高等数学

（下册）

ADVANCED MATHEMATICS

主　编　周宏艺　傅　媛

副主编　熊传霞　李自玲

主　审　彭斯俊

WUHAN UNIVERSITY PRESS

武汉大学出版社

高等数学(下册)

主　编　周宏艺　傅　媛
副主编　熊传霞　李自玲
主　审　彭斯俊

WUHAN UNIVERSITY PRESS
武汉大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

高等数学.下册/周宏艺,傅媛主编.—武汉:武汉大学出版社,2014.8
ISBN 978-7-307-13916-9

Ⅰ.高…　Ⅱ.①周…　②傅…　Ⅲ.高等数学—高等学校—教材
Ⅳ.O13

中国版本图书馆CIP数据核字(2014)第172874号

责任编辑:郭　芳　　责任校对:路亚妮　　装帧设计:吴　极

出版发行:**武汉大学出版社**　(430072　武昌　珞珈山)
(电子邮件:whu_publish@163.com　网址:www.stmpress.cn)
印刷:武汉科源印刷设计有限公司
开本:787×960　1/16　印张:17.5　字数:327千字
版次:2014年8月第1版　2014年8月第1次印刷
ISBN 978-7-307-13916-9　定价:29.00元

前　言

“高等数学”是高等院校各学科专业学生必修的一门重要的基础课程，高等数学的教学对于后续专业课程的学习及合格专业人才的培养起到非常重要的作用. 在高等教育培养目标和教学要求呈现出多层次、多元化的今天，我们根据《工科类本科数学基础课程教学基本要求》，按照“以应用为目的，以必需够用为度”的原则，结合编者多年的教学经验，编写了本套适用于不同教学要求的院校和专业的《高等数学》(上、下册)教材.

本书为《高等数学(下册)》，与王玉霞、曾京京主编的《高等数学(上册)》为一套教材，主要介绍了向量代数与空间解析几何、多元函数微积分学及其应用、重积分、曲线积分与曲面积分、微分方程、无穷级数的相关知识. 为便于读者自学，轻松入门，全书采用理论与实例相结合的方式进行编写，力求结构严谨，逻辑清晰，语言精练、准确，内容通俗易懂. 每节均附有适量的例题和习题，每章配备了难度较高的总习题(供要求较高的读者选做)，题型新颖、典型，具有代表性和实用性，便于读者理解和掌握基本概念和定理.

本书在武汉理工大学数学系朱金寿教授的指导下进行编写，他为本书的顺利编撰付出了大量心血，在此表示诚挚的感谢.

本书由武汉理工大学数学系彭斯俊教授担任主审，参加审阅的还有朱长林教授，他们认真审阅了全部书稿并提出了不少宝贵意见和建议，对本书的编写作出了很大的贡献，在此表示衷心的感谢.

编者所在学校的各级领导及数值与数字应用教研室的老师们在本书的编撰过程中给予了极大的支持，武汉大学出版社对本书的出版给予了热情帮助和大力支持，在此一并致谢.

由于时间仓促、水平有限，书中难免有不妥之处，恳请各位同行和广大读者在使用后提出意见，以便我们改进和完善.

编　者

2014 年 6 月

目　录

6　向量代数与空间解析几何

与平面解析几何类似,空间解析几何是利用空间直角坐标系建立空间的点与有序实数组的对应关系,把几何图形与代数方程对应起来,从而可以用代数方法来研究几何问题.

本章首先建立空间直角坐标系,引进应用极为广泛的向量的概念,以及向量的运算,并以向量为工具建立空间的平面与直线方程,最后讨论曲面和空间曲线的一般方程,以及二次曲面的几何特征.本章的内容对以后学习多元函数的微积分将起到重要的作用.

6.1　向量及其运算

6.1.1　空间点的直角坐标

我们知道,代数与几何原本是互不相关的,代数运算的基本对象是数,几何图形的基本元素是点,要用代数方法研究空间图形,首先要建立空间的点与有序数组之间的关系.依照平面解析几何的方法,可以通过建立空间直角坐标系来实现.

