

捷联惯性导航系统 初始对准技术

Initial Alignment for Strapdown
Inertial Navigation System

高 伟 奔粤阳 李 倩 著
吴简彤 审



國防工業出版社

National Defense Industry Press

本书获得中央高校基本科研业务费专项基金(NO heucf041403)资助

捷联惯性导航系统 初始对准技术

高伟 奔粤阳 李倩 著
吴简彤 审

国防工业出版社

·北京·

内 容 简 介

本书研究与论述了捷联惯性导航系统的初始对准技术。全书内容分为七章,分别为概述、捷联惯性导航系统误差分析、捷联惯性导航系统粗对准技术、基于经典控制理论的罗经回路对准技术、基于现代估计理论的组合对准技术、主子惯导间的传递对准技术以及旋转式捷联惯性导航系统初始对准技术。

本书作为一本论述捷联惯性导航系统初始对准技术的专著,既可以作为精密仪器及机械和导航、制导与控制等相关专业的本科生、研究生教材,也可以供从事惯性导航系统设计、制造、试验和应用的科研人员参考与指导。

图书在版编目(CIP)数据

捷联惯性导航系统初始对准技术/高伟,奔粤阳,李倩
著. —北京:国防工业出版社,2014.6
ISBN 978-7-118-09250-9

I. ①捷... II. ①高... ②奔... ③李... III. ①捷
联式惯性制导 IV. ①V448.131

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2014)第 076055 号

※

国防工业出版社 出版发行

(北京市海淀区紫竹院南路 23 号 邮政编码 100048)

北京奥鑫印刷厂印刷

新华书店经售



*

开本 787 × 1092 1/16 印张 14 字数 323 千字

2014 年 6 月第 1 版第 1 次印刷 印数 1—2000 册 定价 56.00 元

(本书如有印装错误,我社负责调换)

国防书店:(010)88540777

发行邮购:(010)88540776

发行传真:(010)88540755

发行业务:(010)88540717

前 言

本书是作者及其团队从事捷联惯性导航系统科研与教学工作十余年的总结。书中以船用捷联惯性导航系统为主要研究背景,在对捷联惯性导航原理及系统误差特性分析的基础上,较为全面地对捷联惯性导航系统各种初始对准方法进行了研究与分析。全书共分为7章,第1章介绍捷联惯性导航系统初始对准的基本知识,第2章分析捷联惯性导航系统误差特性,第3章阐述捷联惯导的粗对准技术,第4章和第5章分别研究基于经典控制理论的罗经对准和基于现代估计理论的组合滤波对准,第6章论述传递对准技术,第7章研究适合旋转式捷联惯性导航系统初始对准技术。

捷联惯性导航系统技术从属于导航、制导与控制 and 精密仪器及机械两个学科,与其他学科一样,它的发展离不开需求的牵引,惯性技术的发展历程表明:性能和成本是评判捷联惯性导航系统的两个考核指标。本书内容主要研究捷联惯性导航系统的关键技术——初始对准技术,优异的初始对准性能可使得捷联惯性导航系统的性能得到提升,同时降低对于传感器的要求,从而降低成本。本书涉及的内容是对于捷联惯性导航系统当前需求的热点与瓶颈,符合学科发展与国内科研、生产的需求。同时,国内大学,如清华大学、北京航空航天大学、西北工业大学等院校,均设置了与捷联惯性导航系统相关的实验室和研究所,并开设了相关课程,初始对准作为捷联惯性导航系统的关键,是这些院校科研和教学的重点与难点。本书将会对相关院校的师生提供参考与帮助。

在本书的初稿完成后,承蒙吴简彤教授的认真审阅,提出了宝贵的意见和建议,并推荐该书出版,在此对他表示衷心的感谢;同时,还要感谢哈尔滨工程大学海洋运载器与导航设备研究所的所有老师和研究生,感谢他们在作者进行该书相关研究工作时给予的帮助和支持。

由于作者水平有限,书中难免存在不足之处,欢迎广大读者对本书提出意见和建议。

作者
2013年10月

目 录

第 1 章 概述	1
1.1 惯性导航系统基础知识	1
1.1.1 地球参考模型	1
1.1.2 坐标系及坐标转换	2
1.2 捷联惯性导航系统原理	4
1.2.1 捷联惯性导航系统基本工作原理	4
1.2.2 捷联矩阵的即时修正	6
1.2.3 姿态角真值的求取	11
1.3 捷联惯性导航系统初始对准方法综述	11
1.3.1 粗对准	11
1.3.2 精对准	12
1.4 本章小结	13
第 2 章 捷联惯性导航系统误差分析	14
2.1 引言	14
2.2 捷联惯性导航系统误差方程	14
2.2.1 失准角误差方程	14
2.2.2 速度误差方程	16
2.2.3 位置误差方程	17
2.3 无阻尼捷联惯性导航系统误差分析	17
2.3.1 特征方程式分析	18
2.3.2 误差传播特性分析	22
2.4 本章小结	26
第 3 章 捷联惯性导航系统粗对准技术	27
3.1 引言	27
3.2 解析式粗对准方法	27
3.3 水平调平和方位估算粗对准	29
3.4 惯性坐标系粗对准	31
3.4.1 惯性坐标系对准原理	31
3.4.2 惯性坐标系粗对准精度分析	33
3.4.3 惯性坐标系粗对准参考矢量分析	43

