时滞递归神经网络的状态估计理论与应用

黄鹤 著

科学出版社

时滞递归神经网络的状态估计理论与应用

黄 鹤 著

科 学 出 版 社
北 京

内 容 简 介

本书系统地介绍了时滞递归神经网络的状态估计理论以及在反馈控制中的应用。全书分为四部分。其中，第一部分为第 2~6 章，主要介绍时滞局部场神经网络的状态估计。第二部分为第 7~10 章，主要阐述时滞静态神经网络的状态估计。第三部分为第 11~12 章，分析带马尔可夫跳跃参数的时滞递归神经网络的状态估计。第四部分为第 13 章，讨论时滞递归神经网络的状态估计理论在反馈控制方面的应用。

本书适合于高等院校自动化、计算机、电子信息、应用数学、非线性科学和物理等专业的高年级本科生、研究生和教师使用，也可供相关领域的科研人员参考。

图书在版编目(CIP)数据

时滞递归神经网络的状态估计理论与应用/黄鹤著. —北京：科学出版社，2014.9

ISBN 978-7-03-041891-3

Ⅰ. ①时… Ⅱ. ①黄… Ⅲ. ①人工神经网络-研究 Ⅳ. ①TP183

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2014) 第 211421 号

责任编辑：卜 新 王 哲 / 责任校对：胡小洁
责任印制：肖 兴 / 封面设计：迷底书装

科学出版社 出版
北京东黄城根北街 16 号
邮政编码：100717
http://www.sciencep.com

新科印刷有限公司 印刷
科学出版社发行 各地新华书店经销
*
2014 年 9 月第 一 版 开本：720 × 1 000 1/16
2014 年 9 月第一次印刷 印张：16 1/2
字数：332 000

定价：76.00 元
(如有印装质量问题，我社负责调换)

前　　言

20 世纪 80 年代以来，递归神经网络的理论研究已经取得飞速的发展。由于在函数逼近、并行处理、非线性映射、鲁棒性、自适应性和易于硬件实现等方面的优点，递归神经网络已经被成功地用于解决工程领域的各类实际问题，如系统建模、自适应控制、图像处理、组合优化、模式识别、信号处理、知识表示、通信工程以及预测等。

根据建模时所采用的基本变量的不同，递归神经网络模型可以分为两大类。一类是局部场神经网络模型。在这类模型中，人们采用神经元的局部场状态作为建模的基本变量。我们熟知的 Hopfield（霍普菲尔德）神经网络、细胞神经网络、Cohen-Grossberg 神经网络和双向联想记忆神经网络都属于局部场神经网络。另一类是采用神经元的状态信息作为基本变量而建立的静态神经网络模型。比如，盒中脑神经网络和投影神经网络等都是典型的静态神经网络。一般来说，这两类递归神经网络并不等价，它们只有在满足某些特定的条件时才能相互转化。

在递归神经网络模型中，人们需要考虑时滞带来的影响。时滞的出现主要有两方面的原因：一是在大规模集成电路的硬件实现过程中由电子元器件的物理特性（如放大器的有限切换速度）以及信息的传输和处理带来的时滞。二是为了更加有效地解决某些特定的实际问题有意引入的时滞。比如，对于移动图像的处理问题，在引入时滞的情况下取得的效果会优于没有时滞的情况。

一个用于解决复杂非线性问题的递归神经网络通常是由大量的神经元组成的，而且这些神经元之间具有非常丰富的连接。因此，对于这样的递归神经网络，要完全获知各神经元的状态信息往往会比较困难。另外，在一些实际的应用中，人们需要知道这些信息并加以利用以实现预期的目标。因此，对时滞递归神经网络的状态估计的研究具有非常重要的理论意义和实用价值，可以进一步推动和完善神经网络理论的发展，为其在工程领域的广泛应用提供坚实的理论支持。