过空间一个定点 O,作三条互相垂直的数轴,它们都以 O 为原点且一般具有相同的长度单位,这三条轴分别叫作 **x 轴(横轴)**、**y 轴(纵轴)**、**z 轴(竖轴)**,统称为**坐标轴**.它们的正方向符合右手法则,即以右手握住 z 轴,当右手的四个手指从 x 轴的正向以 $\pi/2$ 角度转向 y 轴的正向时,竖起的大拇指的指向就是 z 轴的正向(图 6-1),这样的三条坐标轴就组成了空间直角坐标系,点 O 叫作**坐标原点**(或**原点**).

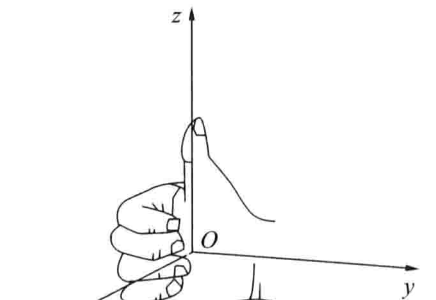

图 6-1

三条坐标轴中的任意两条可以确定一个平面,分别叫作 xOy 面、yOz 面和 zOx 面,这样定出的三个平面统称为**坐标面**.三个坐标面把空间分成八个部分,每一部分叫作一个卦限,含有 x 轴、y 轴及 z 轴正半轴的那个卦限叫作第一卦限,第二、第三及第四卦限在 xOy 面上方,按逆时针方向确定,在 xOy 面下方与第一

至第四卦限相对应的是第五至第八卦限.这八个卦限分别用 Ⅰ、Ⅱ、Ⅲ、Ⅳ、Ⅴ、Ⅵ、Ⅶ、Ⅷ 表示(图 6-2).

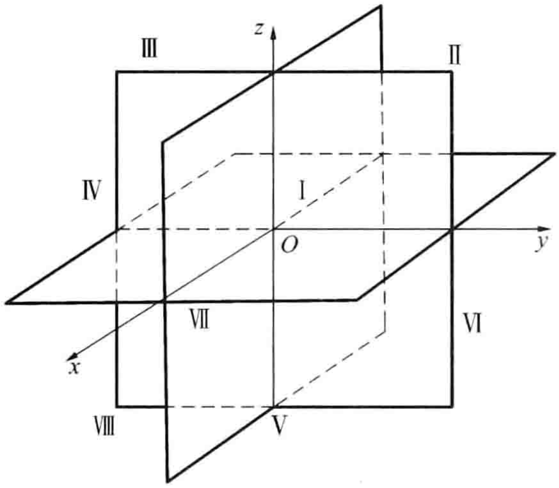

图 6-2

设 M 为空间任意一点,我们过点 M 作三个平面分别垂直于 x 轴、y 轴和 z 轴,它们与 x 轴、y 轴和 z 轴的交点分别为 P、Q、R(图 6-3).这三点在 x 轴、y 轴和 z 轴的坐标分别为 x、y 和 z,于是空间的一点 M 唯一地确定了一个有序数组 (x,y,z);反过来,已知一有序数组 (x,y,z),我们可以在 x 轴上取坐标为 x 的点 P,在 y 轴上取坐标为 y 的点 Q,在 z 轴上取坐标为 z 的点 R,然后通过 P、Q、R 分别作 x 轴、y 轴和 z 轴的垂直平面,这三个垂直平面的交点 M 便是由有序数组 (x,y,z) 所确定的唯一的点.这样,就建立了空间的点 M 和有序数组 (x,y,z) 之间的一一对应关系,有序数组 (x,y,z) 就叫作点 M 的**坐标**,并分别称 x、y 和 z 为点 M 的**横坐标**、**纵坐标**和**竖坐标**,坐标为 x、y 和 z 的点 M 通常记为 $M(x,y,z)$.

