系统辨识学术专著丛书（第3分册）

系统辨识

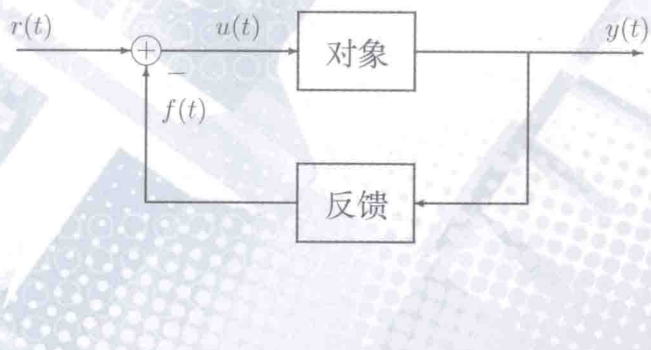
——辨识方法性能分析

丁　锋◎著

$$\frac{1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n}}{\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{2n}}=1.$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{n}-\ln n\right)=\gamma=0.577215\ldots$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{1}{n}\right)=\ln 2=0.693147\ldots$$



科学出版社

系统辨识学术专著丛书(第3分册)

系 统 辨 识

——辨识方法性能分析

丁 锋 著

科 学 出 版 社

北 京

内 容 简 介

《系统辨识——辨识方法性能分析》是《系统辨识学术专著丛书》的第3分册，是作者在清华大学、江南大学教学和科研创新经验的结晶，汇聚了作者及其合作者在系统辨识理论研究方面的一些最新成果.

本书论述了一些典型系统辨识方法及其收敛性证明. 全书共6章,内容包括：随机过程与鞅理论、最小二乘类辨识方法、随机梯度类辨识方法、最小均方类辨识方法、多变量系统辨识方法的收敛性，以及时变系统辨识方法的有界收敛性.本书不仅传授知识，而且还传授科学研究与创新的新思想和新方法. 特别是书中提出了一系列值得学者们深入研究的辨识课题，为进一步研究指明方向.

书中 Matlab 仿真例子源程序为初学者快速上手提供了学习蓝本. 本书可作为大学高年级本科生、硕士和博士研究生“系统辨识”教材及有志者攀登科学高峰的科研用书，也可供自动控制、电气自动化类及相关电类专业高校教师和科技人员选用.

图书在版编目(CIP)数据

系统辨识：辨识方法性能分析/丁锋著. —北京：科学出版社，2014.6

(系统辨识学术专著丛书；3)

ISBN 978-7-03-041238-6

Ⅰ. ①系… Ⅱ. ①丁… Ⅲ. ①系统辨识-研究 Ⅳ. ①N945.14

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2014) 第 126989 号

责任编辑：姚庆爽／责任校对：张小霞　张凤琴
责任印制：肖　兴／封面设计：迷底书装

科学出版社 出版
北京东黄城根北街16号
邮政编码：100717
http://www.sciencep.com

北京源海印刷有限责任公司 印刷

科学出版社发行　各地新华书店经销

*

2014年6月第 一 版　开本：787×1092 1/16
2014年6月第一次印刷　印张：34
字数：800 000

定价：135.00 元

(如有印装质量问题，我社负责调换)

作 者 简 介

丁锋，男，湖北广水人(原湖北应山县人)，2004 年受聘为江南大学“太湖学者”特聘教授，博士生导师. 1980 年 9 月~1984 年 7 月湖北工业大学学士学位；1984 年 7 月~1988 年 8 月湖北制药厂变配电技术员；1988 年 9 月~2002 年 6 月清华大学硕士学位、博士学位(优秀博士学位论文)、讲师、副教授；2002 年 7 月~2005 年 10 月加拿大阿尔伯塔大学(University of Alberta，埃德蒙顿)博士后、研究员；2006 年 3~5 月香港科技大学研究员；2006 年 12 月~2007 年 2 月、2008 年 5~12 月加拿大卡尔顿大学(Carleton University，渥太华) 访问教授；2009 年 1~10 月加拿大瑞尔森大学(Ryerson University，多伦多)研究员(包括国家公派访问学者半年).