3.4.4	外参考速度辅助的惯性坐标系对准技术	49
3.5	本章小结	52
第4章	基于经典控制理论的罗经回路对准技术	53
4.1	引言	53
4.2	静基座罗经对准原理	53
4.2.1	水平精对准原理	53
4.2.2	方位精对准原理	55
4.2.3	回路参数设置	57
4.3	罗经法对准频域分析	59
4.3.1	罗精对准的频域误差分析	60
4.3.2	捷联惯性导航系统罗经对准频域误差方程	62
4.3.3	频域误差对捷联惯性导航罗经对准影响	64
4.4	DVL辅助下的载体行进间罗经对准技术	68
4.4.1	载体机动对罗经对准的影响	68
4.4.2	DVL辅助下的行进间罗经对准技术	69
4.4.3	DVL辅助下的行进间罗经对准技术误差分析	72
4.5	航向大失准角罗经对准	75
4.5.1	航向大失准角对罗经法对准的影响	76
4.5.2	多级罗经法对准的原理及误差分析	78
4.5.3	时变参数罗经法对准技术研究	80
4.6	本章小结	82
第5章	基于现代估计理论的组合对准技术	83
5.1	引言	83
5.2	基于线性卡尔曼滤波原理的初始对准技术	83
5.2.1	卡尔曼滤波理论	83
5.2.2	捷联惯性导航系统初始对准滤波模型的建立	84
5.2.3	静基座卡尔曼滤波初始对准精度分析	91
5.2.4	惯性坐标系卡尔曼滤波精对准技术	95
5.2.5	DVL辅助的船用捷联惯性导航组合对准技术	99
5.3	基于非线性滤波原理的大失准角初始对准技术	106
5.3.1	UKF与CKF	107
5.3.2	基于CKF的INS大方位失准角初始对准方法	116
5.4	本章小结	123
第6章	传递对准技术	124
6.1	引言	124
6.2	常用传递对准匹配方案	124

6.2.1	速度匹配传递对准	124
6.2.2	速度加姿态匹配传递对准	130
6.3	大方位失准角下的传递对准技术	135
6.3.1	大方位失准角下的速度匹配传递对准	136
6.3.2	大方位失准角下的速度加姿态匹配传递对准	138
6.4	传递对准误差分析	141
6.4.1	陀螺漂移对传递对准的影响	141
6.4.2	杆臂误差对传递对准的影响及误差补偿技术	144
6.4.3	船体挠曲变形对传递对准的影响及误差补偿技术	151
6.4.4	传输延迟对传递对准的影响及误差补偿技术	154
6.5	传递对准精度评估	156
6.5.1	最优平滑估计算法	156
6.5.2	传递对准精度评估方案设计	158
6.6	本章小结	161
第7章	旋转式捷联惯性导航系统对准技术	162
7.1	引言	162
7.2	旋转式捷联惯性导航系统工作原理	162
7.2.1	单轴旋转式捷联惯性导航系统工作原理分析	162
7.2.2	双轴旋转式捷联惯性导航系统工作原理分析	167
7.3	系泊启动条件下旋转式捷联惯性导航系统初始对准技术	191
7.3.1	系泊启动条件下旋转式捷联惯性导航系统的数学模型	191
7.3.2	全局可观测性分析	192
7.3.3	静态单位置条件下捷联惯性导航系统的可观测性分析	193
7.3.4	静态多位置条件下捷联惯性导航系统的可观测性分析	194
7.3.5	转动条件下捷联惯性导航系统的可观测性分析	196
7.3.6	双轴旋转式捷联惯性导航系统的初始对准旋转方案设计	202
7.4	海上航行条件下旋转式捷联惯性导航系统初始对准技术	203
7.4.1	海上航行条件下旋转式捷联惯性导航系统的数学模型	203
7.4.2	基于奇异值分解的可观测度分析	205
7.4.3	海上航行条件下双轴旋转式捷联惯性导航系统的初始对准旋转方案设计	211
7.5	本章小结	212
参考文献		214

第1章 概述

1.1 惯性导航系统基础知识

1.1.1 地球参考模型

真实的地球是一个质量分布不均匀、形状不规则的扁球体。为了导航定位的需要,通常将地球近似看作是一个绕地球自转轴旋转的椭球体,称为地球参考椭球体,如图 1-1 所示。

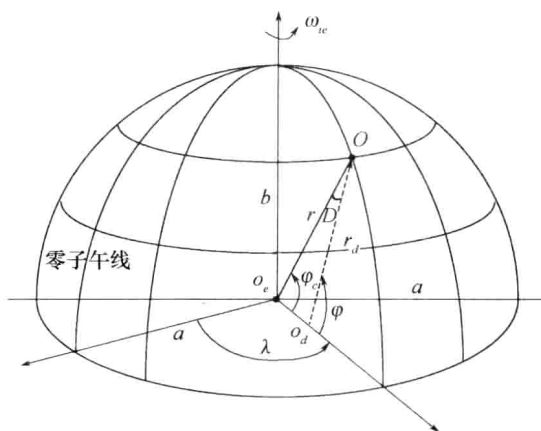


图 1-1 参考地球模型

参考椭球的赤道平面为圆平面,半径为长轴半径 a ,沿地球极轴方向的参考椭球半径为短轴半径 b ,由 a 和 b 可以确定出参考椭球体的大小和形状。另外还常用扁率 f 和偏心率 e 来描述参考椭球的形状,扁率 f 的定义为

$$f = \frac{a - b}{a} \quad (1-1)$$

偏心率 e 的定义为

$$e = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a} \quad (1-2)$$

图 1-1 中 φ 、 φ_c 和 λ 分别表示地球表面 o 点的地理纬度、地心纬度和经度。 φ 与 φ_c 的关系为

$$\varphi - \varphi_c = f \sin 2\varphi \quad (1-3)$$

r_d 为大地垂线, r 为地心位置矢量,其模 R 可表示为

$$R = \frac{ab}{\sqrt{(a \cos \varphi_c)^2 + (b \sin \varphi_c)^2}} \quad (1-4)$$

