高等院校力学教材
Textbook in Mechanics for Higher Education

塑性力学

米海珍 胡燕妮 编著

清华大学出版社

高等院校力学教材

Textbook in Mechanics for Higher Education

塑性力学

米海珍 胡燕妮 编著

清华大学出版社

内容简介

本书系统介绍了塑性力学的基本概念、基本理论、基本方法及其应用。全书共分7章，主要内容包括塑性力学中的基本概念、简单应力状态的弹塑性问题分析方法、应力与应变状态分析、屈服条件、弹塑性本构关系、简单弹塑性问题举例、刚塑性材料的平面应变问题和结构极限荷载分析的极限定理。主要章节后附有小结、思考题与习题，习题后附有提示及答案。本书理论框架完整、内容条理清晰、叙述通俗易懂，便于读者更快、更深入地熟悉塑性力学。

本书是高等院校工科专业如土木工程专业研究生的塑性力学课程的教材，适合40～60学时的教学，也可供科研工作者和工程技术人员参考。

图书在版编目(CIP)数据

塑性力学/米海珍，胡燕妮编著. --北京：清华大学出版社，2014
高等院校力学教材
ISBN 978-7-302-36067-4

Ⅰ. ①塑…　Ⅱ. ①米… ②胡…　Ⅲ. ①塑性力学－高等学校－教材　Ⅳ. ①O344

中国版本图书馆CIP数据核字(2014)第065976号

责任编辑：秦　娜　赵从棉
封面设计：常雪影
责任校对：赵丽敏
责任印制：宋　林

出版发行：清华大学出版社
网　址：http://www.tup.com.cn，http://www.wqbook.com
地　址：北京清华大学学研大厦A座　**邮　编**：100084
社总机：010-62770175　**邮　购**：010-62786544
投稿与读者服务：010-62776969，c-service@tup.tsinghua.edu.cn
质量反馈：010-62772015，zhiliang@tup.tsinghua.edu.cn
印刷者：三河市君旺印装厂
装订者：三河市新茂装订有限公司
经　销：全国新华书店
开　本：170mm×230mm　**印　张**：13　**字　数**：240千字
版　次：2014年5月第1版　**印　次**：2014年5月第1次印刷
印　数：1～3000
定　价：28.00元

产品编号：053139-01

前　言

本书是为高等院校工科专业研究生编写的教材。塑性力学是研究生学习阶段的一门重要基础课。塑性力学研究内容丰富，应用广泛，该课程对提高工程力学素养必不可少。笔者有十余年的授课经历，鉴于现行教材偏少，较难适应目前的教学，故根据多年的讲义并积累讲课经验，经八个月的努力终成此书。

塑性力学目前还有很多活跃的研究内容，但基本框架早已形成。作为工科教材，我们编写的目标是：介绍基本概念和基本理论，力求理论框架完整，内容简明清晰，叙述通俗简洁；突出物理本质说明，删减繁复的数学证明；尽量从不同角度阐释其力学意义，便于学习者入门和掌握。本书较之前的教材增添了较多例题，每章节后有简洁的小结，章后习题多数给出了提示和答案，思考题和习题选取本着少而精的原则。笔者希望这本教材不仅使教授者顺手，而且使学习者入门快些，掌握起来容易些，尤其是对塑性力学理论的框架有明晰的了解。

此书内容包括塑性力学的基本概念、基本理论和基本方法。更高更深层次的知识请查阅其他专著和较新的文献。

书中的插图由兰州理工大学设计艺术学院的闫幼锋老师绘制。本书得到了兰州理工大学研究生院建设课程专项支持，也得到了兰州理工大学土木工程学院的老师和研究生们的支持和帮助，同时得到清华大学出版社秦娜、赵从棉两位编辑的热情鼓励。在此我们表示衷心的感谢。

由于塑性力学理解不易，因此第 1 章由简单应力状态的弹塑性问题入手，建立塑性力学中的物理概念，然后将基本概念推广至一般应力状态，从而分散难点，由浅入深，便于初学者入门。第 5～7 章分别针对不同特点的弹塑性问题，举例说明弹塑性问题的分析方法。