在作者近几年研究成果的基础上，本书系统介绍时滞递归神经网络的状态估计理论与应用。具体而言，本书可以分为四部分：第一部分主要介绍运用多种不同的方法处理时滞局部场神经网络的状态估计问题；第二部分主要阐述在时滞静态神经网络的状态估计方面取得的研究成果；第三部分致力于讨论带马尔可夫跳跃参数的时滞递归神经网络的状态估计；第四部分介绍时滞递归神经网络的状态估计理论在反馈控制方面的应用。

本书的出版和开展的研究工作得到了国家自然科学基金（项目编号：61005047、

61273122）和江苏省自然科学基金（项目编号：BK2010214）的资助，也得到了科学出版社的大力支持。在此，一并表示感谢。

借此机会，衷心感谢曹进德教授和冯刚教授多年来对我的悉心培养、指导、鼓励和支持。深深感谢黄廷文教授的多次邀请，我得以到 Texas A&M University at Qatar 进行合作研究。同时，感谢苏州大学电子信息学院各位老师对我的关心与帮助，感谢我指导的研究生和一直给予我帮助、支持的朋友。最后，感谢家人对我的支持和理解。

由于作者水平有限，疏漏之处在所难免，恳请读者朋友批评、指正。

黄　鹤

2014 年 9 月于苏州大学

目　　录

第二部分　时滞静态神经网络的状态估计

第三部分 带马尔可夫跳跃参数的时滞递归神经网络的状态估计

第四部分 时滞递归神经网络的状态估计理论在反馈控制方面的应用

第 1 章　引　言

所谓的人工神经网络（artificial neural network，以下简称为神经网络）是模拟生物神经系统的工作方式而设计实现的，由大量神经元（neuron，有时也称为计算单元）相互连接所构成的，具有通过学习获取知识并解决问题的功能的一种计算模型。因此，神经网络在用于解决实际问题之前必须得到充分的学习。学习的方式主要有三类：无监督学习（unsupervised learning）、有监督学习（supervised learning）和强化学习（reinforcement learning）。

神经网络模型的三个基本要素为：连接权值（connection weight）、求和单元以及激励函数（activation function）。其中，连接权值可用于存储学习到的知识，神经元的偏置（bias）也可以当作权值来理解，只是此时对应的输入恒为 1；求和单元用于计算神经元输入信号的加权和；激励函数可以将神经元的输出限定在某个给定的范围内。比如，常用的 S 型函数 $\dfrac{1}{1+\mathrm{e}^{-\alpha x}}$ 和 $\dfrac{1-\mathrm{e}^{-\alpha x}}{1+\mathrm{e}^{-\alpha x}}$ 就可以分别将神经元的输出限制在 $(0,1)$ 和 $(-1,1)$ 这两个区间内。

1.1　神经网络的研究进展

20 世纪 40 年代 W. McCullon 和 W. Pitts 提出 M-P 神经元模型以及 D. Hebb 提出第一个神经元学习规则（即 Hebb 规则）以来，神经网络理论得到了极大的发展。但是，其发展过程并不是一帆风顺的。事实上，神经网络理论的发展既经历过高潮时期，也有低谷阶段，可谓一波三折。在研究的初始阶段，由于受当时科学技术和认知水平的影响，人们没有完全掌握神经网络所具有的强大的计算与信息处理能力，甚至认为神经网络连一些简单的非线性可分问题都无法解决，从而使得神经网络的理论研究停滞不前。我们不妨来看一个简单的例子。在逻辑学中，异或问题（XOR）是一种简单的二值逻辑运算，通常记为 $A \oplus B$。其运算规则为：当两个变量的取值相同时，逻辑函数值为 0；当两个变量的取值不同时，逻辑函数值为 1。异或问题的真值表如表 1.1 所示。对于这样简单的一个非线性可分问题，我们都没法用单层前向神经网络（single-layer feedforward neural network）进行求解。虽然多层前向神经网络（multi-layer feedforward neural network）可以非常容易地解决这一问题，但是当时缺乏有效的权值调整的学习算法。这就使得人们悲观地相信神经网络理论不会有好的发展前景，从而直接导致了神经网络的研究在短暂的兴起