完全确定参考椭球模型还需要两个附加参数:地球自转角速度 ω_{ie} 以及地球质量 M 。我国于 2008 年 7 月启用了参考椭球模型 CGCS2000,其模型参数的数值如表 1-1 所列。

表 1-1 CGCS2000 参考地球模型参数的数值

参考地球参数名称	数值	参考地球参数名称	数值
长半轴长 a/m	6378137.0	偏心率的平方 e^2	0.0066943800229008
短半轴长 b/m	6356752.314	地球引力常数 $KM/(\text{m}^3/\text{s}^2)$	$3.986004418 \times 10^{14}$
扁率 f	$\frac{1}{298.257222101}$	地球自转角速度 $\omega_{ie}/(\text{rad/s})$	7.292115×10^{-5}

注: K 为单位质量的引力系数,也称为万有引力系数。

1.1.2 坐标系及坐标转换

1. 常用坐标系

1) 地心惯性坐标系(i 系)—— $o_e x_i y_i z_i$

地心惯性坐标系原点位于地心, $o_e z_i$ 轴沿地球极轴方向, $o_e x_i$ 、 $o_e y_i$ 在地球赤道平面内,并相对惯性空间保持静止, $o_e x_i$ 、 $o_e y_i$ 和 $o_e z_i$ 三轴符合右手定则。

2) 地球坐标系(e 系)—— $o_e x_e y_e z_e$

地球坐标系原点位于地心, $o_e z_e$ 轴沿地球极轴方向, $o_e x_e$ 、 $o_e y_e$ 在地球赤道平面内, $o_e x_e$ 轴在赤道平面内指向格林威治子午线, $o_e y_e$ 轴指向东经 90° 方向。 e 系随地球转动而转动。

3) 地理坐标系(t 系)—— $oENU$

地理坐标系是原点 o 位于地球表面任意一点, oE 轴指向水平东向, oN 轴指向水平北向, oU 轴沿大地垂线方向指向天,也被称为东北天坐标系。

4) 载体坐标系(b 系)—— $o_b x_b y_b z_b$

载体坐标系是与舰船固连的坐标系,其坐标原点位于舰船重心,纵轴 $o_b y_b$ 在甲板平面内指向舰首,横轴 $o_b x_b$ 指向右舷, $o_b z_b$ 垂直于 $o_b x_b y_b$ 构成右手坐标系。

5) 导航坐标系(n 系)—— $o_n x_n y_n z_n$

导航坐标系是在导航时根据导航系统工作的需要而选取的作为导航基准的坐标系。一般情况下导航坐标系选为与地理坐标系重合,也可选水平面 $o_n x_n y_n$ 与地理坐标系重合,方位上有一个夹角。

6) 平台坐标系(p 系)—— $o_p x_p y_p z_p$

空间稳定型惯性导航(简称惯导)系统的平台坐标系跟踪 i 系,当地水平固定指北系统的平台坐标系跟踪 t 系。以空间稳定型惯性导航系统为例,当惯性导航系统无误差时,平台坐标系与 i 系重合;当存在误差时, p 系与 i 系之间存在偏差,偏差角为平台失准角。

2. 坐标系转换

1) i 系到 e 系的坐标转换

将 i 系的 x 轴选取为导航初始时刻赤道平面与当地子午面的交线, i 系和 e 系的关系

如图 1-2 所示。

由 i 系到 e 系的坐标转换,可通过绕 z 轴转过角度 $-(\lambda_0 - \omega_{ie}t)$ 来实现,转换矩阵 C_i^e 的表达式为

$$C_i^e = \begin{bmatrix} \cos(\lambda_0 - \omega_{ie}t) & -\sin(\lambda_0 - \omega_{ie}t) & 0 \\ \sin(\lambda_0 - \omega_{ie}t) & \cos(\lambda_0 - \omega_{ie}t) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (1-5)$$

式中: t 为导航时间。

2) e 系到 t 系的坐标转换

e 系和 t 系的关系如图 1-3 所示,为简化分析,这里将地球视为规则球体,即地理纬度与地心纬度相等。 e 系和 t 系的坐标原点可通过平移达到重合。 e 系到 t 系的坐标转换可按下述顺序的三次旋转来实现:

$$o_e x_e y_e z_e \xrightarrow[\lambda]{o_e z_e} o_e x'_e y'_e z_e \xrightarrow[90^\circ - \varphi]{o_e y'_e} o_e x''_e y''_e U \xrightarrow[90^\circ]{o_e U} o_e ENU$$