主要学术成绩如下：

- 发表学术论文 300 余篇，其中 SCI 收录 122 篇、EI 收录 201 篇；
- 38 篇 SCI 论文入选 2002 ~2012 年十一年期间 ESI (Essential Science Indicators) 高被引论文全球前 1%，其中第一作者 19 篇；
- 2 篇第一作者论文入选“2011 年中国百篇最具影响国际学术论文”；
- 1 篇第一作者论文入选“2012 年中国百篇最具影响国际学术论文”；
- 2008 年入选江苏省“青蓝工程”中青年学术带头人培养对象(2012 年 12 月考核颁发证书)；
- 2012 年 5 月被授予“无锡市有突出贡献中青年专家”称号.

他提出和创立了辅助模型辨识思想、多新息辨识理论、递阶辨识原理、耦合辨识概念. 在辅助模型辨识、多新息辨识、递阶辨识、耦合辨识、迭代辨识领域作出了杰出贡献，提出了用于时变系统递推辨识方法与自校正控制算法有界收敛性判定工具——“鞅超收敛定理”，研究和提出了一系列辨识新方法，研究了一系列参数估计算法的性能. 他在系统辨识方面所取得的最新研究成果代表着国际系统辨识学科的前沿之一，尤其在辨识新方法、辨识方法收敛性分析等方面所作的贡献，具有前瞻性和开创性，在国内外都处于领先地位.

系统辨识学术专著丛书

控制科学铸造了时代的辉煌, 高集成度计算机芯片是自动化控制科学与技术的杰作. 控制科学跨越时空的伟大成就 —— 电子设备计算能力和信息处理能力的提升、自动化设备和装备的出现、自动化电子产品的普及, 彻底改变了信息社会的生活方式, 美化了我们的生活. 在这背后, 我们不禁要问: 控制科学是什么, 控制科学的基础是什么?

控制科学就是在认识事物运动规律的基础上, 通过施加特定的、奇妙的控制作用 (控制律), 以改变事物的运动轨迹, 使其向着我们期望的方向发展. 事物的运动规律用方程描述就是数学模型. 数学模型是控制科学的基础, 在控制科学发展中起到了举足轻重的作用, 是一切自然科学的基础. 系统辨识是研究建立 (动态) 系统数学模型的理论与方法.

在系统建模、系统辨识领域, 各国科学家进行了大量的研究工作, 在理论与应用方面都取得了不少优秀成果. 《系统辨识学术专著丛书》的作者在前辈研究成果基础上, 对系统辨识方法和辨识理论进行了长期深入的研究, 系列研究成果发表在控制领域国际权威期刊《Automatica》、《IEEE Transactions》、《SIAM Journals》、《Systems & Control Letters》等上, 且被广泛引用, 得到国内外同行的认可和高度评价. 多年来, 作者一直在为出版 "系统辨识系列著作" 积累素材, 2013 年 1 月出版的《系统辨识新论》第 1 版, 到 2013 年 7 月已销售一空, 这加速了系列著作的出版进程, 应科学出版社邀请, 拟决定出版《系统辨识学术专著丛书》.

《系统辨识学术专著丛书》初步计划出版 8 分册, 各分册名称如下:

第 1 分册: 系统辨识 —— 系统辨识新论
第 2 分册: 系统辨识 —— 系统辨识方法论
第 3 分册: 系统辨识 —— 辨识方法性能分析
第 4 分册: 系统辨识 —— 辅助模型辨识方法
第 5 分册: 系统辨识 —— 迭代辨识方法
第 6 分册: 系统辨识 —— 多新息辨识方法
第 7 分册: 系统辨识 —— 递阶辨识方法
第 8 分册: 系统辨识 —— 耦合辨识方法

序

《系统辨识 —— 辨识方法性能分析》是《系统辨识学术专著丛书》的第 3 分册. 该书汇聚了作者承担多项国家自然科学基金项目的研究成果, 是辨识领域的一部重要理论著作.