虽然编写时笔者在诸多方面花了很多心思，但由于水平和经验所限，肯定还会存在很多问题，我们恳请大家分析、思量即将读到的内容，如有任何意见和建议，请与我们联系，联系邮箱：huyn@lut.cn。

米海珍　胡燕妮

2014 年 1 月

目 录

第1章 简单应力状态下的弹塑性问题

金属材料的拉伸实验表明,应力大于屈服应力时试件没有立刻破坏,而是有一定的应力富余或应变富余,应用此富余可以使结构承载力提高,这就是塑性力学的研究意义。塑性力学的主要任务就是研究物体在塑性变形阶段应力和变形的规律。

塑性力学与弹性力学都是固体力学的重要组成部分。在小变形情况下,线弹性力学中除了本构关系外,其余的方程(平衡方程、几何方程)和边界条件在塑性力学中同样适用。因此,塑性力学将要解决的是塑性变形阶段材料的本构关系,即如何描述处于塑性状态时物体的应力-应变关系。

线弹性力学中,讨论的问题限于应力-应变的关系是线性的,即材料服从所谓的广义胡克定律。材料的弹性性质的根本特征是其变形过程是可逆的,应力-应变之间有唯一的单值对应关系。然而,由材料的简单拉压实验得知,只有拉压应力的绝对值小于某一数值(称为**弹性极限**)时变形才是可逆的。当此绝对值超过弹性极限后,一方面应力-应变关系不再是线性的,另一方面在卸去荷载(应力)后,变形不能完全恢复,即材料产生了不能恢复的或不可逆的**塑性变形**。如果规定结构中不能出现塑性变形,则只用弹性力学分析应力-应变关系、计算结构的强度和刚度、确定结构的设计准则等。然而对于某些物体或超静定结构,这种规定由于不能充分发挥物体或结构上所有的材料作用而造成浪费,例如圆轴扭转和梁的弯曲,最大应力都发生在截面的最外层,即所谓的"危险点"处。当"危险点"处及其附近的应力达到和超过弹性极限时,其他大部分材料所承受的应力仍然在弹性范围内,"危险

点”处并不会随意塑性变形而是受弹性变形约束，因此构件并不会“破坏”或失效。因此，在结构设计中考虑材料的塑性性质是有意义的。

本章将主要介绍塑性力学的基本概念、基本假设和简单应力状态下的弹塑性问题的求解。这些基本概念如**加载准则**、**硬化法则**以及**增量型弹塑性应力-应变关系**等在塑性力学中具有重要的意义。

1.1 拉伸曲线

简单拉(压)实验是研究材料力学性质的最基本实验。在材料力学中只讨论拉(压)实验曲线的弹性部分(一般是线性关系)，在塑性力学中将讨论材料弹性极限 σ_s 以后的情形。下面分析金属材料在常温、静载下完整拉伸实验的 σ-ε 曲线。曲线通常有两种类型，如图 1-1 所示。从实验结果可以得知金属材料的若干重要力学性质。

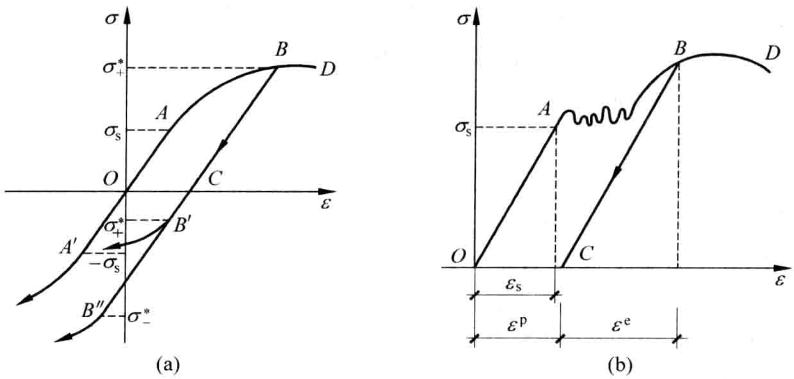

图 1-1

1.1.1 弹性范围

设试件从零应力状态开始受拉，应力-应变曲线将从原点出发。随着荷载增加，应力-应变之间通常是按比例增长，到达**比例极限**以后，曲线开始略向下弯曲，直到**弹性极限**，在此前若完全卸去荷载，应变也沿原有曲线下降至零。当应力超过弹性极限后，虽卸载使应力降到零，但应变却不为零，残留的这部分应变称为**塑性应变**。有些材料如低碳钢、铝合金等的拉伸曲线如图 1-1(b)所示，在弹性极限以后有一个**屈服阶段**，此时应力保持不变时应