后很快就跌入了低谷。

表 1.1　异或问题的真值表

A	B	$A \oplus B$
1	1	0
1	0	1
0	1	1
0	0	0

值得庆幸的是，在这一时期，仍然有不少科学家还坚持着对神经网络的理论研究。直到 20 世纪七八十年代，随着 Hopfield 神经网络模型和一些著名的多层前向神经网络的学习算法的提出，人们对神经网络的研究兴趣才再次兴起。也正是在这个时候，递归神经网络模型（recurrent neural network）才被建立起来[1,2]。在此之前，人们更多的是注重于前向神经网络（feedforward neural network）的研究与应用。在前向神经网络中，信号从输入层神经元经过隐层神经元传输到输出层神经元，没有信息可以反馈回来作为输入层神经元的输入。著名的前向神经网络模型有单层感知器（single-layer perceptron）、多层感知器（multi-layer perceptron）、径向基函数网络（radial basis function network）、自组织特征映射（self-organizing feature mapping）以及 Boltzmann（玻尔兹曼）机等[3,4]。与此同时，提出了很多非常著名的适用于前向神经网络训练的学习算法。比较有代表性的算法有误差后向传播算法（error back-propagation algorithm，简称 BP 算法）、Widrow-Hoff 学习规则、正交最小二乘算法（orthogonal least squares algorithm）和内插值算法（interpolation algorithm）等。随着研究的不断深入，目前也有许多智能算法被成功地应用于训练各种前向神经网络，如遗传算法（genetic algorithm）、免疫算法（immune algorithm）、蚁群算法（ant colony algorithm）、模拟退火算法（simulated annealing algorithm）以及粒子群算法（particle swarm algorithm）等。当然，前向神经网络模型的结构也越来越复杂。比如，一个前向神经网络可以由多个子神经网络组成，即其中的一些计算单元本身就是一个神经网络。已经知道，前向神经网络模型具有很多的优点。在此，我们简单列举几点。

（1）并行处理与分布式存储。和传统计算机的按地址存储方式不同，神经网络是将学习获得的知识存储在一些重要的参数中，如神经元的连接权值。因此，学习的目的就是按照某种方式不断地调整神经元之间的权值，直到算法停止条件满足为止。算法停止的条件可以是目标函数小于某一事先给定的阈值，或者迭代达到最大的训练次数等。

（2）函数逼近能力。已经在理论上严格证明，只要隐层神经元的个数足够多，多层前向神经网络可以以任意精度逼近一个定义在紧集上的连续函数[1]。这样，前向神经网络模型就可以作为一个通用的函数逼近器。因此可广泛用于对未知系统进行建模。但是，不足之处是，这个结论没有告诉人们在设计多层神经网络时如何选择合适的隐层神经元个数。

（3）非线性映射。由于神经元之间复杂的连接以及神经元的激励函数常常都具有非线性性，所以神经网络本身具有很强的非线性处理能力。事实上，神经网络

可以理解为一个从输入空间到输出空间的非线性映射。

（4）鲁棒性和容错性。通常，神经网络模型都是由大量的神经元经过高度互连所组成的，所以局部神经元的损坏并不会严重影响神经网络本身的正常运行。

（5）自适应性。神经网络可以通过自身的调整适应外界环境的变化。

（6）学习和联想能力。一个神经网络只有经过充分的学习后才能用于解决实际的问题。

和前向神经网络不同的是，递归神经网络模型中存在反馈。也就是说，一个神经元的输出信号可以反馈回来作为其他神经元（甚至是自身）的输入。所以，在递归神经网络中，神经元的输入信号可以有两部分：一部分是外部输入（或者外界的刺激）；另一部分是反馈回来的其他神经元的输出信号。我们所熟悉的 Hopfield 神经网络的神经元的输入就是这样的。从而，递归神经网络可以用动态方程来描述。一般，离散时间的递归神经网络用差分方程（difference equation）表示，连续时间的递归神经网络用微分方程（differential equation）表示。这类神经网络除了具有前向神经网络的优点之外，还具有一些特殊的优点，比如：