作者首次将随机系统分为 "时间序列模型"、"方程误差类模型" 和 "输出误差类模型" 三大类, 使辨识算法的类别变得更加清晰. 本书首先介绍了随机过程与鞅理论的基本知识, 在此基础上, 按照 "方程误差类模型" 和 "输出误差类模型", 利用随机过程理论和鞅收敛定理, 研究了最小二乘类方法、随机梯度类方法、最小均方类方法及多变量系统辨识方法的一致收敛性和 (或) 有界收敛性; 利用建立的鞅超收敛定理, 分析和推导了时变系统遗忘因子最小二乘方法、遗忘因子随机梯度方法、广义投影辨识方法参数估计误差界等. 最后讨论了衰减激励条件下, 递阶最小二乘算法、多新息辨识方法和最小均方算法的一致收敛性.

该书是作者在清华大学、江南大学给硕士生和博士生开设 "系统辨识" 等相关课程基础上, 从新视角研究了一系列辨识方法的收敛性能. 反映这些理论与方法的重要研究成果, 都以 Regular Paper 形式发表在《Automatica》、《IEEE Transactions》等国际著名杂志上, 被国内外同行广泛引用, 并给予高度评价.

上述研究成果体现了该书的学术水平及其创新点, 出版该专著具有重要的科学意义. 这是一部优秀的理论著作, 与国内外同类书相比, 这部专著内容新颖、结构清晰、写作方法独特. 其独特之处表现在:

第一, 该书深入分析了一些辨识算法的机理性质, 对一些重要辨识方法的收敛性能和结论进行了详细研究和评述, 揭示了辨识方法间深层的性质和特征;

第二, 该书介绍了作者提出的一些原创性学术思想和辨识新方法, 如广义增广最小二乘方法、修正随机梯度方法、遗忘因子随机梯度方法、广义投影辨识方法等;

第三, 该书从参数估计误差界角度分析了辨识方法的收敛性能, 研究了如何减少参数估计误差上界的方法, 对提高辨识方法的实际应用效果具有重要意义;

第四, 该书建立了用于参数估计误差有界收敛性分析的鞅超收敛定理, 为时变参数随机系统递推辨识方法有界收敛性和自校正控制算法稳定性分析开辟了新的研究思路;

第五, 该书不仅传授知识, 而且还传授科学研究与创新的新思想和新方法, 特别是书中还提出了一系列值得学者们深入研究的辨识课题, 为进一步研究指明方向.

作为江南大学教育部重点实验室 "轻工过程先进控制" 第一届学术委员会主任, 我听取了丁锋教授的三个学术报告, 认为他在辅助模型辨识、多新息辨识、递阶辨识、耦合辨识方面作出了杰出贡献. 他提出的辅助模型辨识思想、多新息辨识理论、递阶辨识原理、耦合辨

识概念及其辨识方法, 形成了独特的理论体系. 这些原创性成果处于国际领先地位, 总结这些成果的著作《系统辨识新论》开辟了系统辨识的新纪元.

吴宏鑫

中国科学院院士 吴宏鑫 研究员

2013 年 12 月于中国空间技术研究院

前　言

系统辨识是研究建立系统数学模型的理论与方法. 近年来, 系统辨识应用范围日益广泛和深入, 系统辨识的理论与方法得到很大发展. 然而, 还缺乏系统总结这些优秀理论成果的著作, 这就是本书的写作意图. 顾名思义, 这部理论著作《系统辨识 —— 辨识方法性能分析》重点介绍了作者在辨识方法收敛性研究方面取得的一系列最新成果.