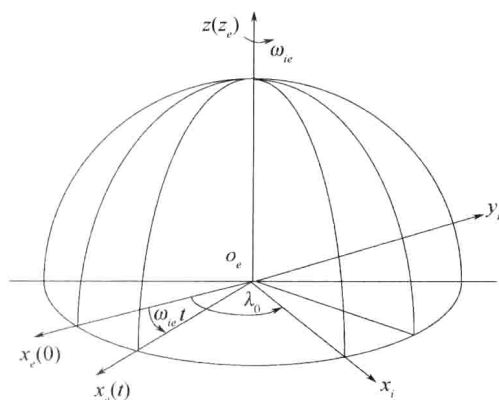


图 1-2 i 系与 e 系的关系图

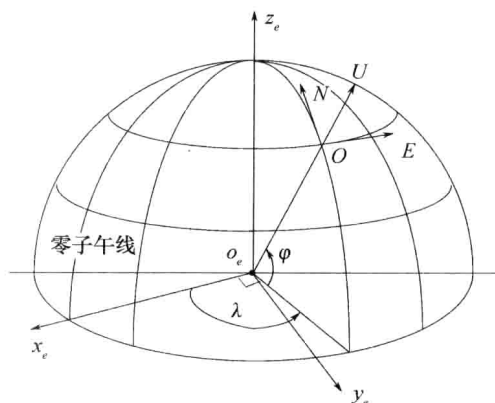


图 1-3 e 系与 t 系的关系图

根据上述旋转顺序,可得 e 系到 t 系的转换关系,即

$$\begin{bmatrix} E \\ N \\ U \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sin\varphi & 0 & -\cos\varphi \\ 0 & 1 & 0 \\ \cos\varphi & 0 & \sin\varphi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\lambda & \sin\lambda & 0 \\ -\sin\lambda & \cos\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_e \\ y_e \\ z_e \end{bmatrix} \quad (1-6)$$

整理得转换矩阵 C_e^t 的表达式为

$$C_e^t = \begin{bmatrix} -\sin\lambda & \cos\lambda & 0 \\ -\sin\varphi\cos\lambda & -\sin\varphi\sin\lambda & \cos\varphi \\ \cos\varphi\cos\lambda & \cos\varphi\sin\lambda & \sin\varphi \end{bmatrix} \quad (1-7)$$

转换矩阵 C_e^t 只与经度和纬度有关,因此 C_e^t 又称为位置矩阵。

3) i 系到 t 系的坐标转换

根据转换矩阵的传递性,转换矩阵 C_i^t 可表示为

$$\mathbf{C}_i^t = \mathbf{C}_e^t \cdot \mathbf{C}_i^e \quad (1-8)$$

将式(1-5)、式(1-7)代入式(1-8),整理得

$$\mathbf{C}_i^t = \begin{bmatrix} -\sin\zeta & \cos\zeta & 0 \\ -\sin\varphi\cos\zeta & -\sin\varphi\sin\zeta & \cos\varphi \\ \cos\varphi\cos\zeta & \cos\varphi\sin\zeta & \sin\varphi \end{bmatrix} \quad (1-9)$$

式中: $\zeta = \lambda - \lambda_0 + \omega_{ie}t$ 。

4) t 系到 b 系的坐标转换

t 系到 b 系的转换与 e 系到 t 系的转换相似,都要经过三次旋转。这里可以用一组转动欧拉角 ψ 、 θ 、 γ 来表示两个坐标系之间的变换关系,按下列顺序分三次转动,得

$$oENU \xrightarrow[\psi]{oU} oE'N'U \xrightarrow[\theta]{oE'} oE'y_bU' \xrightarrow[\gamma]{oy_b} o_bx_by_bz_b$$

其转换表达式为

$$\begin{bmatrix} x_b \\ y_b \\ z_b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\gamma & 0 & -\sin\gamma \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin\gamma & 0 & \cos\gamma \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & \sin\theta \\ 0 & -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\psi & \sin\psi & 0 \\ -\sin\psi & \cos\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E \\ N \\ U \end{bmatrix} \quad (1-10)$$

所以

$$\mathbf{C}_t^b = \begin{bmatrix} \cos\psi\cos\gamma - \sin\psi\sin\theta\sin\gamma & \cos\psi\sin\theta\sin\gamma + \sin\psi\cos\gamma & -\cos\theta\sin\gamma \\ -\sin\psi\cos\theta & \cos\theta\cos\psi & \sin\theta \\ \cos\psi\sin\gamma + \sin\psi\sin\theta\cos\gamma & \sin\psi\sin\gamma - \cos\psi\sin\theta\cos\gamma & \cos\theta\cos\gamma \end{bmatrix} \quad (1-11)$$

因为矩阵 $\mathbf{C}_b^t$ 为正交阵,所以有 $\mathbf{C}_b^t = (\mathbf{C}_t^b)^{-1} = (\mathbf{C}_t^b)^T$, 则

$$\mathbf{C}_b^t = \begin{bmatrix} \cos\psi\cos\gamma - \sin\psi\sin\theta\sin\gamma & -\sin\psi\cos\theta & \cos\psi\sin\gamma + \sin\psi\sin\theta\cos\gamma \\ \cos\psi\sin\theta\sin\gamma + \sin\psi\cos\gamma & \cos\theta\cos\psi & \sin\psi\sin\gamma - \cos\psi\sin\theta\cos\gamma \\ -\cos\theta\sin\gamma & \sin\theta & \cos\theta\cos\gamma \end{bmatrix} \quad (1-12)$$

1.2 捷联惯性导航系统原理

1.2.1 捷联惯性导航系统基本工作原理

惯性导航是一种自主导航方法,它是通过测量运载体本身的加速度来完成导航任务的。根据牛顿惯性原理,利用惯性元件(陀螺仪、加速度计)测量出运载体的加速度,经过积分和运算,便可获得速度和位置,供导航使用。