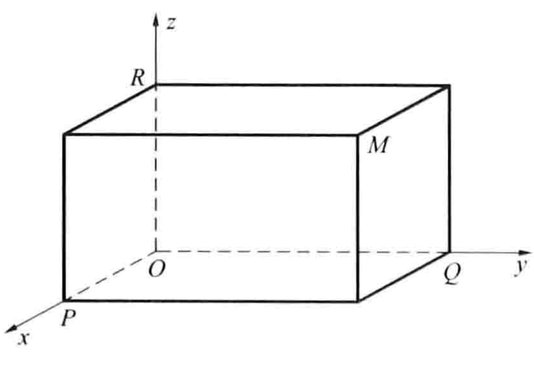

图 6-3

坐标面和坐标轴上的点，其坐标各有一定的特征. 例如，在坐标面 xOy、yOz 和 zOx 的点的坐标分别为 $(x,y,0)$、$(0,y,z)$、$(x,0,z)$，在 x 轴、y 轴和 z 轴上的点的坐标分别为 $(x,0,0)$、$(0,y,0)$、$(0,0,z)$，坐标原点的坐标是 $(0,0,0)$.

6.1.2 空间两点间的距离

设 $M_1(x_1,y_1,z_1)$ 与 $M_2(x_2,y_2,z_2)$ 是空间两点，我们过 M_1、M_2 各作三个分别垂直于三条坐标轴的平面，这六个平面围成一个以 M_1M_2 为对角线的长方体(图 6-4).

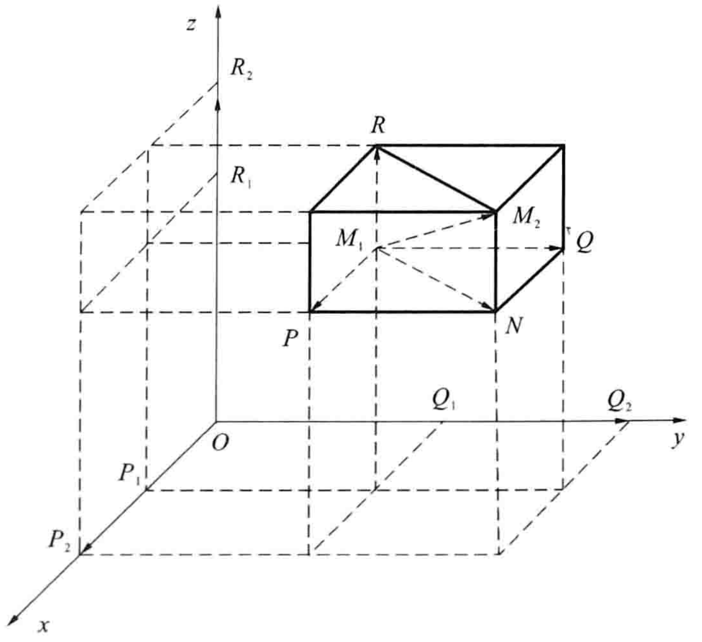

图 6-4

显然

$$|M_1M_2|^2 = |M_1P|^2 + |PN|^2 + |NM_2|^2,$$

而

$$|M_1P| = |P_1P_2| = |x_2 - x_1|,$$
$$|PN| = |Q_1Q_2| = |y_2 - y_1|,$$
$$|NM_2| = |R_1R_2| = |z_2 - z_1|,$$

故

$$|M_1M_2| = \sqrt{(x_2-x_1)^2 + (y_2-y_1)^2 + (z_2-z_1)^2},$$

这就是空间两点间的**距离公式**.

特殊地，点 $M(x,y,z)$ 与坐标原点 $O(0,0,0)$ 之间的距离为

$$d = |OM| = \sqrt{x^2+y^2+z^2}.$$

【例 6-1】 试证明以三点 $A(4,1,9)$、$B(10,-1,6)$、$C(2,4,3)$为顶点的三角形是一个等腰直角三角形.