本书是作者在清华大学和江南大学为研究生开设的 "系统辨识" 等相关课程教学经验与科学研究经验的结晶, 除注重基础知识和新发现的介绍和讨论外, 还致力于传授科学研究与创新的新方法. 书中提出了一系列开放性的辨识研究课题, 使读者能清楚了解辨识领域还有哪些研究难题尚未解决, 并为今后的研究指明方向. 本书主要内容是作者及其合作者在辨识领域取得的系列研究成果, 包括发表在控制界国际著名期刊《Automatica》、《IEEE Transactions》等上, 且被广泛引用的研究成果. 这些研究成果也得到多项国家自然科学基金项目资助 (项目成果都被国家自然科学基金委评价为 "优秀").

全书共 6 章. 第 1 章介绍随机过程的基本知识, 包括系统的噪信比及其计算、有关参数估计收敛性的定义、鞅收敛定理、鞅超收敛定理等. 第 2 章主要研究方程误差系统和输出误差系统递推最小二乘类辨识算法的一致收敛性, 线性回归系统递阶最小二乘辨识算法的一致收敛性. 第 3 章研究了递推最小二乘类辨识方法参数估计误差的有界收敛性, 推导了时不变系统的递推最小二乘算法、遗忘因子递推最小二乘算法、辅助变量递推最小二乘算法及时变参数系统遗忘因子递推最小二乘算法参数估计误差上界等. 第 4 章研究了随机梯度类辨识方法的收敛性, 详细分析了方程误差类系统随机梯度算法、修正随机梯度算法、增广随机梯度算法的一致收敛性, 近似分析了广义随机梯度算法、广义增广随机梯度算法、输出误差类系统辅助模型随机梯度类辨识算法的一致收敛性, 推导了时变参数系统遗忘因子随机梯度算法参数估计误差界. 第 5 章研究了最小均方类辨识方法的收敛性, 包括投影算法、广义投影算法、最小均方算法的收敛性, 以及衰减激励条件下最小均方辨识算法和多新息辨识算法的一致收敛性等. 第 6 章研究了多变量系统辨识方法的一致收敛性, 包括多变量系统随机梯度算法、多元系统随机梯度算法与递推最小二乘算法、类多变量系统递阶随机梯度算法和递阶最小二乘算法的收敛性等. 随后是参考文献、附录、索引和后记.

本书提供的 Matlab 仿真实验有助于理解辨识方法的性能和证实算法的有效性. 书中仿真例子和 Matlab 源程序都是本书作者亲自完成的. 因此, 建议读者能亲自完成几个实验, 以加深对理论方法的理解.

书中备有丰富的思考题, 以巩固对概念、方法的理解. 每章后面的思考题有三种类型, 一类是与本章内容相关的习题, 是正文的一种补充和延伸; 另一类是与其他章节内容相关的预备知识; 还有一类是需要深入思考的辨识难题, 这类问题的解决就是新的科学发现.

阅读本书需要线性代数、随机过程、控制理论的基本知识, 最好能先阅读《系统辨识新论》(科学出版社, 2013). 本书可作为我国自动化等电类专业、控制科学与控制工程学科用

书, 可作为培养高层次的创新型人才 (硕士和博士研究生) 的 “系统辨识” 教材和科研用书, 也可作为自学者、有关技术人员、工程师的参考书.

