


白話九章算術

徐品方

成都時代出版社



数学典籍 通俗读本

白话九章算术

徐品方 译注

成都时代出版社

图书在版编目(CIP)数据

白话九章算术/徐品方译注. —成都:成都时代出版社, 2002

ISBN 7-80548-807-X

I. 白... II. 徐... III. 九章算术-译文
IV. 0112

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2002)第 090421 号

书 名/白话九章算术

译 注/徐品方

责任编辑·周原孙

封面设计·刘 森

版式设计·席维中

责任校对·李 梅 陈 航

出 版 成都时代出版社

发 行 新华书店

印 刷 成都市万象印务有限公司

版 次 2002 年 12 月 第 1 版

2002 年 12 月 第 1 次印刷

开 本 787mm×1092mm 1/32

印 张 13

字 数 278 千字

印 数 1-1000 册

定 价: 26 元

ISBN 7-80548-807-x/O·1

社址:成都市庆云南街 19 号(东区) 邮政编码:610017

成都市二道桥街 72 号(西区) 邮政编码:610072

电话:(028)87760936(棋牌类) 86619530(综合类)

电话传真:(028)87766860 87742297(发行部)

四川省版权局举报电话:(028)86636481

前 言

驰名中外的《九章算术》，是我国古代数学的经典名著之一。它反映了秦汉时期社会生活的一个重要方面，体现了我国古代人民的智慧成果。由于它成书于大约公元 1 世纪，距今近 2000 年，文辞晦涩，又没有数学符号，没有表达式，没有图解，令现代人敬而远之，阻碍了人们对她的瑰富内容、独特体例、精深概念、博大思想和精巧方法的具体了解。而我译注的这本《白话九章算术》，就是为了扫除阅读障碍，使更多的人能够直接吸取她丰富的数学乳浆，挖掘它深刻的内涵。

本书全部译出了《九章算术》的问题、答案和“术”文。原著有 246 个问题，202 个术，术文一般放在同性题目之后。术是它的主要内容，是问题的算法（即解题方法）或法则；术不仅隐含着关系式，而且指明怎样按关系进行各种具体计算（含有简单推理）的步骤。所以，术就是介绍原理、定义和解题的步骤。但术又不同于现代数学公式，而是包含了我国古代数学的思想、方法、算法、法则、定理和公式等。又因万言《九章算术》经文是用竹

简刻写成的，许多数学思想、方法以及推理无法全部刻出，后人只有从魏晋时期的刘徽（约公元225—295）、唐代的李淳风（7世纪）、南宋时期的杨辉（13世纪）、清代的戴震（1724—1777）、李潢（？—1811）、沈钦裴（19世纪前期）、李锐（1773—1817），以及现代的钱宝琮（1892—1974）和白尚恕（1921—1995）等人的校订、注释里，特别是刘徽的注文中，去认识、了解其精湛深奥的数学理论，闪光夺目的数学思想、方法。《九章算术》经过历代学人的研究与发掘，才使她逐渐显出了“庐山真面目”。

为了便于更多的读者直接阅读，让不同层次的人去理解，本书没有全部译出刘徽、李淳风等人的注释*，只选其重要的、与现代数学思想和方法等理论相关的、具有代表性的内容，放在题末“说明”部分加以介绍。当然，本书的“说明”部分还包含了现代人（含作者本人）研究的一些新成果，它对中国古代数学的成就、地位、作用与价值进行了系统研究，并有一些独到的见解。此外，著者还补充增加了用现代形式的数字、符号、式子或公式的“解”的过程，更便于今人阅读与理解。这是本书特色之一。

* 因为传本《九章算术》包括《九章算术》本文（此称原著）与刘徽、李淳风注，所以通常《九章算术》有狭义、广义两种。狭义仅指《九章算术》本文，广义包括以上三者。

尽管我国第一部数学书是《算数书》（成书于公元前2世纪初），但二百多年后成书的《九章算术》比它成熟，独放光辉近两千年，近现代初等数学的许多内容都可以从中寻找到源头。因此，《九章算术》对我国初等数学的学习、教学具有重要参考价值。