（1）具有丰富的动力学行为。我们讲过，递归神经网络可以用一个动态方程来刻画。因此，在计算的过程中，模型本身会不断地演化以致于产生复杂的动力学行为，甚至混沌现象。

（2）易于硬件实现和模拟仿真。递归神经网络可以很容易地用大规模集成电路（very large scale integration，VLSI）来实现。过去，人们对神经网络的硬件实现做了大量的研究工作，详见文献 [5]。当然，在硬件实现时需要一定的成本。因此，为了节约成本或者在条件不成熟时，人们可以利用软件对递归神经网络的演化过程进行模拟。

（3）便于理论分析。人们可以借助于已有的数学、物理和信息等领域的知识对递归神经网络进行理论分析。比如，J. J. Hopfield 最早通过定义能量函数和运用著名的 Lyapunov（李雅普诺夫）稳定性理论分析了 Hopfield 神经网络的稳定性[6]。这样，在解决实际问题时，就可以将问题的解与递归神经网络的稳定的平衡点（equilibrium point）对应起来。

由于以上的诸多优点，递归神经网络理论在近 30 年来得到了飞速的发展，在各种领域取得了非常成功的应用。这些领域包括自适应控制、航天航空、电子科学与技术、机械工程、金融、地质勘探、组合优化、生物医学工程、海洋工程以及制造工程等[1,7-21]。

1.2 递归神经网络的分类

迄今为止，人们已经成功地建立了许多不同的递归神经网络模型。这些模型

在网络结构、性能与应用等方面都有各自的特点。我们熟知的递归神经网络模型有可加神经网络（additive neural network）[2,22–24]、Cohen-Grossberg 神经网络[25]、Hopfield 神经网络[6,26,27]、细胞神经网络（cellular neural network）[28,29]、双向联想记忆神经网络（bidirectional associative memory neural network）[30,31]、盒中脑模型（brain-in-a-box model）[32] 以及投影神经网络（projection neural network）[33,34] 等。

根据建模时所采用的基本变量的不同，递归神经网络可以分为两大类[35,36]。

一类是以神经元的局部场状态为基本变量而建立的局部场神经网络模型（local field neural network）。由 n 个神经元组成的局部场神经网络模型可以用如下的微分方程来表示：

$$\frac{\mathrm{d}u_i(t)}{\mathrm{d}t} = -a_i u_i(t) + \sum_{j=1}^{n} w_{ij} f_j(u_j(t)) + J_i \tag{1.1}$$

其中，$i = 1, 2, \cdots, n$，w_{ij} 是神经元 j 和 i 之间的连接权值，f_j 是神经元 j 的激励函数，J_i 是作用于神经元 i 的外部输入。前面提到的 Cohen-Grossberg 神经网络、Hopfield 神经网络、细胞神经网络、双向联想记忆神经网络都是著名的局部场神经网络模型。

另一类是所谓的静态神经网络（static neural network）[2]。在这一类模型中，神经元的状态被作为基本变量用来实现对神经网络的动力学演化规则的刻画。从数学上来讲，静态神经网络可以表示为

$$\frac{\mathrm{d}v_i(t)}{\mathrm{d}t} = -a_i v_i(t) + f_i\left(\sum_{j=1}^{n} w_{ij} v_j(t) + J_i\right) \tag{1.2}$$

典型的静态神经网络模型有盒中脑模型以及被广泛应用于求解组合优化问题的投影神经网络等。

由式 (1.1) 和式 (1.2) 不难发现，局部场神经网络和静态神经网络并不相同。已经知道，只有当某些特定条件满足时，这两类递归神经网络模型才能相互转化。为了说明这一问题，记

$$\begin{aligned}
u(t) &= \left[u_1(t), u_2(t), \cdots, u_n(t)\right]^{\mathrm{T}} \\
v(t) &= \left[v_1(t), v_2(t), \cdots, v_n(t)\right]^{\mathrm{T}} \\
A &= \mathrm{diag}(a_1, a_2, \cdots, a_n) \\
W &= [w_{ij}]_{n\times n} \\
J &= \left[J_1, J_2, \cdots, J_n\right]^{\mathrm{T}}
\end{aligned}$$