证 因为

$$|AB|^2=(10-4)^2+(-1-1)^2+(6-9)^2=49,$$
$$|BC|^2=(2-10)^2+[4-(-1)]^2+(3-6)^2=98,$$
$$|AC|^2=(2-4)^2+(4-1)^2+(3-9)^2=49,$$

所以

$$|AB|=|AC|,\quad |AB|^2+|AC|^2=|BC|^2,$$

即 $\triangle ABC$ 为等腰直角三角形.

6.1.3 向量的概念

在研究力学、物理学及其他应用科学时,常会遇到这样的一些量,它们既有大小,又有方向,这样的量叫作向量(或矢量),如力、力矩、位移、速度、加速度等都是向量.

在数学上,常用一条有方向的线段来表示向量,有向线段的长度表示向量的大小,有向线段的方向表示向量的方向.以 M_1 为起点,M_2 为终点的有向线段所表示的向量记作$\overrightarrow{M_1M_2}$,有时也用一个黑体字母或用上面加箭头的字母来表示向量,例如 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{i}$、$\boldsymbol{F}$ 或 $\vec{a}$、$\vec{i}$、$\vec{F}$ 等.

以坐标原点 O 为起点,向一个点 M 引向量$\overrightarrow{OM}$,这个向量叫作点 M 对于 O 的向径,常用粗体字 $\boldsymbol{r}$ 来表示.

向量的大小叫作向量的**模**,向量$\overrightarrow{M_1M_2}$或 $\boldsymbol{a}$ 的模用$|\overrightarrow{M_1M_2}|$或$|\boldsymbol{a}|$表示.模等于 1 的向量叫作**单位向量**,与向量 $\boldsymbol{a}$ 具有同一方向的单位向量记作 $\boldsymbol{e}_a$.模等于 0 的向量叫作**零向量**,记作 $\boldsymbol{0}$ 或 $\vec{0}$,零向量的起点和终点重合,它的方向可看作是任意的.

若两个向量 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$ 的大小相等,方向也相同,则称向量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 是相等的,记作 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}$,也就是说,经过平行移动后能完全重合的向量是相等的.

两个非零向量如果它们的方向相同或者相反,就称这两个向量是平行的,向量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 平行,记作 $\boldsymbol{a}\parallel\boldsymbol{b}$.由于零向量的方向可看作是任意的,因此可认为零向量与任何向量都平行.

6.1.4 向量的加减法

向量的加法运算规定如下:

将向量 $\boldsymbol{b}$ 平行移动到以向量 $\boldsymbol{a}$ 的终点作为向量 $\boldsymbol{b}$ 的起点的位置,则以向量 $\boldsymbol{a}$

的起点为始点，向量 $\boldsymbol{b}$ 的终点为终点的向量 $\boldsymbol{c}$ 就是向量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 的和(图 6-5). 这种方法叫作向量相加的**三角形法则**.

向量的运算还可用平行四边形法则：设 $\boldsymbol{a}=\overrightarrow{AB}$，$\boldsymbol{b}=\overrightarrow{AD}$，以 AB、AD 为边作一个平行四边形 $ABCD$，取对角线 $\overrightarrow{AC}$，记作 $\boldsymbol{c}=\overrightarrow{AC}$(图 6-6)，我们称向量 $\boldsymbol{c}$ 为向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的和，记作 $\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$. 这种用平行四边形的对角线向量来规定两个向量的和的方法叫作向量加法的**平行四边形法则**.

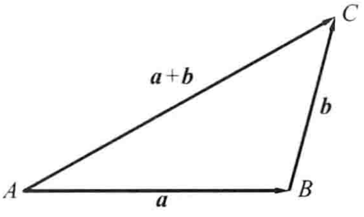

图 6-5

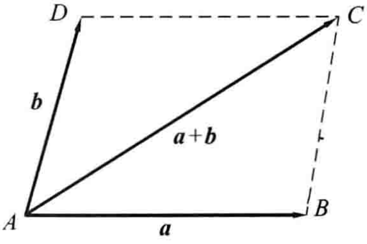

图 6-6

向量的加法符合下列运算规律.

