]。

随后,美国土木工程师协会(American Society of Civil Engineers, 简写 ASCE)与美国混凝土协会(American Concrete Institute, 简写 ACI)的 447 分委会联合举

行了一次非正式的比赛。这次比赛的计算对象是一批在加州大学圣迭戈分校完成的一批大比例尺钢筋混凝土柱试验。与日本核能工程公司举办的竞赛一样,这次竞赛也非完全意义上的双盲竞赛,计算者对部分试验结果已知。绝大部分结果都较好地反映了钢筋混凝土柱在到达承载能力峰值点前的结构行为,但是,对峰值点后钢筋混凝土柱的软化行为(Softening Behaviors)普遍预测较差^[9]。

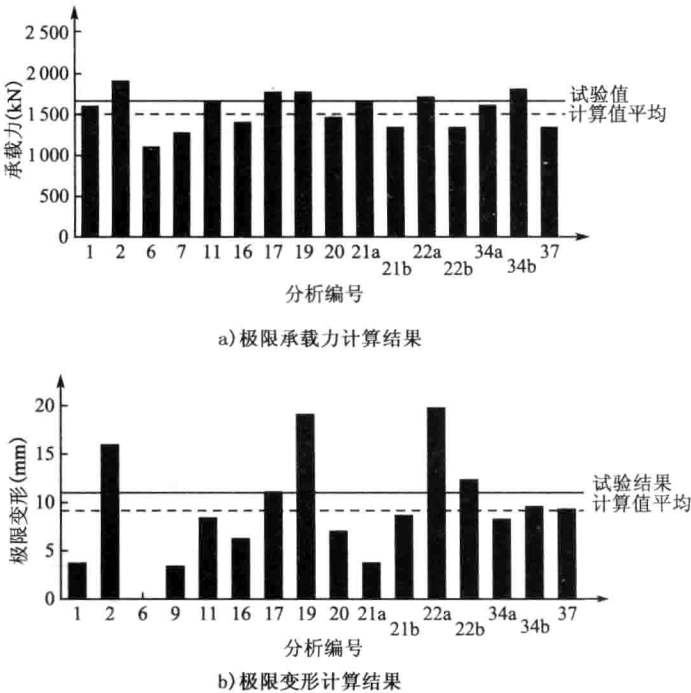


图 1-3 日本核能工程公司数值计算竞赛结果^[8]

1.2 基于梁系单元的钢筋混凝土结构非线性有限元分析

虽然混凝土结构在复杂应力状态下的非线性有限元分析还存在诸多问题亟待解决,但是,实际工程应用中对混凝土结构非线性有限元分析的需求却日益剧增,这种需求很大程度来源于设计观点的不断发展。众所周知,目前结构设计时在内力分析阶段一般采用弹性分析方法,而在截面承载能力分析时又采用了塑

性分析手段。分析方法的不统一在一定程度上会导致结构设计过于保守或者偏于不安全。非线性有限元分析能有效地将内力计算和截面分析集成为一个有机的整体,可以为今后的混凝土结构设计提供更为合理的计算分析工具。

对于绝大多数建筑结构和桥梁结构,基于梁单元的有限元分析是工程中常用的数值计算手段。为了满足实际工程应用的需要,世界各国学者就基于梁单元的钢筋混凝土结构非线性分析也开展了大量的研究工作。

相比与采用二维及三维单元的钢筋混凝土结构非线性分析,采用梁单元的混凝土结构材料非线性分析具有如下特点^[10, 11]:

(1)工程技术人员习惯于采用梁系单元进行结构的线性有限元分析,采用梁系单元开展钢筋混凝土结构的非线性分析,从概念上易于被工程技术人员所接受。另外,实际工程结构规模庞大且构造复杂,若采用二维及三维单元进行非线性分析,势必导致单元数众多,计算开销急剧增大,很大程度上影响到了在工程应用上的可行性。同时,二维及三维单元对复杂构造位置的非线性行为模拟也存在一定困难。采用梁系单元可以有效规避这些矛盾,在整体层面对混凝土结构的非线性行为进行分析。