变仍然有很大的增长，和刚达到弹性极限时的应变相比，屈服阶段末的应变可大到十多倍。称屈服阶段对应的应力为**屈服应力**。由于一般材料的比例极限、弹性极限和屈服应力相差不大，通常在工程上可不加区分，统称为屈服应力，用 σ_s 表示。

如果在产生了不太大的塑性变形之后再逐渐减小荷载，则如图 1-1 中的 BC 线，应力-应变的变化规律基本上是一直线，其斜率大致与最初加载时的斜率相同。这表明在产生塑性变形以后，材料内部的晶格结构并未发生本质的变化。如果从卸载后的点重新再加载，则开始时应力-应变之间仍按原始比例作线性变化，在 B 点附近才急剧地弯曲并开始产生新的塑性变形，就好像是把初始屈服应力提高到 B 点所对应的应力。显然，材料经过塑性变形得到了强化，因此这种现象称为**应变强化**或**应变硬化**。

如果材料从 B 点卸载至零并进行反向加载，则对单晶体来说，其压缩时的屈服应力也有相似的提高(如图 1-1(a)中的 B'')。然而，对多晶体材料来说，其压缩屈服应力(B')一般要低于一开始就压缩加载时的屈服应力(A')，即 A' 点的应力绝对值大于 B' 点的应力绝对值。这种由于拉伸时强化影响到压缩时弱化的现象称为**包辛格效应**(Bauschinger effect)，或简称**包氏效应**。对于一般的金属工程材料，拉伸屈服极限和压缩屈服极限在数值上可认为是相等的，即假定没有初始包辛格效应。于是，应力在 $-\sigma_s \leqslant \sigma \leqslant \sigma_s$ 范围内变化时材料处于弹性状态，应力-应变关系为

$$\sigma = E\varepsilon \tag{1-1}$$

这个关系是唯一的、单值对应的，与应力路径或应力历史无关。为了区别起见，称 $\pm\sigma_s$ 为**初始屈服点**；两个初始屈服点之间的应力变化范围称为**初始弹性范围**。在一维空间，一个区域(实际上是区段)的边界是两个点(离散的)。类似的，在一维应力情况下，两个初始屈服点就是初始弹性范围的边界。在二维空间，一个区域的边界是某条曲线。在三维空间，一个区域的边界则是某个曲面。如果材料处于复杂受力状态，一般应力或应变为 6 个独立的变量，则初始弹性范围的边界将是用应力分量或应变分量作为自变量表示的某个超曲面(或曲线)，该超曲面(或曲线)的函数称为**屈服函数**或**屈服条件**(参阅第 3 章)。

当应力在下列范围内变化时(见图 1-1(a))：

$$\sigma_-^* \leqslant \sigma \leqslant \sigma_+^* \tag{1-2}$$

应力-应变关系不再是式(1-1)，而是

$$\Delta\sigma = E\Delta\varepsilon \quad 或 \quad \mathrm{d}\sigma = E\mathrm{d}\varepsilon \tag{1-3}$$

这是**增量型的胡克定律**。只要应力是在式(1-2)所示范围内变化，无论变化

过程(应力路径)如何,应力-应变关系都满足式(1-3)。由于式(1-3)是线性关系,而且是与路径无关的,所以将式(1-2)所示的应力变化范围称为**相继弹性范围**,而 σ_{+}^{*} 及 σ_{-}^{*} 则是相继弹性范围的边界,称为**相继屈服点或加载点**。