(1) 交换律：$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}$；

(2) 结合律：$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})$.

由向量加法的三角形法则及交换律、结合律得多个向量相加的法则如下：以前一个向量的终点作为下一个向量的始点，相继作向量 $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_n$，再以第一个向量的起点为起点，最后一个向量的终点为终点作一向量，这个向量即为所求的和，有

$$\boldsymbol{s}=\boldsymbol{a}_1+\boldsymbol{a}_2+\cdots+\boldsymbol{a}_n.$$

设 $\boldsymbol{a}$ 为一向量，与 $\boldsymbol{a}$ 的模相同但方向相反的向量叫作 $\boldsymbol{a}$ 的**负向量**，记作 $-\boldsymbol{a}$，由此我们规定两个向量 $\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 的差为

$$\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}+(-\boldsymbol{a}),$$

把向量 $-\boldsymbol{a}$ 加到向量 $\boldsymbol{b}$ 上，可得向量 $\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 的差 $\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}$：即将向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 移到共同起点，则以向量 $\boldsymbol{a}$ 的终点为起点，向量 $\boldsymbol{b}$ 的终点为终点的向量，就是向量 $\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 的差 $\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}$(图 6-7).

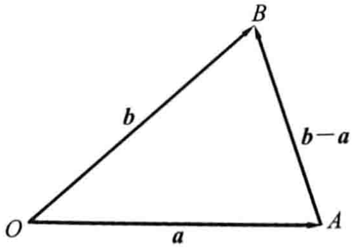

图 6-7

6.1.5 向量与数的乘法

向量 $\boldsymbol{a}$ 与实数 λ 的乘积记作 $\lambda\boldsymbol{a}$，规定 $\lambda\boldsymbol{a}$ 是一个向量，它的模为

$$|\lambda\boldsymbol{a}|=|\lambda||\boldsymbol{a}|,$$

它的方向：当 $\lambda>0$ 时与 $\boldsymbol{a}$ 相同，当 $\lambda<0$ 时与 $\boldsymbol{a}$ 相反. 当 $\lambda=0$ 时 $|\lambda\boldsymbol{a}|=0$，即 $\lambda\boldsymbol{a}$ 为零向量，这时它的方向可以是任意的.

数与向量的乘积具有下列运算律.

(1) 结合律:$\lambda(\mu\boldsymbol{a})=\mu(\lambda\boldsymbol{a})=(\lambda\mu)\boldsymbol{a}$;

(2) 分配律:$\lambda(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=\lambda\boldsymbol{a}+\lambda\boldsymbol{b}$,$(\lambda+\mu)\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{a}$.

由于向量 $\lambda\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 平行,因此我们常用向量与数的乘积来说明两个向量的平行关系,即有如下定理.

定理 设向量 $\boldsymbol{a}\neq\boldsymbol{0}$,那么向量 $\boldsymbol{b}$ 平行于向量 $\boldsymbol{a}$ 的充分必要条件是存在唯一的实数 λ,使 $\boldsymbol{b}=\lambda\boldsymbol{a}$.

证 充分性显然,下面证明必要性.

设 $\boldsymbol{b}\parallel\boldsymbol{a}$,取 $|\lambda|=\dfrac{|\boldsymbol{b}|}{|\boldsymbol{a}|}$,当 $\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 同向时 λ 取正值,当 $\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 反向时 λ 取负值,此时 $\boldsymbol{b}$ 与 $\lambda\boldsymbol{a}$ 同向,且

$$|\lambda\boldsymbol{a}|=|\lambda||\boldsymbol{a}|=\frac{|\boldsymbol{b}|}{|\boldsymbol{a}|}|\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{b}|,$$

即有

$$\boldsymbol{b}=\lambda\boldsymbol{a}.$$

再证实数 λ 的唯一性.