(2)从 IABSE 和 NUPEC 开展的两次数值计算竞赛可以发现,由于对混凝土结构的剪切非线性机理的认识尚不十分明确,相应的非线性分析工作在现阶段仍具有相当大的难度。对于绝大多数建筑工程和桥梁工程中的梁系结构,设计均按照强剪弱弯的准则,剪切破坏一般延后于受弯破坏,结构的非线性主要由轴向正应力引起。因而,采用梁系单元进行混凝土结构非线性分析,一方面,可以抓住事物的主要矛盾;另一方面,与采用二维及三维单元的钢筋混凝土结构非线性分析相比,计算的稳定性也得到了很大的提高。

(3)对于实际混凝土结构施工过程及其他非线性因素的模拟也是工程设计中必须重点考虑的问题。在施工过程中,混凝土结构的结构形式、边界约束、荷载及几何构型往往在不断地变化。因而结构的最终变形形态、应力应变状态与施工方法、施工的环境变化、混凝土收缩徐变的时变效应等都有很大关系。这些诸多因素的耦合作用可以方便高效地用梁系有限元进行模拟。

1.3 组合结构的发展与非线性分析

随着工程技术的发展,在近 30 年来,组合结构作为一种新型的结构形式,越来越受到结构工程师的青睐。组合结构由于集成了钢和混凝土两种材料的优点,表现出较为优良的力学特点。其中,在国内应用较为广泛的组合结构形式主

要包括钢管混凝土与钢—混凝土组合梁。

钢管混凝土结构是从螺旋箍筋柱的理念发展而来,即将螺旋箍筋柱中的螺旋箍筋用钢管代替,将混凝土套箍在钢管之中。由于钢管套箍效应的存在,在受压状态下,核心混凝土受三向约束作用,相比普通混凝土,其抗压强度和延性会得到大幅度提高。钢管作为浇筑核心混凝土的模板使用,可以缩短施工工期和节约施工成本。同时,由于核心混凝土的存在,钢管的稳定性得到提高,有效地克服了传统钢结构在稳定问题上的缺陷。基于以上优点,钢管混凝土被广泛应用于高层建筑结构的受压柱与大跨拱结构的修建^[12]。

钢—混凝土组合梁是在传统钢筋混凝土结构的基础上,完全取消了梁体受拉区的混凝土,而采用钢材代替。结构由上部钢筋混凝土板(预应力混凝土板)和下部的钢梁组成。混凝土板与钢梁之间采用剪力连接键连接。混凝土板承担压应力,钢梁承担拉应力,以充分发挥材料力学性能。与普通钢筋混凝土比,组合梁具有可以减轻结构自重、减小构件尺寸、节省模板等优点^[13]。

虽然组合结构在力学特性方面兼有钢和混凝土两种材料的优点,对其结构行为尤其是非线性结构行为的认识,依然需要重点考量混凝土材料的非线性行为。同时,组合结构在结构特点上是两种不同材料的“组合”,在结构非线性分析中对“组合”特点的分析,是组合结构非线性分析与传统混凝土结构非线性分析的最大区别。具体而言,这些独有特点表现为:

(1)在钢管混凝土结构中,由于套箍效应的存在,在轴压状态及小偏心受压状态下,会提高管内混凝土的极限压应变与最大压应力,同时钢材处于多向受力状态。因此,钢管混凝土结构非线性分析中混凝土与钢材的应力应变关系均应相对于传统混凝土结构有所调整。

(2)钢—混凝土组合梁与传统的钢筋混凝土结构不同,钢与混凝土的连接采用剪力连接键。故在非线性分析中,应考虑剪力连接键本身性能的影响,由此分析混凝土板与钢梁两者如何协同工作以及相对滑移等问题。