《九章算术》（附录刘徽著《海岛算经》）在西方数学传入中国之前的一个很长时期，是我国传统数学教科书之一。该书很早便流传海外，邻近的日本、朝鲜，都曾把它作为国家学校数学科必修教材，曾被英国、前苏联、德国、日本、法国等翻译为本国文字。它对世界数学研究的发展曾作出过很大的贡献。

《九章算术》及其注释、校点版本很多，本书主要以白尚恕《〈九章算术〉注释》（科学出版社，1983年）为蓝本进行译注。

本书的出版，得到四川省会东县满银沟铁矿和四川省会东县铅锌矿后勤服务公司的大力帮助，又得到四川省会东县委书记王和相和凉山州老科技工作者协会副会长吴应嵩、凉山州科协副主席兼州老科协常务副会长黄发元等同志以及成都时代出版社的大力支持，在此表示感谢。

由于本人水平有限，书中难免存在问题与不足，敬请读者指正、赐教。

徐品方

目 录

前 言	(1)
刘徽《九章算术注·原序》今译	(1)
第一章 方 田	(10)
本章小结	(56)
第二章 粟米	(59)
本章小结	(90)
第三章 衰 分	(92)
本章小结	(119)
第四章 少 广	(121)
本章小结	(151)
第五章 商 功	(154)
本章小结	(188)
第六章 均 输	(191)
本章小结	(235)
第七章 盈不足	(239)
本章小结	(281)
第八章 方 程	(283)
本章小结	(317)
第九章 勾 股	(320)
本章小结	(361)
附录 刘徽著《海岛算经》今译	(365)
《海岛算经》小结	(406)

刘徽《九章算术注·原序》今译

【原序】

昔在包牺氏^①始画八卦^②，以通神明之德^③，以类万物之情，作九九之术^④以合六爻^⑤之变。暨于黄帝^⑥神而化之，引而伸之，于是建历纪，协律吕，用稽道原，然后两仪^⑦四象^⑧精微之气可得而效焉。记称隶首^⑨作数，其详未之闻也。按周公^⑩制礼^⑪而有九数^⑫，九数之流，则《九章》是矣。

往者暴秦焚书，经术散坏。自时厥后，汉北平侯张苍^⑬、大司农^⑭中丞耿寿昌^⑮皆以善算命世。苍等因旧文之遗残，各称删补。故校其目^⑯则与古或异，而所论者多近语^⑰也。

徽幼习《九章》，长再详览。观阴阳之割裂，总算术之根源，探赜之暇，遂悟其意。是以敢竭顽鲁，采其所见，为之作注。事类相推，各有攸归，故枝条虽分而同本干者，知发其一端而已。又所析理以辞，解体用图，庶亦约而能周，通而不黷，览之者思过半矣。且算在六艺^⑱，古者以宾兴贤能，教习国子。虽曰九数，其能穷纤入微，探测无方。至于以法^⑲相传，亦犹规矩^⑳度量可得而共，非特难为也。当今好之者寡，故世虽多通才达学，而未必能

综于此耳。

周官^①大司徒职^②：夏至日中立八尺之表，其景（影）尺有五寸，谓之地中。说云：南戴日下万五千里。夫云尔者，以术推之。按《九章》立四表^③望远及因木望山^④之术，皆端旁互见，无有超邈若斯之类。然则，苍等为术，犹未足以博尽群数也。徽寻九数有重差之名，原其指趣乃所以施于此也。凡望极高，测绝深而兼知其远者必用重差，勾股则必以重差为率^⑤，故曰重差^⑥也。立两表于洛阳^⑦之城，令高八尺。南北各尽平地，同日度其正中之景（影）。以景（影）差为法，表高乘表间为实，实如法而一，所得加表高，即日去地^⑧也。以南表之景（影）乘表间为实，实如法而一，即为从南表至南戴日下^⑨也。以南戴日下及日去地为勾、股，为之求弦，即日去人^⑩也。以径寸之筒南望日，日满筒空，则定筒之长短以为股率，以筒径为勾率，日去人之数为大股，大股之勾即日径^⑪也。虽夫圆穹之象犹曰可度，又况泰山^⑫之高与江海之广哉。徽以为今之史籍且略举天地之物，考论厥数，载之于志，以阐世术之美。辄造重差^⑬，并为注解，以究古人之意，缀于勾股之下^⑭。度高者重表^⑮，测深者累矩^⑯，孤离者三望^⑰，离而又旁求者四望^⑱。触类而长之，则虽幽遐诡伏，靡所不入。博物君子，详而览焉。