图 1-1 中 B 点的位置是可变的,那么 B' 和 B'' 的位置也发生相应的改变,即 σ_{+}^{*} 与 σ_{-}^{*} 是变化的,因此相继弹性范围及其边界不是固定的,而与应力历史或变形历史有关。在一维应力状态下,相继屈服点可由实验加以确定。在复杂应力状态下,相继弹性范围的边界将是某种用应力分量表示的且与应力历史有关的曲面,称为**相继屈服曲面**或**加载面**。确定加载面及其变化规律是一个很困难的问题,至今仍未能很好地解决。

最后指出,各向同性材料在经历塑性变形(例如由于加工成型及加载等原因)之后,都将呈现出某种各向异性性质。例如,当试样拉伸到 σ_{+}^{*} ($\sigma_{+}^{*}>\sigma_{s}$)后,经受卸载时,其相继弹性范围的另一边界 σ_{-}^{*} 一般在数值上将小于 σ_{+}^{*},即 $\sigma_{+}^{*}>|\sigma_{-}^{*}|$。

1.1.2 关于材料的基本假设

为了简化计算,或者为了使计算成为可能而计算结果又便于应用,需将材料加以理想化。即在一定条件下,只考虑材料的主要性质,略去其次要性质,建立所谓的力学模型。材料的力学模型是有关力学学科分支划分的标志,它既是该门学科的研究对象,又是该门学科内容适用性的限制。例如,线弹性体是一种力学模型(因为实际物体不可能是完全的线弹性体),以线弹性体为研究对象的就是“线弹性力学”。“塑性力学”(实际上是塑性静力学)中对于材料有以下一些基本假设。

1. 关于材料基本性质的假设

塑性力学中假定**材料是非粘性的**,即材料的力学性质(或本构关系)与时间因素无关。材料的时间效应表现为:一是在高速率下材料的粘性效应,这时应力-应变关系与应变率有关,即动态应力-应变关系与静态应力-应变曲线显著不同。二是在低速率下的粘性效应,例如在恒应力下应变将随时间而(缓慢)增长,最终导致断裂,这种现象称为**蠕变**;或者在恒应变下,应力值随时间而减小,这种现象称为**松弛**。对于多数金属材料来说,在快速加载(冲击载荷)下,前者的粘性效应很明显;在高温下后者的粘性效应很明显。因此,假定材料没有粘性效应,实际上是限于**研究常温静载下金属的塑性力学行为**。

另外,塑性力学中还假定**材料是无限韧性的**,即认为材料可“无限地”变

形而不会出现断裂。这当然也只是一种理想化模型。因此在塑性力学中不考虑脆性断裂问题。

2. 关于弹性和塑性的假设

晶体材料的原子之间存在相互平衡的吸引力和排斥力。物体受力后产生弹性变形时,原来原子间的平衡被破坏,原子通过改变晶格中相互间的距离达到新的平衡,但晶格的基本排列形式不发生改变。当外力撤除后,各原子又恢复到原来的平衡位置。此种变形机制可以说明宏观的弹性变形。而发生塑性变形时,晶格的一部分相对另一部分发生滑移,改变了晶格点阵的排列方式。外力撤除后,晶格中的原子不能恢复到原来的位置。实验证明,**塑性变形的基本机理是滑移**。这种变形机制一般不会造成晶体体积的改变,由此可知**金属材料的塑性变形中将不会包含体积改变量**。

在静水压力(即各向均匀压力)条件下对金属材料进行大量的实验研究,其实验结果表明:

(1) **静水压力对材料屈服极限的影响可忽略不计**。对钢试件作有静水压力和无静水压力两种条件下的拉伸实验,对比发现静水压力对屈服极限影响很小,可以忽略不计,即**塑性材料的塑性变形和静水压力无关**。但对于铸铁、岩石、土等脆性材料,静水压力对屈服极限和塑性变形有显著影响,不能忽略。