简化的平台式惯性导航系统原理如图 1-4 所示。

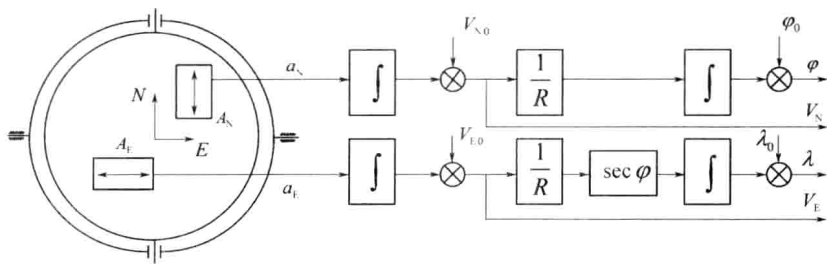


图 1-4 平台式惯导系统原理

将加速度计测出的加速度信号 a_N 、 a_E 进行一次积分,与初始速度 v_{N0} 、 v_{E0} 相加,得到运载体速度分量,即

$$\begin{cases} v_N = \int_0^t a_N dt + v_{N0} \\ v_E = \int_0^t a_E dt + v_{E0} \end{cases} \quad (1-13)$$

将速度 v_N 、 v_E 进行变换并再次积分,就得到运载体位置变化量,与初始经纬度 λ_0 、 φ_0 相加,得到运载体所在地理位置的经纬度 λ 、 φ 值,提供给运载体导航定位使用,即

$$\begin{cases} \lambda = \frac{1}{R} \int_0^t v_E \sec \varphi dt + \lambda_0 \\ \varphi = \frac{1}{R} \int_0^t v_N dt + \varphi_0 \end{cases} \quad (1-14)$$

计算出的速度 v_N 、 v_E ,按 $v = \sqrt{v_N^2 + v_E^2}$ 进行合成计算,得到运载体运动速度。

捷联惯性导航系统(Strapdown Inertial Navigation System, SINS)主要由惯性测量组件(Inertial Measurement Unit, IMU)、导航计算机和控制显示器等组成。IMU 包括陀螺仪组件和加速度计组件。陀螺仪组件测量沿运载体坐标系三个轴的角速度信号,并被送入导航计算机,经误差补偿计算后进行姿态矩阵计算。加速度计组件测取沿运载体坐标系三个轴的加速度信号,并被送入导航计算机,经误差补偿计算后,进行由运载体坐标系至“平台”坐标系的坐标变换计算。姿态矩阵一方面用于坐标变换,即把沿运载体坐标系的加速度信号变换成“平台”坐标系(导航坐标系)各轴的加速度信号,以便于导航参数计算;另一方面,利用姿态矩阵的元素可以提取水平姿态角与航向角信息。这样,由捷联惯性导航系统中的矩阵计算、加速度计信号的坐标变换计算以及姿态与航向计算实现了平台惯导系统中实体陀螺稳定平台的功能,从而构成所谓“数学平台”。

捷联惯性导航系统并没有实体的稳定平台,而代之以导航计算机产生的数学平台,陀螺仪和加速度计直接与运载体固联。图 1-5 给出了捷联惯性导航系统的原理方块图。

捷联惯性导航系统有以下几个主要优点:

(1) 惯性测量组件便于安装、维修和更换。

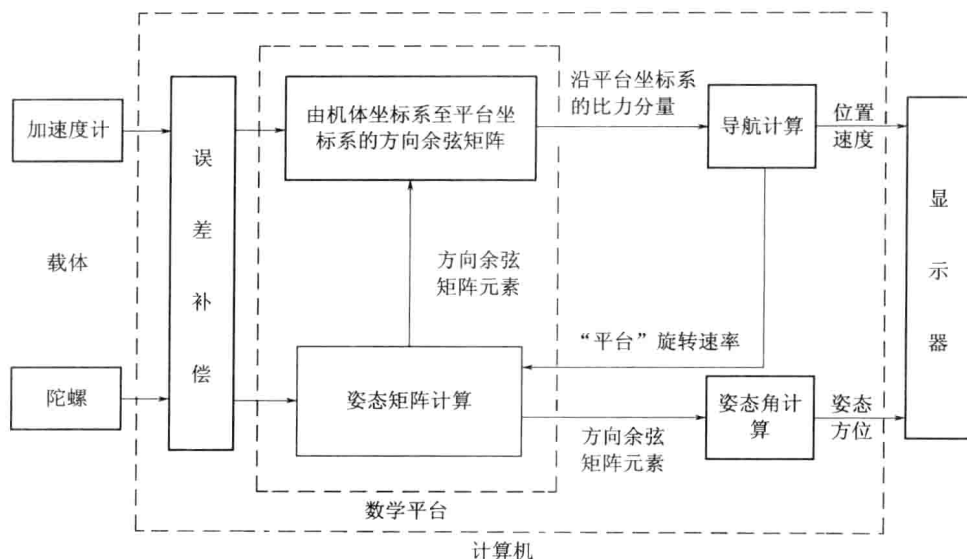


图 1-5 捷联惯性导航系统的原理方块图

(2) 惯性测量组件可以直接给出载体坐标系轴向的线加速度和角速度,供给载体稳定控制系统和武器控制系统。

(3) 便于将惯性测量组件重复布置,从而易在惯性测量组件的级别上实现冗余技术,这对提高系统的性能和可靠性十分有利。

(4) 由于去掉了具有常平架的平台,消除了稳定平台稳定过程中的各种误差;同时由于不存在机电结合的常平架装置,使整个系统可以做得小而轻,并易于维护。

当然,由于惯性测量组件直接固接于船体上也带来新的问题,由于惯性测量组件直接承受载体的振动、冲击及摇摆,惯性测量组件的输出信息将会产生严重的动态误差,即惯性测量组件的工作环境恶化了。为保证捷联惯性导航系统性能的稳定,则要求在系统中采取误差补偿措施。