可以证明，当神经元之间的连接权矩阵 W 可逆且 $WA = AW$ 时，通过变换 $u(t) = Wv(t) + J$，式 (1.2) 就可以转化为式 (1.1)。但是，这个条件并不总是成立的。文

献 [32] 就给出了一个实际的例子。这个例子说明了在一般情况下这些条件并不一定能满足。因此，我们有必要对这两类递归神经网络分别进行讨论。

1.3 递归神经网络的动力学行为

对递归神经网络来讲，一个非常重要的性质就是希望它的平衡点是稳定的。那么，什么是平衡点呢？假设一个 n 阶自治系统的状态方程为

$$\frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t} = f(x(t))$$

其中，$f(x(t))$ 是一连续的向量值函数，则其平衡点为满足 $f(x^*) = 0$ 的平凡解 x^*。

仍以式 (1.1) 和式 (1.2) 所表示的递归神经网络为例。根据上述定义，式 (1.1) 的平衡点就是满足方程组

$$-a_i u_i^* + \sum_{j=1}^{n} w_{ij} f_j(u_j^*) + J_i = 0$$

的解 $u^* = \left[u_1^*, u_2^*, \cdots, u_n^*\right]^{\mathrm{T}}$。而式 (1.2) 的平衡点就是满足方程组

$$-a_i v_i^* + f_i\left(\sum_{j=1}^{n} w_{ij} v_j^* + J_i\right) = 0$$

的解 $v^* = \left[v_1^*, v_2^*, \cdots, v_n^*\right]^{\mathrm{T}}$。

众所周知，递归神经网络能够在许多工程领域中得到成功应用的前提条件是所设计的神经网络模型的平衡点是稳定的[37−42]。例如，用于求解优化问题的递归神经网络就被要求具有唯一的平衡点，且这个平衡点是全局稳定的，从而在实现的过程中，这个平衡点就可以与问题的最优解对应起来[33, 38]。又如，用于联想存储的递归神经网络就希望具有有限个稳定的平衡点，这样每个平衡点就可以对应于相应的模式。

1.3.1 Lyapunov 稳定性理论简介

这里所讨论的稳定性指的是 Lyapunov 意义下的稳定性，包括全局渐近稳定性（globally asymptotically stability）、全局指数稳定性（globally exponential stability）和多稳定性（multistability），以及在随机情况下的随机稳定性（stochastic stability）和均方指数稳定性（mean square exponential stability）等。根据 Lyapunov 稳定性理论，判断系统的平衡点的稳定性问题可以通过构造恰当的 Lyapunov 函数（或泛函）来解决。换句话说，如果能够构造一个满足某些特定条件的 Lyapunov 函数（比

如，这个 Lyapunov 函数本身是正定的，且其沿系统的轨迹的导数是负定的)，那么这个系统的平衡点就是全局渐近稳定的。

我们可以通过一个简单的例子来说明。考虑如下微分方程所表示的系统

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}x_1}{\mathrm{d}t} = -3x_1 + 2x_2^2 \\ \dfrac{\mathrm{d}x_2}{\mathrm{d}t} = -2x_2(1+x_1) \end{cases} \tag{1.3}$$

显然，$x^* = [x_1^*, x_2^*]^{\mathrm{T}} = [0,0]^{\mathrm{T}}$ 是系统的一个平衡点。构造 Lyapunov 函数

$$V(x) = x_1^2 + x_2^2$$

则 $V(x^*) = 0$，且对任意的 $x \neq x^*$ 有 $V(x) > 0$。通过计算容易知道，$V(x)$ 沿系统 (1.3) 的轨迹对时间 t 的导数为

$$\frac{\mathrm{d}V(x)}{\mathrm{d}t} = -6x_1^2 - 4x_2^2$$

于是，对任意的 $x \neq x^*$ 有 $\mathrm{d}V(x)/\mathrm{d}t < 0$。所以，系统 (1.3) 的平衡点 $x^* = [0,0]^{\mathrm{T}}$ 是全局渐近稳定的。