设 $\boldsymbol{b}=\lambda\boldsymbol{a}$,又设 $\boldsymbol{b}=\mu\boldsymbol{a}$,两式相减,可得

$$(\lambda-\mu)\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0},$$

即有

$$|\lambda-\mu||\boldsymbol{a}|=0,$$

因为 $\boldsymbol{a}\neq\boldsymbol{0}$,故 $|\lambda-\mu|=0$,即 $\lambda=\mu$.

相互平行的向量叫作**共线向量**,两个向量共线的充要条件是 $\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{b}$,其中 λ 是一实数.

一般地,用向量 $\boldsymbol{e}_a$ 表示与非零向量 $\boldsymbol{a}$ 同向的单位向量,这时有 $\boldsymbol{a}=|\boldsymbol{a}|\boldsymbol{e}_a$,由此得

$$\boldsymbol{e}_a=\frac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|}.$$

【例 6-2】 用向量证明:若一个四边形的两条对角线相互平分,则该四边形为平行四边形(图 6-8).

证 已知

$$\overrightarrow{DM}=\overrightarrow{MB},\quad \overrightarrow{AM}=\overrightarrow{MC},$$

由向量的三角形法则有

$$\overrightarrow{DM}+\overrightarrow{MC}=\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{MB}=\overrightarrow{AB},$$

即 $\overrightarrow{AB}\parallel\overrightarrow{DC}$ 且大小相等,故四边形 $ABCD$ 为平行四边形.

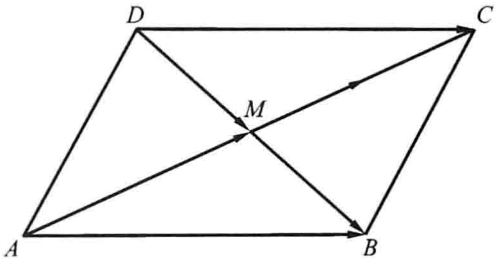

图 6-8

6.1.6 两向量的夹角

设有两个非零向量 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$，任取空间一点 O，作$\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{OB}=\boldsymbol{b}$，在两向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 所决定的平面内，规定不超过 π 的角 $\angle AOB$ 叫作**向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角**，记为 $(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})$ 或 $(\widehat{\boldsymbol{b},\boldsymbol{a}})$，如果向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 中有一个是零向量，则规定它们的夹角可在 0 和 π 之间任意取值.

6.1.7 向量的坐标及向量的运算

通过坐标法，使平面上或空间的点与有序数组之间建立了一一对应关系，从而为进行数与形的研究提供了条件. 类似地，为了进行数与向量之间的研究，需要建立向量与有序数组之间的对应关系.

建立空间直角坐标系后，在 x 轴、y 轴、z 轴的正方向各取一个单位向量，分别记作 $\boldsymbol{i}$，$\boldsymbol{j}$，$\boldsymbol{k}$，我们称之为这一坐标系的基本向量单位.

如图 6-9 所示，设点 P 的坐标为 (x,y,z)，过点 P 作 xOy 坐标平面的垂线，垂足为 M，则$\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{MP}$.

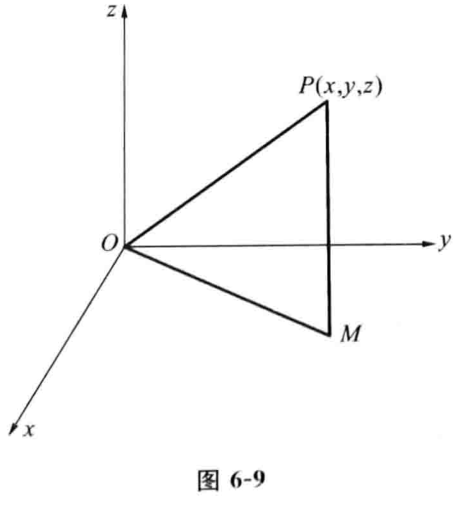

图 6-9

向量$\overrightarrow{OM}$在xOy坐标平面上，有$\overrightarrow{OM}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}$，而且$\overrightarrow{MP}=z\boldsymbol{k}$，于是