1.4 本书的主要内容

本书重点讨论基于退化梁单元的混凝土结构以及组合结构非线性有限元分析问题,全书共分6章。

第1章简要回顾了混凝土结构非线性有限元分析的发展历史,介绍了基于梁系单元的钢筋混凝土结构非线性分析的特点,对组合结构的非线性分析问题也进行了讨论。

第2章简要介绍了有限元的基本理论,重点讨论了有限元计算的实施方法以及等参单元的基本思想。这些内容是了解和掌握退化梁单元理论所必需的基础知识。

第3章根据铁木辛柯(Timoshenko)梁理论,推导退化梁单元有限元列式,同时对刚度矩阵和单元内力计算的数值积分问题进行了讨论。

第4章讨论了普通混凝土以及受钢管约束核心混凝土的应力—应变关系模型,对非线性有限元分析方法中的牛顿—拉斐逊迭代方法进行了介绍。通过大量数值算例,探讨了退化梁单元在钢筋混凝土结构以及组合结构材料非线性有限元分析中的应用。

第5章讨论了退化梁单元在混凝土和组合结构材料和几何双非线性分析中的应用。建立了基于修正的拉格朗日(Updated Lagrange, U. L.)描述的退化梁单元的几何非线性有限元分析列式。同时对结构全过程非线性有限元分析的弧长法进行了详细的介绍。

第6章讨论了退化梁单元在混凝土和组合结构收缩徐变效应分析中的应用。介绍了目前国际上主流的混凝土收缩徐变模型以及徐变效应分析的基本算法。通过算例分析,讨论了退化梁单元在混凝土结构以及组合结构长期效应分析中的应用。

本章参考文献

- [1] D Ngo, A C Scordelis. Finite Element Analysis of Reinforced Concrete Beams [J]. ACI Journal, 1967, 64(3):152-163.
- [2] A H Nilsson. Nonlinear Analysis of Reinforced Concrete by Finite Element Method[J]. ACI Journal, 1968, 65(9).
- [3] O C Zienkiewicz. The Finite Element Method in Engineering Science[M]. 3rd Ed New York: Mc Draw-Hill Inc, 1977.
- [4] ASCE Committee on Concrete and Masonry Structures, Task Committee on Finite Element Analysis of Reinforced Concrete Structures. A State-of-Art Report on Finite Element Analysis of Reinforced Concrete Structures[R]. ASCE Spec. Pub. 1982.
- [5] A C Scordelis. Past, present and future development finite element analysis of reinforced concrete structures[J]. ASCE, 1986.
- [6] E C Bentz. Presentation at ACI annual convention[C]. Toronto, Oct, 2000.
- [7] M P Collins, F J Vecchio, G Mehlhorn. An international competition to predict

- the response of reinforced concrete panel[J]. Canadian Journal of Civil Engineering, 1985, 12(3): 624-644.
- [8] Nuclear Power Engineering Corporation (NUPEC). Comparison report, seismic shear wall ISP, NUPEC's seismic ultimate dynamic response test[R]. 1996, Report No: NU-SSWISP-D014.
- [9] F J Vecchio. Non-linear finite element analysis of reinforced concrete: at the crossroads[J]. Structural Concrete, 2001, 2(4): 201-212.
- [10] Tianyu Xiang, Yuqiang Tong, Renda Zhao. A general and versatile nonlinear analysis program for concrete bridge structure[J]. Advances in Engineering Software, 2005, V(36):681-690.
- [11] 童育强. 混凝土结构非线性有限元分析及软件设计[D]. 成都:西南交通大学,2004.
- [12] 韩林海. 钢管混凝土结构——理论与实践[M]. 北京:科学出版社,2007.
- [13] 聂建国. 钢—混凝土组合结构原理与实例[M]. 北京:科学出版社,2009.

第2章 有限元法基本理论

2.1 有限元法基本思想

有限元方法是一种求解连续场问题的数值方法,这里讲的连续场,可以是固体场、流体场、温度场以及电磁场等。在本章中,主要讨论有限元法在结构工程中的应用,因而,本章仅结合弹性力学理论介绍有限元法的基本思想。

有限元法这个名称由1960年美国克拉夫(Clough)在《平面应力分析的有限单元法》中首次提出。事实上,这一方法的渊源可以追溯到更远。从数学的角度看,有限元法是偏微分方程定解问题数值分析方法的一种新发展;从力学学科的角度看,有限元方法是基于变分原理(如里兹法等)的力学问题的近似解法的革新与发展;从结构工程上说,有限元法是结构力学矩阵位移法在连续介质力学中的深入应用。事实上,在历史发展的不同时期,上述各个学科都为有限元法的创立与发展做出了重要的贡献^[1]。