1.2.2 捷联矩阵的即时修正

捷联矩阵也称为姿态矩阵,是载体坐标系与导航坐标系之间的方向余弦阵。载体姿态角实际上就是载体坐标系 $o_b x_b y_b z_b$ 和导航坐标系 $o_n x_n y_n z_n$ 之间的方位关系,一般将地理坐标系 o_{ENU} 作为导航坐标系。则根据 1.1.2 节的推导可以得到

$$C_b^n = \begin{bmatrix} \cos\psi\cos\gamma - \sin\psi\sin\theta\sin\gamma & -\sin\psi\cos\theta & \cos\psi\sin\gamma + \sin\psi\sin\theta\cos\gamma \\ \cos\psi\sin\theta\sin\gamma + \sin\psi\cos\gamma & \cos\theta\cos\psi & \sin\psi\sin\gamma - \cos\psi\sin\theta\cos\gamma \\ -\cos\theta\sin\gamma & \sin\theta & \cos\theta\cos\gamma \end{bmatrix} \quad (1-15)$$

式中:矩阵 C_b^n 为姿态矩阵或捷联矩阵; ψ 、 θ 、 γ 即载体的姿态角,分别为载体纵轴轴向在水平面内投影与北向基准线之间的夹角——航向角,载体纵轴与水平面之间的夹角——纵摇角和载体横轴与水平面之间的夹角——横摇角。

下面介绍两种捷联矩阵的即时修正方法——欧拉角法、四元数法。

1. 欧拉角法

1) 用欧拉角法表示的姿态矩阵

一个动坐标系相对参考坐标系的方位,可以完全由动坐标系依次绕三个不同轴转动的三个转角来确定。把载体坐标系 $o_b x_b y_b z_b$ 作为动坐标系,导航坐标系 $o_n x_n y_n z_n$ 作为参考坐标系,三个转角用欧拉角表示为 ψ 、 θ 、 γ 。1.1.2 节中推导 b 系到 t 系的转换过程就是用欧拉角法表示姿态矩阵的过程。

2) 欧拉角微分方程

用 ω_{nb}^b 表示载体坐标系相对地理坐标系的角速度矢量在载体坐标系轴向的分量,则 ω_{nb}^b 和 $\dot{\psi}$ 、 $\dot{\theta}$ 、 $\dot{\gamma}$ 的关系为

$$\begin{bmatrix} \omega_{nbx}^b \\ \omega_{nby}^b \\ \omega_{nbz}^b \end{bmatrix} = C_\gamma C_\theta \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -\dot{\psi} \end{bmatrix} + C_\gamma \begin{bmatrix} \dot{\theta} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \dot{\gamma} \\ 0 \end{bmatrix} \quad (1-16)$$

其中

$$C_\gamma = \begin{bmatrix} \cos\gamma & 0 & -\sin\gamma \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin\gamma & 0 & \cos\gamma \end{bmatrix}, C_\theta = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & \sin\theta \\ 0 & -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}, C_\psi = \begin{bmatrix} \cos\psi & \sin\psi & 0 \\ -\sin\psi & \cos\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

展开并合并可得

$$\begin{bmatrix} \dot{\gamma} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} = \frac{1}{\cos\theta} \begin{bmatrix} -\sin\gamma\sin\theta & \cos\theta & -\cos\gamma\sin\theta \\ \cos\gamma\cos\theta & 0 & -\sin\gamma\cos\theta \\ -\sin\gamma & 0 & -\cos\gamma \end{bmatrix} \quad (1-17)$$

式(1-17)即为欧拉角微分方程。求解方程可以得到三个欧拉角,也就是姿态角。根据姿态角和姿态矩阵元素之间的关系即可得到姿态矩阵 C_b^n 。

2. 四元数法

1) 四元数的定义

四元数形式为

$$\mathbf{Q} = (q_0, q_1, q_2, q_3) = q_0 + q_1 i + q_2 j + q_3 k = q_0 + \mathbf{q} \quad (1-18)$$

式中: q_0 为标量; $\mathbf{q}$ 为矢量。

四元数也可以表示为三角函数的形式。在刚体定点转动理论中,根据欧拉定理,动坐标系相对于参考坐标系的方位,等效于动坐标系绕某一个等效转轴转动一个角度 θ 。如果用 $\mathbf{u}$ 表示等效转轴方向的单位矢量,则动坐标系的方位完全由 $\mathbf{u}$ 和 θ 两个参数确定。则用 $\mathbf{u}$ 和 θ 可构造一个四元数:

$$\mathbf{Q} = \cos \frac{\theta}{2} + \mathbf{u} \sin \frac{\theta}{2} \quad (1-19)$$

此时,四元数的范数为

$$\|\mathbf{Q}\| = q_0^2 + q_1^2 + q_2^2 + q_3^2 = 1 \quad (1-20)$$

这样的四元数称作“规范化”四元数,也叫变换四元数。这样就把三维空间和一个四维空

间联系起来,用四维空间的性质和运算规则来研究三维空间中的刚体定点转动问题。

2) 四元数的乘积

设有两个四元数

$$\mathbf{A} = \lambda_0 + \lambda_1 i + \lambda_2 j + \lambda_3 k = \lambda_0 + \boldsymbol{\lambda} \quad (1-21)$$

$$\mathbf{M} = m_0 + m_1 i + m_2 j + m_3 k = m_0 + \mathbf{m} \quad (1-22)$$

则两者的乘积为

$$\mathbf{N} = \mathbf{A} \otimes \mathbf{M} = n_0 + n_1 i + n_2 j + n_3 k \quad (1-23)$$