Lyapunov 稳定性理论是一个非常伟大的成就，具有划时代的意义。它告诉我们在不需要知道系统的解析解的情况下也能通过构造合适的 Lyapunov 函数来有效地判断系统的平衡点是否稳定。但是，遗憾的是，Lyapunov 稳定性理论并没有告诉人们怎么构造这个合适的 Lyapunov 函数（或泛函）。有关动力系统稳定性理论的详细介绍，有兴趣的读者可以参阅文献 [43]~ 文献 [48]。

自 J. J. Hopfield 通过定义能量函数分析 Hopfield 神经网络的稳定性以来，对递归神经网络的平衡点的稳定性分析吸引了大量学者的关注，已经公开发表了相当多的非常精彩的研究成果 [49]。

1.3.2 时滞线性系统的稳定性

由于信号的传输和处理，时滞（time delay）不可避免地会出现在各种实际系统中，如网络控制系统、化学过程、生物系统和通信系统等 [43, 44, 46]。已经知道，时滞的存在会严重影响系统的动力学行为，破坏其稳定性，甚至降低系统的性能。

近年来，人们对时滞线性系统（time delay linear system）的研究越来越多，相关的综述性文献就有文献 [50]~ 文献 [52]。特别地，在文献 [52] 中，著名学者 S. Xu 和 J. Lam 详细地介绍了采用线性矩阵不等式（linear matrix inequality，LMI）技术取得的时滞线性系统稳定性方面的研究成果。对于时滞系统来说，研究的一个热点问题就是如何提出新方法得到保守性（conservatism）更弱的稳定性分析与综合的结果。这里的保守性指的是得到的稳定性结果是否可以用于判定当时滞（或者时变

时滞的上界）更大时系统的稳定性。如果适用于时滞更大的情况，则称这个结果的保守性相对更弱。反之，则称相应的稳定性结果更加保守。在时域中，对时滞线性系统的稳定性分析主要有两类方法：基于 Razumikhin 定理的方法和 Lyapunov 泛函方法。通常，由基于 Razumikhin 定理的方法得到的条件可用于时滞快速变化的情况。但是，在 Lyapunov 泛函方法中则可以更多地利用时滞的信息。根据是否利用了时滞的信息，时滞线性系统的稳定性条件可分为两大类。一类是与时滞无关的，即不依赖于时滞的条件（delay-independent condition）[53–57]；另一类就是所谓的依赖于时滞的条件（delay-dependent condition），它与时滞的信息是密切相关的[58–62]。因为在依赖于时滞的条件中充分利用了时滞的信息，因此，一般来说，依赖于时滞的条件要比不依赖于时滞的条件具有更弱的保守性，特别是对时滞很小的情况。于是，为了得到保守性更弱的依赖于时滞的稳定性结果，人们提出了许多非常有效的方法。其中一些比较有代表性的方法有描述系统（descriptor system）方法、基于自由权矩阵（free-weighting matrix）的方法、基于积分不等式（integral inequality）的方法、增广 Lyapunov 泛函（augmented Lyapunov functional）方法以及时滞划分（delay decomposition）方法等。这些方法都是通过构造不同的 Lyapunov 泛函以及采用不同的技术和手段估计沿系统的轨迹的导函数实现的，因此都属于 Lyapunov 泛函方法。