丁锋

2013 年 12 月于江南大学

主要符号说明

数集和数域

$\mathbb{N}$	自然数集: $\mathbb{N}=\{1,2,3,\cdots\}$.
$\mathbb{N}_0$	包括 0 的自然数集: $\mathbb{N}_0=\{0,1,2,3,\cdots\}$.
$\mathbb{Z}$	整数集: $\mathbb{Z}=\{\cdots,-2,-1,0,1,2,\cdots\}$.
$\mathbb{Q}$	有理数集或有理数域.
$\mathbb{R}$	实数集或实数域, $\mathbb{R}:=\mathbb{R}^1$.
$\mathbb{R}^n$	n 维实欧几里德 (Euclidean) 空间, $\mathbb{R}^n:=\mathbb{R}^{n\times 1}$, 或 n 维实数列向量集或实系数函数列向量集 (列向量空间).
$\mathbb{R}^{m\times n}$	所有 m 行 n 列矩阵构成的实空间或实系数函数空间.
$\mathbb{R}^{1\times n}$	n 维实数行向量集或实系数函数行向量集 (行向量空间).
$\mathbb{C}$	复数集或复数域; $\mathbb{F}$ 代表 $\mathbb{R}$ 或 $\mathbb{C}$.
$\mathbb{C}^{m\times n}$	$m\times n$ 复矩阵集或复系数函数矩阵集; $\mathbb{F}^{m\times n}$ 代表 $\mathbb{R}^{m\times n}$ 或 $\mathbb{C}^{m\times n}$.
$\mathbb{C}^n$	n 维复数列向量集或复系数函数列向量集, $\mathbb{C}^n:=\mathbb{C}^{n\times 1}$; $\mathbb{F}^{n\times 1}=:\mathbb{F}^n$ 代表 $\mathbb{R}^n$ 或 $\mathbb{C}^n$.
$\mathbb{C}^{1\times n}$	n 维复数行向量集或复系数函数行向量集.
$\mathbb{F}$	代表 $\mathbb{R}$ 或 $\mathbb{C}$.

数向量和数矩阵

$\mathbf{0}$	适当维数的零向量或零矩阵.
$\mathbf{0}_{m\times n}$	$m\times n$ 零矩阵.
$\mathbf{1}$	元均为 1 的适当维数矩阵.
$\mathbf{1}_{m\times n}$	元均为 1 的 $m\times n$ 矩阵.
$\mathbf{1}_n$	元均为 1 的 n 维列向量, $\mathbf{1}_n:=\mathbf{1}_{n\times 1}$.
$\boldsymbol{I}$	适当维数的单位阵, 其对角元均为 1, 其余元均为零.
$\boldsymbol{I}_n$	n 阶单位阵 $\boldsymbol{I}_n\in\mathbb{R}^{n\times n}$, 其对角元均为 1, 其余元均为零.

基本数学符号

$\mathrm{adj}[\boldsymbol{A}]$	矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵, $\mathrm{adj}[\boldsymbol{A}]=\det[\boldsymbol{A}]\boldsymbol{A}^{-1}$.
$\mathrm{col}[\boldsymbol{X}]$	将矩阵 $\boldsymbol{X}$ 的列按次序排成的向量. 如 $\boldsymbol{X}=[\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2,\cdots,\boldsymbol{x}_n]\in\mathbb{R}^{m\times n}$, $\boldsymbol{x}_i\in\mathbb{R}^m$, $i=1,2,\cdots,n$, 那么 $\mathrm{col}[\boldsymbol{X}]:=\begin{bmatrix}\boldsymbol{x}_1\\ \boldsymbol{x}_2\\ \vdots\\ \boldsymbol{x}_n\end{bmatrix}\in\mathbb{R}^{mn}$. 有的资料上用 $\mathrm{vec}\boldsymbol{X}$ 代替 $\mathrm{col}[\boldsymbol{X}]$.
const	常数.