【注释】

①包牺氏：包牺又称伏羲或皇羲。传说是人类始祖，他与女娲（音蛙 wā）为兄妹，后通婚繁衍后代。1987年《江海学刊》第5期有文章认为，包牺为一氏族集团的酋长，是华夏族的祖先。

②八卦：八卦由阳爻“—”（音姚 yáo）和阴爻“-”两种基本符号组成。每次用3个这种符号排列，共有 $2^3 = 8$ 种不同的排列法，故叫做八卦。如图：
☰为乾，代表天；☱为兑，代表泽；☷为坤，代表地；☲为离，代表火；☴为巽，代表风；☳为震，代表雷；☶为艮，代表山；☵为坎，代表水。古人用八卦象征天、地、水、火、风、雷、山、泽等自然现象或社会现象。



八卦的排列

③以通神明之德：出自《周易·系辞下》“以体天地之变，以通神明之德”。“神明”原指主宰自然界与人类社会变化的天神。同时，《系辞》还把通过观察事物的变化预知未来的能力称为神，到了宋代，人们把神看成万物变化的根源。因此，在宋代神、鬼已成为用以说明世界运动变化性质的范畴。这里，我们将其解释为体现天道变化的规律。

④九九之术：有狭义和广义之分，狭义指九九乘法歌诀表，广义指古代算术。

⑤六爻：六爻指每次用6个爻进行排列，如☰，☷，☱，☶。这样可得 $2^6=64$ 种不同排列，叫做64卦。它们可以象征更多的自然现象和社会现象。

⑥黄帝：我国古代传说中的帝王，与炎帝合称炎黄，借指中华民族的祖先。共同祖先。

⑦两仪：指阳爻“—”和阴爻“--”，合称两仪。

⑧四象：从阳、阴爻中每次取两个，共有 $2^2=4$ 种不同的排法，叫做四象。如☰，☷，☱，☶。

⑨隶首：黄帝史官。

⑩周公：姓姬，名旦，西周著名政治家，是周成王的重要辅佐大臣。

⑪礼：指《周礼》，儒家最重要经典之一。今传本为战国人作。

⑫九数：汉代郑玄称：“九数：方田、粟米、差分、少广、商功、均输、方程、赢不足、旁要。”杨辉《详解九章算法纂类》(1261年)把勾股容方、容圆题归入旁要。

⑬张苍(约公元前250—前152年)：秦汉时人，汉代官至丞相。公元前176年任土木工程大吏，在历算方面有重要贡献。他曾整理、加工、删补《九章算术》。

⑭大司农：汉代官名，掌管谷物、赋税、盐、铁以及国家财政。

⑮耿寿昌(约公元前1世纪)：汉宣帝(公元前73—公元前49年)时官吏，曾为大司农中丞，以善算闻名。曾与张苍先后删补《九章算术》。

⑯此指《九章算术》目录。九章目录(内容)是方田、粟米、衰分、少广、商功、均输、盈不足、方程和勾股，与

九数在次序上有差别。另有不同的是，《九章算术》无旁要而有勾股。

⑮近语：指秦以后的词语，即刘徽所说的近代用语，如“算”“均输”“太仓”“上林”等。

⑯六艺：指周代贵族子弟学习的课程：礼、乐、射、御、书、数。最后一艺就是数学。

⑰法：指法则，即解题方法。

⑱规矩：规指画圆的工具，矩指矩尺。

⑲周官：《周礼》也称作《周官》。

⑳大司徒职：指管理土地及户口官吏之职责。

㉑表：指标杆。

㉒指由树求山高度（见《九章算术》勾股章第23题）。

㉓率：指比率，两数相比的结果叫“比率”。如刘徽说：“凡数相与者谓之率。”其中“相与”即是相比（除）的关系。

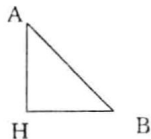
㉔重差：用标杆或矩尺进行两次测望的测量方法，古代称为“重差术”。在这种测量方法的计算中，需重复使用两次某两个差（即影差、标杆间差）进行计算，所以称这种测量方法为“重差术”。