$$\overrightarrow{OP}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k},$$

我们把上式叫作向量$\overrightarrow{OP}$的坐标表达式，x、y、z分别叫作向量$\overrightarrow{OP}$在x轴、y轴、z轴上的**坐标或投影**，向量$x\boldsymbol{i}$，$y\boldsymbol{j}$，$z\boldsymbol{k}$分别叫作向量$\overrightarrow{OP}$在x轴、y轴、z轴上的分向量. 向量$\overrightarrow{OP}$的坐标表达式也可简写为$\overrightarrow{OP}=(x,y,z)$.

如果一向量$\overrightarrow{M_1M_2}$的起点M_1与终点M_2的坐标分别为(x_1,y_1,z_1)、(x_2,y_2,z_2)，作两个向径$\overrightarrow{OM_1}$、$\overrightarrow{OM_2}$，就得到$\overrightarrow{M_1M_2}=\overrightarrow{OM_2}-\overrightarrow{OM_1}$.

因为$\overrightarrow{OM_1}=(x_1,y_1,z_1)$，$\overrightarrow{OM_2}=(x_2,y_2,z_2)$，所以有

$$\overrightarrow{M_1M_2}=(x_2-x_1)\boldsymbol{i}+(y_2-y_1)\boldsymbol{j}+(z_2-z_1)\boldsymbol{k},$$

或

$$\overrightarrow{M_1M_2}=(x_2-x_1,y_2-y_1,z_2-z_1).$$

利用向量的坐标，可得向量的加法、减法及向量与数的乘法的运算如下：

设$\boldsymbol{a}=(a_x,a_y,a_z)$，$\boldsymbol{b}=(b_x,b_y,b_z)$，则

$$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=(a_x+b_x)\boldsymbol{i}+(a_y+b_y)\boldsymbol{j}+(a_z+b_z)\boldsymbol{k};$$
$$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=(a_x-b_x)\boldsymbol{i}+(a_y-b_y)\boldsymbol{j}+(a_z-b_z)\boldsymbol{k};$$
$$\lambda\boldsymbol{a}=(\lambda a_x)\boldsymbol{i}+(\lambda a_y)\boldsymbol{j}+(\lambda a_z)\boldsymbol{k}.$$

或

$$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=(a_x+b_x,a_y+b_y,a_z+b_z);$$
$$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=(a_x-b_x,a_y-b_y,a_z-b_z);$$
$$\lambda\boldsymbol{a}=(\lambda a_x,\lambda a_y,\lambda a_z).$$

由此可见，对向量进行加、减及数乘，只需对向量的各个坐标分别进行相应的数量运算即可.

由6.1.5节定理可知，若向量$\boldsymbol{a}\neq\boldsymbol{0}$且$\boldsymbol{a}$与$\boldsymbol{b}$平行等价于$\boldsymbol{b}=\lambda\boldsymbol{a}$，用坐标表示为

$$(b_x,b_y,b_z)=\lambda(a_x,a_y,a_z),$$

即向量$\boldsymbol{a}$与$\boldsymbol{b}$对应的坐标成对应比例：

$$\frac{b_x}{a_x}=\frac{b_y}{a_y}=\frac{b_z}{a_z}.$$

【例6-3】 设点$M_1(x_1,y_1,z_1)$和$M_2(x_2,y_2,z_2)$为两已知点，而在M_1M_2直线上的点M分有向线段$\overrightarrow{M_1M_2}$为两个有向线段$\overrightarrow{M_1M}$与$\overrightarrow{MM_2}$，使它们值的比等于某数$\lambda(\lambda\neq-1)$，即$\dfrac{M_1M}{MM_2}=\lambda$，求分点$M$的坐标$x$、$y$、$z$.

解 由于向量$\overrightarrow{M_1M}$与$\overrightarrow{MM_2}$共线，则有$\overrightarrow{M_1M}=\lambda\overrightarrow{MM_2}$.

因为