cov	$\mathrm{cov}[\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}]$ 表示随机向量 $\boldsymbol{x}$ 和 $\boldsymbol{y}$ 的协方差阵, 定义为 $\mathrm{cov}[\boldsymbol{x}] := \mathrm{E}[(\boldsymbol{x}-\bar{\boldsymbol{x}})(\boldsymbol{y}-\bar{\boldsymbol{y}})^{\mathrm{T}}]$, $\bar{\boldsymbol{x}} := \mathrm{E}[\boldsymbol{x}]$.
$\mathrm{D}[*]$	$\mathrm{D}[x(t)] := \mathrm{var}[x(t)]$ 表示随机变量 (过程) $x(t)$ 的方差.
$\det[\boldsymbol{X}]$	矩阵 $\boldsymbol{X}$ 的行列式, 即 $\det[\boldsymbol{X}] := \lvert\boldsymbol{X}\rvert$.
$\mathrm{diag}[*,*,\cdots,*]$	对角矩阵.
$\dim\boldsymbol{\varphi}(t)$	表示向量 $\boldsymbol{\varphi}(t)$ 的维数, 如 $\boldsymbol{\varphi}(t)\in\mathbb{R}^n$, 则 $\dim\boldsymbol{\varphi}(t)=n$.
$\mathrm{E}[*]$	数学期望 (均值).
$\mathrm{E}[*\lvert\mathcal{F}_t]$	对 $\mathcal{F}_t$ 的条件期望 (条件均值).
$\exp(x)$	指数函数, $\exp(x)=\mathrm{e}^x$.
for all	for all $t\geqslant 0$ 表示对所有 $t\geqslant 0$, 即 $t=0,1,2,\cdots$.
for any	for any $t>0$ 表示对每一个 $t>0$, 即 $t=1,2,3,\cdots$.
for large	for large t 表示对大 t.
for some	for some $t>0$ 表示对某个 $t>0$, 如 $t=1,2,3,\cdots$ 中的一个.
$\mathrm{grad}[f(\boldsymbol{x})]$	标量函数 $f(\boldsymbol{x})$ 对向量自变量 $\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^n$ 的梯度 (列向量).
$\mathrm{Im}[s]$	s 的虚部, 若 $s=\sigma+\mathrm{j}\omega$, σ 和 ω 均为实数, 则 $\mathrm{Im}[s]=\omega$.
$\inf[*]$	下界. 例如, $f(x)=\exp(-x^2)$, 则 $\inf[f(x)]=0$.
j	虚数单位, 即 $\mathrm{j}=\sqrt{-1}$.
lim	极限符号.
lim sup	上界极限符号.
$\ln[*]$	以 $\mathrm{e}=2.718281828459\cdots$ 为底的自然对数.
$\max[*,*,\cdots,*]$	$(*,*,\cdots,*)$ 中最大者.
$\min[*,*,\cdots,*]$	$(*,*,\cdots,*)$ 中最小者.
$\mathrm{Re}[s]$	s 的实部, 若 $s=\sigma+\mathrm{j}\omega$, σ 和 ω 均为实数, 则 $\mathrm{Re}[s]=\sigma$.
$\mathrm{sgn}(x)$	符号函数, 即 $\mathrm{sgn}(x)=\begin{cases}1, & x\geqslant 0,\\ -1, & x<0.\end{cases}$
star ($\star$)	Star 积或 $\star$ 积或星积 (即块矩阵 $\star$ 积, 块矩阵内积). 例如, $\boldsymbol{X}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{X}_1\\ \boldsymbol{X}_2\\ \vdots\\ \boldsymbol{X}_p\end{bmatrix}$, $\boldsymbol{Y}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{Y}_1\\ \boldsymbol{Y}_2\\ \vdots\\ \boldsymbol{Y}_p\end{bmatrix}$, $\boldsymbol{X}\star\boldsymbol{Y}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{X}_1\\ \boldsymbol{X}_2\\ \vdots\\ \boldsymbol{X}_p\end{bmatrix}\star\begin{bmatrix}\boldsymbol{Y}_1\\ \boldsymbol{Y}_2\\ \vdots\\ \boldsymbol{Y}_p\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{X}_1\boldsymbol{Y}_1\\ \boldsymbol{X}_2\boldsymbol{Y}_2\\ \vdots\\ \boldsymbol{X}_p\boldsymbol{Y}_p\end{bmatrix}$.
sup	上界. 例如, $f(x)=1-\exp(-x^2)$, 则 $\sup[f(x)]=1$.
T	上标 T 表示矩阵转置.
$\mathrm{tr}[\boldsymbol{X}]$	矩阵 $\boldsymbol{X}$ 的迹, 即矩阵 $\boldsymbol{X}$ 的对角元之和 (也等于 $\boldsymbol{X}$ 的特征值之和).
$\mathrm{var}[x(t)]$	随机过程 (变量) $x(t)$ 的方差, 即 $\mathrm{var}[x(t)]=\mathrm{E}\{[x(t)-\mathrm{E}(x(t))]^2\}$.
$\lvert x\rvert$	$\lvert x\rvert := \mathrm{abs}(x)$ 表示 x 的绝对值;
$\lvert\boldsymbol{X}\rvert$	$\lvert\boldsymbol{X}\rvert := \det[\boldsymbol{X}]$ 表示方阵 $\boldsymbol{X}$ 的行列式.