随着凸优化理论的发展和数值计算技术的提高，线性矩阵不等式技术在系统分析与综合中的强大作用不断地得到体现。和以前的基于 Lyapunov 方程或者 Riccati 方程的方法所不同的是，人们可以利用一些著名的凸优化算法如椭球算法（ellipsoid algorithm）和内点算法（interior point algorithm）等实现对线性矩阵不等式的求解[63, 64]。正如在文献 [63] 中所述，求解线性矩阵不等式所需要的计算复杂度是和 mn^3 成正比的。其中，m 表示线性矩阵不等式中矩阵的行数，n 是线性矩阵不等式中所有决策变量的个数。因此，对于较大规模的线性矩阵不等式，如果它的可行解（feasible solution）存在的话，人们就可以非常高效地找到这个可行解。20 世纪 90 年代，美国 MathWorks 公司开发了基于内点算法的求解线性矩阵不等式的工具箱，即 Matlab 线性矩阵不等式工具箱（Matlab LMI Toolbox），从而使得线性矩阵不等式的求解变得更加简便[65]。这在很大程度上促进了线性矩阵不等式技术在控制系统的分析与综合方面的应用与研究[52]。

下面，我们简单地介绍一些时滞线性系统的稳定性分析与综合方面的研究成果。在文献 [62]、[66]、[67] 中，研究人员提出了一个模型转换（model transformation）方法，讨论时滞线性系统的稳定性并得到了一些依赖于时滞的结果。但是，文献 [68]、[69] 指出经过模型转换之后可能会对原来的系统带来额外的动力学行为。因此，这种方法具有一定的保守性。在文献 [70]、[71] 中，韩国学者提出了一些不等式并用来分析时滞线性系统的稳定性。这些不等式都可以看成是对基本不等式

$-2x^{\mathrm{T}}y \leqslant x^{\mathrm{T}}Sx + y^{\mathrm{T}}S^{-1}y$（这里 $x, y \in \mathbb{R}^n$ 且 $S > 0$）的推广。与此同时，Jensen 不等式[43] 也被广泛地用于建立一些依赖于时滞的稳定性判据，如文献 [72]、[73]。在文献 [74] 中，作者提出了一个基于描述系统的方法用于处理时滞中立系统（delayed neutral system）的 H_∞ 控制问题，并将输出反馈控制器的设计转化为求解两个线性矩阵不等式。更多基于描述系统方法的结果可参见文献 [61]、[75]～ [77]。为了进一步降低一些稳定性判据的保守性，文献 [78] 率先提出了一个离散化 Lyapunov 泛函，用于研究带参数不确定性的时滞系统的稳定性。近来，为了有效地克服已有方法中存在的局限性，吴敏和何勇提出了一种基于自由权矩阵的方法[79]。这种方法的基本思想是通过 Newton-Leibniz（牛顿–莱布尼茨）公式引入了一些自由权矩阵，从而可以有效地降低稳定性结果的保守性。这里，之所以把引入的这些矩阵称为自由权矩阵，是因为对这些矩阵没有附加的约束，如不需要它们是对称正定的。这种方法已经在自动控制领域得到非常广泛的应用，见文献 [80]～ 文献 [87] 等。在此期间，另一种被广泛应用的方法是时滞划分方法[88, 89]。在这种方法中，可以对时滞进行 k 等分，这里的 k 是一个正整数。在此基础上，通过构造新的 Lyapunov 泛函，人们可以得到保守性更低的稳定性准则。通过数值计算可以验证，随着划分的不断细化，稳定性结果的保守性会进一步减弱。随着研究的深入，也出现了对时滞进行不等分的方法。当然，也可以将这些不同的方法结合起来从而得到保守性更弱的稳定性条件。