与结构力学对结构求解方法的分类类似,有限元法也有相应的分类方法。以位移为基本未知量的求解方法称为位移法;而以力为基本未知量的求解方法称为力法;一部分以位移为基本未知量,而另一部分以力为基本未知量的求解方法称为混合法。相对而言,位移法思路清晰,方法简便,是目前工程结构领域应用最为广泛的方法。因而,本章主要讨论有限元法中的位移法的基本原理。

有限元法求解的第一步工作是对求解区域进行网格离散化,即把一个无限多个自由度的连续问题转化为一个具有有限多个自由度的离散问题,这就是所谓的网格划分。其次,选择合理的位移插值模式,用单元节点位移描述单元内任意点的位移。在一般情况下,不同单元进行独立的位移插值,把所有单元的位移插值场组合即可得到求解区域的位移场模式,这就是所谓的分片插值模式。随后,从单个单元入手,应用一定的数学和力学手段,如变分法等,建立单元方程。在位移法中,这一单元方程反映了单元节点力与节点位移的相互关系,一般用矩阵形式表示,因而习惯称为单元刚度矩阵。然后,把所有单元的刚度矩阵集成起来,得到求解问题的整体刚度矩阵,进而建立其整体结构的节点力与节点位移的相互关系。在此基础上,引入边界条件即可进行求解。解得节点位移后,根据几

何方程和物理方程可得到各单元的应变、应力以及内力等物理响应量的结果。

与在计算力学发展早期出现的一些计算方法(如 Rayleigh-Ritz 法)相比,有限元法最大的特点也是其优点体现在位移插值函数(或者称为“试函数”)的选取上。在 Rayleigh-Ritz 法中,是在所求解的整个区域上选取统一的“试函数”,然后根据最小势能原理,求解“试函数”中的待定系数。显然,在整个求解区域上选取的统一“试函数”,必须满足整个区域的边界条件。这一要求,在绝大多数情况下是十分困难的,甚至是根本无法实现的。但是,在有限元法中,位移插值函数(试函数)不是定义在整个求解区域的,而是在每个独立单元中分片独立选取的。因而,这样一种位移插值模式,在满足一定的单元间的位移协调条件的同时,能简单方便地适应各种位移边界条件要求。这一革命性思想,不但简化了问题求解,同时可以通过若干形状简单的单元集合起来表示非常复杂的几何形状,极大地拓宽了有限元法的应用范围。可以毫不夸张地讲,有限元法目前已渗透到工程结构的任何领域,成为了不可或缺的设计分析工具。

近年来,随着现代信息技术的飞速发展,个人计算机处理能力的迅猛提高,极大地推动了有限元法在工程实践中的应用,使得有限元法有被认为是一种完美无缺和无所不能方法的趋势。同时,商业有限元软件的发展和普及,有限元软件人机交互日趋便捷,使得工程应用人员逐渐习惯将有限元法作为一个普通的软件黑箱来使用。必须指出的是,这种认识上的“软件黑箱”趋势,对于工程应用,是有相当风险的。尽管计算机可以代替人工完成非常繁复以至于人力无法完成的巨大线性方程组的求解和前后数据处理等工作,但是一个有限元分析的成功前提,不仅仅是依靠熟练的软件操作能力,更重要的是软件使用者能够正确地建立有限元模型,而如何建立正确的有限元模型,必须依靠对求解问题力学和结构本质的正确认识和对有限元基本理论的正确理解^[2]。

在本章中,首先将讨论建立有限元刚度矩阵的变分法中常用的最小势能原理;其次,将讨论有限元法的基本求解过程;最后,为了方便读者理解后续章节中重点讨论的退化梁单元,将对 Euler-Bernoulli 平面梁单元和平面四节点等参数单元的刚度矩阵推导过程进行介绍。

2.2 最小势能原理

在有限元法中,建立单元方程的方法大致可以分为三种:一是直接法,这种方法最典型的例子即为结构力学中矩阵位移法中用到的直接刚度法。这种方法的优点是简单直观,无需过多的数学运算。但碰到复杂问题时,一般难以直接获