变量和函数定义

$A =: X$	A 定义为 X.
$X := A$	A 定义为 X.

$1(t)$	单位阶跃函数: $1(t)=\begin{cases}1, & t\geqslant 0,\\ 0, & t<0.\end{cases}$
$\\|\boldsymbol{X}\\|$	矩阵 $\boldsymbol{X}$ 的范数, 如定义为 $\\|\boldsymbol{X}\\|^2:=\mathrm{tr}[\boldsymbol{X}\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}]$ 或 $\\|\boldsymbol{X}\\|^2:=\lambda_{\max}[\boldsymbol{X}\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}]$.
$\boldsymbol{X}^{-1}$	方阵 $\boldsymbol{X}$ 的逆矩阵, 定义为 $\boldsymbol{X}^{-1}\boldsymbol{X}=\boldsymbol{X}\boldsymbol{X}^{-1}=\boldsymbol{I}$, 或 $\boldsymbol{X}^{-1}=\mathrm{adj}[\boldsymbol{X}]/\det[\boldsymbol{X}]$.
$\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}$	矩阵 $\boldsymbol{X}$ 的转置.
$\boldsymbol{X}^{-\mathrm{T}}$	矩阵 $\boldsymbol{X}$ 逆的转置: $\boldsymbol{X}^{-\mathrm{T}}=[\boldsymbol{X}^{-1}]^{\mathrm{T}}=[\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}]^{-1}$.
$\boldsymbol{X}^*$	(复) 矩阵 $\boldsymbol{X}$ 的共轭转置.
z^{-1}	单位后移算子, 如 $z^{-1}y(t)=y(t-1)$.
$f(t)=o(g(t))$	表示 $g(t)>0$, $\lim\limits_{t\to\infty}\dfrac{f(t)}{g(t)}=0$.
$f(t)=O(g(t))$	表示 $g(t)\geqslant 0$, 存在常数 $\delta_1>0$ 和 t_1 满足 $\|f(t)\|\leqslant\delta_1 g(t)$, $t\geqslant t_1$.
$\boldsymbol{P}(t)$	协方差矩阵.
δ	相对参数估计误差 $\delta:=\\|\hat{\boldsymbol{\theta}}(t)-\boldsymbol{\theta}\\|/\\|\boldsymbol{\theta}\\|$ 或 $\delta:=\\|\hat{\boldsymbol{\theta}}(t)-\boldsymbol{\theta}(t)\\|/\\|\boldsymbol{\theta}(t)\\|$.
δ_a	绝对参数估计误差 $\delta_a:=\\|\hat{\boldsymbol{\theta}}(t)-\boldsymbol{\theta}\\|$ 或 $\delta_a:=\\|\hat{\boldsymbol{\theta}}(t)-\boldsymbol{\theta}(t)\\|$.
δ_0	均方参数估计初值偏差 $\delta_0:=\mathrm{E}[\\|\hat{\boldsymbol{\theta}}(0)-\boldsymbol{\theta}\\|^2]$, 或 $\delta_0:=\mathrm{E}[\\|\hat{\boldsymbol{\theta}}(0)-\boldsymbol{\theta}(0)\\|^2]$.
δ_{ij}	Kronecker delta 函数, $\delta_{ij}=\begin{cases}1, & i=j,\\ 0, & i\neq j.\end{cases}$
δ_{ns}	噪信比, 其定义见 1.5 节和例 2.4.1.
$\boldsymbol{\theta}$ 或 $\boldsymbol{\theta}(t)$	时不变或时变参数向量 (或参数矩阵).