㉕洛阳：三国时曹魏的都城，即今河南洛阳。

㉖日去地：指太阳距离大地的高度。

㉗本句意指太阳到南标杆的水平距离。

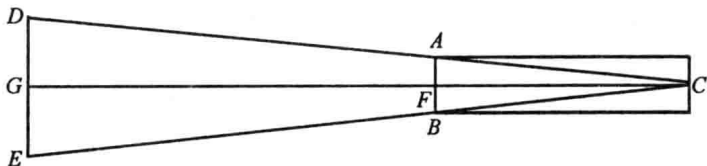
㉘这句话中，“以南戴日下”即太阳的正下面，亦即“日远”。如图，HB为勾，以“日去地”即“日高”（AH）为股，以勾、股平方和，开方即得作为弦的“日去人”，指太



阳与人的距离，即 $AB = \sqrt{AH^2 + HB^2}$ 。

⑳以径寸之筒南望日，日满筒空，则定筒之长短以为股率……大股之勾即日径也：这里“股率”指相似直角三角形两条对应的长直角边之间的比率；“勾率”指相似直角三角形两条对应短直角边之间的比率；“大股之勾”是以“大股”为长直角边的直角三角形的短直角边。

设太阳直径为 DE ，当 C 、 A 、 D 及 C 、 B 、 E 分别在一直线上，以 C 为测望点， AB 为竹筒直径， CF 为筒长， CG 为“日去人”（如图所示）。



由相似勾股形性质可得：

$$\frac{DE}{2} = \frac{AB \cdot CG}{CF},$$

$$\text{或 } DE = \frac{AB \cdot CG}{CF},$$

即得太阳的直径。

㉑泰山：在山东省，五岳之首。

㉒辄造重差：“重差”指《海岛算经》一书。

㉓缀于勾股之下：“勾股”，是指《九章算术》的第九章“勾股”。

㉔重表：指用两次标杆进行测量的方法。如《海岛算经》第 [1] [2] [3] [6] 题。

⑥累矩：指用两次矩尺进行测量的方法，如《海岛算经》第 [4] [5] [7] [9] 题。

⑦三望：指用三次测望的方法，如《海岛算经》第 [2] [5] [6] [7] 题。

⑧四望：指用四次测望的方法，如《海岛算经》第 [7] [9] 题。

【译文】

相传远古时代包牺氏最先画出八卦，用它来表述天道变化的规律，推算事物的道理或情状。他又创算术法则，用来配合六爻的各种变化。后来祖先又作进一步发展和引伸：借此造历法，调音律，以探索天地间万物的本原，于是两仪、四象间的精髓都可以得到验证。据记载说，黄帝史官创造数，但我不知道其中细节。周成王的辅佐大臣周公制定《周礼》时就有九数。九数发展到后来，就成为《九章算术》。

昔日残暴的秦始皇焚书坑儒，以致经学、儒家经典遭到破坏，甚至散失。汉代北平侯张苍、大司农中丞耿寿昌都因精通数学而闻名，他们根据当时残存的遗文进行删削、补充，整理编成现在的《九章算术》。从目录、内容来看，与古代的九数已稍有出入，而书中所论述的内容颇多近代用语。

我幼小时就学习《九章算术》，年长后又作仔细钻研，观察事物的正反、分割，总结数学的根本原理。在深入探索奥秘幽深的过程中，逐渐领悟其中道理。于是不揣才疏学浅，搜集所见，提出自己的见解，为《九章算术》作注释。事物虽然有各种类别的不同，但每一类事物各有所归属，像树木一样，虽然枝杈繁多，但都属于同一条主干。在注释时，我用文辞语句分析其理论（道理），用图形解释其形体结构，使这一工作能做到简明而周全，通顺而不牵强，使凡是读过我注释的人都能懂得其中大部分内容。古代数学作为六艺之一，是用来教育贵族子弟和推荐人才的一门学科。虽称之为九数，实际上它可