其中, $\otimes$ 表示四元数乘法。式中, n_1, n_2, n_3 的表达式为

$$n_0 = \lambda_0 m_0 - \lambda_1 m_1 - \lambda_2 m_2 - \lambda_3 m_3, \quad n_1 = \lambda_0 m_1 + \lambda_1 m_0 + \lambda_2 m_3 - \lambda_3 m_2$$

$$n_2 = \lambda_0 m_2 - \lambda_1 m_3 + \lambda_2 m_0 + \lambda_3 m_1, \quad n_3 = \lambda_0 m_3 - \lambda_1 m_2 - \lambda_2 m_1 - \lambda_3 m_0$$

如果把四元数的四个元写成矢量,即表示成

$$\mathbf{Q}(n) = [n_0 \quad n_1 \quad n_2 \quad n_3]^T \quad (1-24)$$

$$\mathbf{Q}(\lambda) = [\lambda_0 \quad \lambda_1 \quad \lambda_2 \quad \lambda_3]^T \quad (1-25)$$

$$\mathbf{Q}(m) = [m_0 \quad m_1 \quad m_2 \quad m_3]^T \quad (1-26)$$

则根据式(1-18)~式(1-23),可以把四元数乘积写成矩阵形式:

$$\begin{bmatrix} n_0 \\ n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_0 & -\lambda_1 & -\lambda_2 & -\lambda_3 \\ \lambda_1 & \lambda_0 & -\lambda_3 & \lambda_2 \\ \lambda_2 & \lambda_3 & \lambda_0 & -\lambda_1 \\ \lambda_3 & -\lambda_2 & \lambda_1 & \lambda_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m_0 \\ m_1 \\ m_2 \\ m_3 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} n_0 \\ n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m_0 & -m_1 & -m_2 & -m_3 \\ m_1 & m_0 & -m_3 & m_2 \\ m_2 & m_3 & m_0 & -m_1 \\ m_3 & -m_2 & m_1 & m_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_0 \\ \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{bmatrix} \quad (1-27)$$

它们分别对应着

$$\mathbf{Q}(n) = \mathbf{M}^*(\lambda) \dot{\mathbf{Q}}(m), \quad \mathbf{Q}(n) = \mathbf{M}^*(m) \dot{\mathbf{Q}}(\lambda) \quad (1-28)$$

3) 矢量坐标变换的四元数描述

三维空间的一个矢量可以看作是标量为零的四元数。

(1) 旋转矢量的坐标变换。

假定矢量 $\mathbf{r}$ 绕通过定点 o 的某一轴转动了一个角度 θ , 则转动四元数为

$$\mathbf{Q} = \cos \frac{\theta}{2} + \mathbf{u} \sin \frac{\theta}{2} \quad (1-29)$$

如转动后的矢量用 $\dot{\mathbf{r}}$ 表示, 则以四元数描述的 $\dot{\mathbf{r}}$ 和 $\mathbf{r}$ 间的关系按下式确定:

$$\dot{\mathbf{r}} = \mathbf{Q} \otimes \mathbf{r} \otimes \mathbf{Q}^* \quad (1-30)$$

式中: $\mathbf{Q}^* = \cos \frac{\theta}{2} - \mathbf{u} \sin \frac{\theta}{2}$ 。

(2) 固定矢量的坐标变换。

如果矢量固定不动, 而动坐标系相对参考坐标系转动了一个角度, 则四元数描述的矢量在两个坐标系上的投影的变换关系为

$$\mathbf{R}_i = \mathbf{Q} \otimes \mathbf{R}_b \otimes \mathbf{Q}^*$$

$$\mathbf{R}_b = \mathbf{Q}^* \otimes \mathbf{R}_t \otimes \mathbf{Q} \quad (1-31)$$

4) 四元数和方向余弦的关系

将固定矢量的坐标变换,即将式(1-31)写成矩阵形式,并以地理坐标系为参考坐标系,则有

$$\mathbf{Q}(\mathbf{R}_b) = \mathbf{M}(\mathbf{Q}^*) \mathbf{M}^*(\mathbf{Q}) \mathbf{Q}(\mathbf{R}_t) \quad (1-32)$$

其中, $\mathbf{Q}(\mathbf{R}_b)$ 、 $\mathbf{Q}(\mathbf{R}_t)$ 分别为用 $\mathbf{R}_b$ 和 $\mathbf{R}_t$ 构造的四元数。

展开并去掉第一行、第一列,得

$$\begin{bmatrix} x_b \\ y_b \\ z_b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q_0^2 + q_1^2 - q_2^2 - q_3^2 & 2(q_1q_2 - q_0q_3) & 2(q_1q_3 - q_0q_2) \\ 2(q_1q_2 - q_0q_3) & q_0^2 - q_1^2 + q_2^2 - q_3^2 & 2(q_2q_3 + q_0q_1) \\ 2(q_1q_3 + q_0q_2) & 2(q_2q_3 - q_0q_1) & q_0^2 - q_1^2 - q_2^2 + q_3^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_t \\ y_t \\ z_t \end{bmatrix} \quad (1-33)$$

即

$$\begin{bmatrix} x_t \\ y_t \\ z_t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q_0^2 + q_1^2 - q_2^2 - q_3^2 & 2(q_1q_2 - q_0q_3) & 2(q_1q_3 + q_0q_2) \\ 2(q_1q_2 + q_0q_3) & q_0^2 - q_1^2 + q_2^2 - q_3^2 & 2(q_2q_3 - q_0q_1) \\ 2(q_1q_3 - q_0q_2) & 2(q_2q_3 + q_0q_1) & q_0^2 - q_1^2 - q_2^2 + q_3^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_b \\ y_b \\ z_b \end{bmatrix} \quad (1-34)$$