$\hat{\boldsymbol{\theta}}(t)$	参数向量 (矩阵) $\boldsymbol{\theta}$ 或 $\boldsymbol{\theta}(t)$ 在时刻 t 的估计.
$\tilde{\boldsymbol{\theta}}(t)$	参数估计误差 $\tilde{\boldsymbol{\theta}}(t):=\hat{\boldsymbol{\theta}}(t)-\boldsymbol{\theta}$ 或 $\tilde{\boldsymbol{\theta}}(t):=\hat{\boldsymbol{\theta}}(t)-\boldsymbol{\theta}(t)$.
λ	遗忘因子: $0\leqslant\lambda\leqslant 1$.
$\lambda[\boldsymbol{X}]$	方阵 $\boldsymbol{X}$ 的特征值.
$\lambda_i[\boldsymbol{X}]$	方阵 $\boldsymbol{X}$ 的第 i 个特征值.
$\lambda_{\max}[\boldsymbol{X}]$	对称矩阵 $\boldsymbol{X}$ 的最大特征值.
$\lambda_{\min}[\boldsymbol{X}]$	对称矩阵 $\boldsymbol{X}$ 的最小特征值.
$\sigma[\boldsymbol{X}]$	矩阵 $\boldsymbol{X}$ 的非零奇异值 (不要求为方阵), 它定义为 $\sigma[\boldsymbol{X}]:=\sqrt{\lambda[\boldsymbol{X}\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}]}$ 或 $\sigma[\boldsymbol{X}]:=\sqrt{\lambda[\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{X}]}$.
$\sigma_i[\boldsymbol{X}]$	矩阵 $\boldsymbol{X}$ 的第 i 个非零奇异值.
$\sigma_v^2(t)$ 或 σ_v^2	噪声 $\{v(t)\}$ 的方差.
$\otimes$	Kronecker 积或直积, 若 $\boldsymbol{A}=[a_{ij}]\in\mathbb{R}^{m\times n}$, $\boldsymbol{B}=[b_{ij}]\in\mathbb{R}^{p\times q}$, 则 $\boldsymbol{A}\otimes\boldsymbol{B}=[a_{ij}\boldsymbol{B}]\in\mathbb{R}^{(mp)\times(nq)}$, 一般 $\boldsymbol{A}\otimes\boldsymbol{B}\neq\boldsymbol{B}\otimes\boldsymbol{A}$.
$\star$	Star 积或 $\star$ 积或星积 (即块矩阵 $\star$ 积, 块矩阵内积), 定义见上.
$\circ$	Hadamard 积, 定义为两个矩阵对应元素相乘. 若 $\boldsymbol{A}=[a_{ij}]\in\mathbb{F}^{m\times n}$ 和 $\boldsymbol{B}=[b_{ij}]\in\mathbb{F}^{m\times n}$, 则 $\boldsymbol{A}\circ\boldsymbol{B}=[a_{ij}]\circ[b_{ij}]=[a_{ij}b_{ij}]\in\mathbb{F}^{m\times n}$. Hadamard 积要求两个矩阵的维数相同.

两个矩阵的 Hadamard 积的例子如下,

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix} \circ \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}b_{11} & a_{12}b_{12} \\ a_{21}b_{21} & a_{22}b_{22} \\ a_{31}b_{31} & a_{32}b_{32} \end{bmatrix}.$$

目　录