以深入到研究极小、极微的微观世界；也可以探索到无穷无尽的宏观世界。自古以来有数学解题方法相传，犹如度量有圆规矩尺工具一样，有现成法则可以遵循，因此学习九数也并非是什么特别繁难的事情。如今喜爱这门学科的人很少，社会上虽然博学的人很多，但他们也未必能够娴熟于此。

《周官·大司徒职》说，管理土地及户口的官吏的职责之一是在夏至那天中午立 8 尺高的标杆，定出日影长是 1 尺 5 寸的地方，称为地中。据说这一时刻太阳在南方 15000 里处，这一论断是可以设法推算出来的。《九章算术》有立四根标杆求距离和由树求高度的测量方法，都是在近旁立标杆相望，而没有这类远距离遥望测量的问题，可见张苍等人所编的书还不足以处理各种问题。我想到九数中有重差这一项目，重差的本意就是为了解决这类问题。凡是要测十分遥远目标的高、深以及距离，必须用重差术。因为要用到两次直角三角形相当差的差数作为比率，所以叫做重差术。在洛阳城南北方向平地上立两根标杆，使其间隔尽可能远一些，标杆高各 8 尺。在同一天中午各自测出日影长度，把这两根标杆的日影长的差数作为除数，以标杆高乘以两杆间距离之积作为被除数，被除数除以除数，以所得到的商加上标杆高度，即得所求的太阳到地面的垂直距离。如果把南标杆日影长乘以两标杆间的距离之积作为被除数，仍把两标杆日影长的差数作为除数，被除数除以除数，结果就是南标杆到太阳正下面的水平距离。从南标杆到太阳正下面的水平距离、太阳到平地的垂直距离分别作为勾、股，并求弦，所得结果就是太阳到测量者的距离。用直径 1 寸的竹筒向南测望太阳，使太阳的图形充满竹筒，把竹筒长取作股的比率，以竹筒直径作为勾的比率，太阳到测量者的距离为大股，那么它的勾就是太阳的直径。这样看来，既然天象也可以测量，那么求泰山的高度、江海的宽度就更不用说了。我认为当前历史典籍对天象、地貌的研究已有少数定量记录，说明了学术上的一定成就。我因此也写了《重差》，并为它作了注释，用来阐述古人建立法则的本意，把它

附在勾股章的后面。凡是测高需要用前后两根标杆，测深需要用上下两次矩尺。如果要另加测点，就要观测三次。如果所加测点还不在于同一平面内，就要观测四次。这样触类旁通，引申发展，问题虽然复杂、曲折、隐晦，但都是可以迎刃而解的。请读者仔细阅读《九章算术》和《海岛算经》这两本书吧！

第一章^① 方 田^②

[1]* 今有田广^③十五步^④，从^⑤十六步。问为田几何。

答曰：一亩。

[2] 今有田广十二步，从十四步。问为田几何。

答曰：一百六十八步。

方田术^⑥曰：广从步数相乘得积步^⑦。

以亩法二百四十步除之，即亩^⑧数。百亩为一顷。

【注释】 ①本章共有 38 题，有 21 个术。重要的术有均分术、割圆术。该章内容主要讲各种不同形状田地面积的计算和详细分数的四则运算的理论。田地面积的计算被列入数学著作，并且做为首章，说明土地问题是当时（公元 1 世纪前后）社会上最普遍最关心的问题。

②方田：“方”就是正方形或长方形，且含有单位面积的意思。“田”就是田地。“方田”就是长方形或正方形的田地的统称，本处意思是计算一块田含有多少个单位面积的方法。古代有时也称长方形的田为直田或广田等。所以，“方田”应理解为研究平面图形的边界和面积的计算方法。此乃刘徽

* 《九章算术》（本书简称“原著”）没有题号，为了便于查阅，作者每章分别自加题号。