1.3.3　时滞递归神经网络的稳定性

毫不例外，时滞同样会在递归神经网络模型中存在。这主要有两方面的因素。一是在递归神经网络的大规模集成电路的实现过程中所采用的放大器等电子元件的有限切换速度，以及神经元之间的信号传输导致的；二是为了更加有效地解决一些特定的问题（如移动物体的速度探测、移动图像处理等），人们有意在神经网络模型中引入的时滞[90]。对于递归神经网络来说，除了定常时滞（constant delay）和时变时滞（time-varying delay）外，还有一类分布式时滞（distributed delay）[91–94]。由于时滞的出现，递归神经网络模型可以展现出非常复杂的动力学行为[95, 96]。在文献 [97]、[98] 中，研究人员分别提出了一些具有混沌动力学行为的时滞递归神经网络模型。20多年来，时滞递归神经网络动力学行为的研究吸引了信息、数学和物理等领域大量学者的关注，取得了非常好的研究成果。这方面的专著参见文献 [49]、[99]～ [101]。目前，人们已经提出了多种不同的方法分析时滞递归神经网络的各种稳定性[102]。这些方法包括非奇异 M 矩阵（nonsingular M-matrix）方法[103]、非线性测度方法（nonlinear measure approach）、非光滑分析方法（nonsmooth analysis approach）[104]等。1.3.2 节提及的时滞线性系统稳定性分析的方法都可以经过适当推广后应用于时滞递归神经网络的稳定性分析，因此容易得到由线性矩

阵不等式表示的稳定性结果。在文献 [105] 中，我国学者 J. Cao 研究了时滞细胞神经网络的全局渐近稳定性。通过引入一组参数，得到了一些不依赖于时滞的稳定性条件，并且证明了这个条件包含了文献 [106]、[107]中的一些结果作为其特例。文献 [108] 利用同胚理论（homeomorphism theory）和非负矩阵（nonnegative matrix）技术讨论了一类神经网络的平衡点的存在性、唯一性和全局渐近稳定性。这些结果被成功地应用于求解线性和二次优化问题。文献 [109]、[110] 的作者分析了具有多个时变时滞的递归神经网络的周期解（periodic solution）的全局指数稳定性。通过利用拓扑度理论（topological degree theory），指数稳定性的判断可以通过检验相应的矩阵是否是非奇异 M 矩阵来实现。由文献 [103] 可知，有相当多的等价条件可以用来确定一个矩阵是否是非奇异 M 矩阵。这样，在实际中，我们就可以很容易地验证一个矩阵是否是非奇异 M 矩阵了。因此，这种基于非奇异 M 矩阵的方法在早期的时滞递归神经网络的稳定性分析中得到了广泛的应用。其他一些相关结果可以参见文献 [107]、[111]~[113] 等。类似于矩阵测度（matrix measure），非线性测度理论也被用于时滞递归神经网络的稳定性分析。在文献 [114] 中，H. Qiao 等学者就提出了一种非线性测度方法用于分析 Hopfield 神经网络的指数稳定性。根据这个方法，人们可以有效地估计该神经网络的指数衰减率以及局部稳定的吸引域（attraction region）。这种方法在文献 [115] 中也被用于讨论时滞静态神经网络的指数稳定性。在大多数的结果中，人们都要求神经元的激励函数是连续的。然而，如果对激励函数的假设越少时，神经网络的性能可能会在一定程度上得到提高。那么，是否可以不要求激励函数的连续性呢？或者，在激励函数不连续时，该怎么处理呢？在文献 [116] 中，作者就提出了一种有效的方法，即非光滑分析方法。这种方法可以降低对神经元的激励函数的要求，从而可用于激励函数不连续的情况[117−119]。

前面提到的这些时滞递归神经网络的稳定性结果大多都是不依赖于时滞的。因此，这些结果都可以应用于时滞任意大的情况。但是，相对来讲，这些结果可能会比较保守。随着线性矩阵不等式技术的发展，从 2002 年开始，出现了越来越多的用线性矩阵不等式技术分析时滞神经网络稳定性的结果。前面提到的诸如自由权矩阵方法和时滞划分方法等都可以有效地用于时滞神经网络的稳定性分析[120−124]。在此，我们就不再一一列举。更多时滞神经网络的稳定性结果可参见文献 [91]、[113]、 [125]~[148]。

1.4 研究现状和全书主要内容概述

随着现代科学技术的发展，人们遇到的系统越来越复杂，外界环境越来越变化多端，同时需要考虑的因素也越来越多。那么，从控制的角度来看，人们就非常