式(1-34)与式(1-15)比较,显然两个姿态变换矩阵相等,即对应元素相等。如果知道了变换四元数 $\mathbf{Q}$ 的四个元,则可以求出姿态矩阵的九个元素,并构成姿态矩阵。反过来,如果知道了姿态矩阵的九个元素,也可以相应地求出变换四元数的四个元。

5) 四元数微分方程及其解

四元数微分方程的形式为

$$\dot{\mathbf{Q}}(t) = \frac{1}{2} \mathbf{Q}(t) \otimes \boldsymbol{\omega}_{nb}^{bq} \quad (1-35)$$

式中: $\mathbf{Q}(t)$ 为姿态四元数; $\boldsymbol{\omega}_{nb}^{bq}$ 为 $\boldsymbol{\omega}_{nb}^b = [\omega_x \quad \omega_y \quad \omega_z]^T$ 的分量构造的四元数,其中, $\boldsymbol{\omega}_{nb}^b$ 为 b 系相对于 n 系的角速度。

在 b 系下的投影式(1-35)写成矩阵形式为

$$\dot{\mathbf{Q}}(t) = \frac{1}{2} [\boldsymbol{\omega}_{nb}^b(t)] \mathbf{Q}(t) \quad (1-36)$$

解微分方程,有

$$\mathbf{Q}(t) = e^{\frac{1}{2} \int_{t_0}^t [\boldsymbol{\omega}_{nb}^b(\tau) d\tau]} * \mathbf{Q}(t_0) \quad (1-37)$$

令

$$[\Delta\theta] = \int_{t_0}^t \boldsymbol{\omega}_{nb}^b(\tau) d\tau = \begin{bmatrix} 0 & -\Delta\theta_x & -\Delta\theta_y & -\theta_z \\ \Delta\theta_x & 0 & \Delta\theta_z & -\Delta\theta_y \\ \Delta\theta_y & -\theta_z & 0 & \Delta\theta_x \\ \Delta\theta_z & \Delta\theta_y & -\Delta\theta_x & 0 \end{bmatrix} \quad (1-38)$$

则

$$\begin{aligned} \mathbf{Q}(t) &= e^{\frac{1}{2}[\Delta\theta]} * \mathbf{Q}(t_0) \\ &= \left[I + \frac{1}{2}[\Delta\theta] + \frac{\left(\frac{1}{2}[\Delta\theta]\right)^2}{2!} + \frac{\left(\frac{1}{2}[\Delta\theta]\right)^3}{3!} + \dots \right] \cdot \mathbf{Q}(t_0) \quad (1-39) \end{aligned}$$

又由于

$$\begin{cases} [\Delta\theta]^2 = -\Delta\theta^2 I \\ [\Delta\theta]^3 = [\Delta\theta]^2 [\Delta\theta] = -\Delta\theta^2 [\Delta\theta] \\ [\Delta\theta]^4 = [\Delta\theta]^2 [\Delta\theta]^2 = \Delta\theta^4 I \end{cases} \quad (1-40)$$

其中

$$\Delta\theta = \sqrt{\Delta\theta_x^2 + \Delta\theta_y^2 + \Delta\theta_z^2}$$

将式(1-40)代入式(1-39)并整理,得

$$\mathbf{Q}(t) = \left\{ I \cos \frac{\Delta\theta}{2} + \frac{[\Delta\theta]}{\Delta\theta} \sin \frac{\Delta\theta}{2} \right\} \cdot \mathbf{Q}(t_0) \quad (1-41)$$

在实际解算过程中, $\cos \frac{\Delta\theta}{2}$ 和 $\sin \frac{\Delta\theta}{2}$ 必须按级数展开有限项计算, 对式(1-36)截取有限项, 得四元数的各阶近似算法。

一阶算法:

$$\mathbf{Q}(n+1) = \left\{ I + \frac{1}{2}[\Delta\theta] \right\} \cdot \mathbf{Q}(n)$$

二阶算法:

$$\mathbf{Q}(n+1) = \left\{ \left(1 - \frac{(\Delta\theta_0)^2}{8} \right) I + \frac{1}{2}[\Delta\theta] \right\} \cdot \mathbf{Q}(n)$$

三阶算法:

$$\mathbf{Q}(n+1) = \left\{ \left(1 - \frac{(\Delta\theta_0)^2}{8} \right) I + \left(\frac{1}{2} - \frac{(\Delta\theta_0)^2}{48} \right) [\Delta\theta] \right\} \cdot \mathbf{Q}(n)$$

四阶算法:

$$\mathbf{Q}(n+1) = \left\{ \left(1 - \frac{(\Delta\theta_0)^2}{8} + \frac{(\Delta\theta_0)^4}{348} \right) I + \left(\frac{1}{2} - \frac{(\Delta\theta_0)^2}{48} \right) [\Delta\theta] \right\} \cdot \mathbf{Q}(n)$$

6) 四元数的四阶龙格—库塔算法

工程中求解四元数微分方程通常使用数值积分算法。本书对四阶龙格—库塔数值积分法加以介绍。

四元数微分方程

$$\dot{\mathbf{Q}}(t) = \frac{1}{2}[\boldsymbol{\omega}_{nb}^b(t)] \cdot \mathbf{Q}(t) \quad (1-42)$$

其解为

$$\mathbf{Q}(t+1) = \mathbf{Q}(t) + \frac{T}{6}(k_1 + 2k_2 + 3k_3 + k_4)$$