(2) **静水压力与材料的体积改变近似地服从线性弹性规律**。实验时,卸除静水压力,材料体积变化可以恢复,没有残留的体积变形,可以认为静水压力条件下材料的体积变化是弹性的,或者说,塑性变形不引起体积变化。当实验压力约为金属的屈服极限时,实测材料的体积变形结果与按弹性规律计算结果相差约为 1%,因此完全可以按弹性规律计算体积变形。实验还表明,这种弹性的体积变形是很小的,例如弹簧钢在 1 万个大气压力下体积仅缩小 2.2%。因此对于一般应力状态下的金属材料,当发生较大的塑性变形时,可以忽略弹性的体积变化,认为材料在塑性状态时体积是不可压缩的,即体积不发生改变而仅有形状改变。

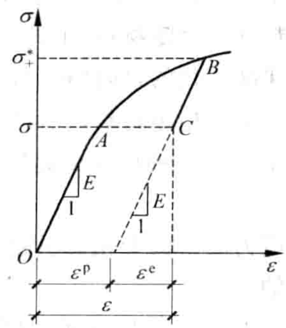

图　1-2

如图 1-2 所示,材料的应力超过初始弹性范围后,应变可分为弹性应变部分 ε^e 和塑性应变部分 ε^p,即

$$\varepsilon = \varepsilon^e + \varepsilon^p = \frac{\sigma}{E} + \varepsilon^p$$

上式的微量形式是

$$d\varepsilon = d\varepsilon^{e} + d\varepsilon^{p} = \frac{d\sigma}{E} + d\varepsilon^{p}$$

这里,实际上已假定在初始弹性范围和相继弹性范围内,材料的弹性性质相同,即**材料的弹性与塑性互不相关,各自独立**。这对于金属材料是近似正确的,但对于岩土材料则不然。

由于塑性应变在相继弹性范围内是不改变的,而弹性应变恒与应力有单值关系,因此,当材料发生塑性变形后,应力和应变之间就不再存在一一对应的单值关系了。同一个应力可对应于不同的应变,反之亦然(见图 1-3)。

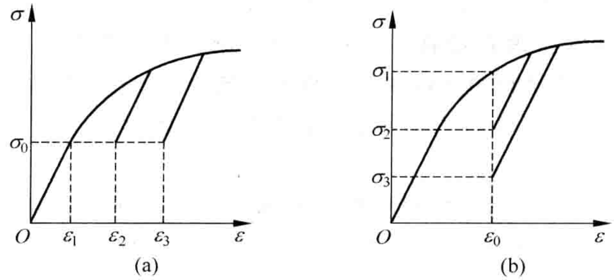

图 1-3

3. 稳定性材料假设、杜拉克公设、依留辛公设

根据金属材料的典型静态 σ-ε 曲线(图 1-4(a)),可以看到存在下列关系:

$$E \geqslant E_c \geqslant E_t \geqslant 0 \tag{1-4a}$$

式中,E 为杨氏弹性模量,E_c 为割线模量,E_t 为切线模量或强化模量。这种材料称为**稳定材料**,上式是稳定材料的数学表达式之一。上式也表明材料是递减强化的,即材料的切线模量 E_t 是应变 ε 的减函数。

关于稳定材料,也可以这样来分析:当应力由起始状态的 $\sigma^{(0)}$ 直线变化到 $\sigma^{(1)}$,对应的应变由起始状态的 $\varepsilon^{(0)}$ 直线变化到 $\varepsilon^{(1)}$,当

$$(\sigma^{(1)} - \sigma^{(0)})(\varepsilon^{(1)} - \varepsilon^{(0)}) \geqslant 0 \quad 或 \quad d\sigma d\varepsilon \geqslant 0 \tag{1-4b}$$

即应力的单调变化会引起应变的同号的单调变化,反之亦然,则称**材料是稳定的**。

如图 1-4(b)所示,材料经历某一应力历史后,应力为 $\sigma^{(0)}$(如 B' 点),对应的应变为 $\varepsilon^{(0)}$;然后加载使应力增加到 $\sigma^{(1)}(\geqslant\sigma_s)$,对应的应变为 $\varepsilon^{(1)}$,这一加载过程将产生新的塑性应变。最后缓慢卸载,使应力回到原来的 $\sigma^{(0)}$ 值

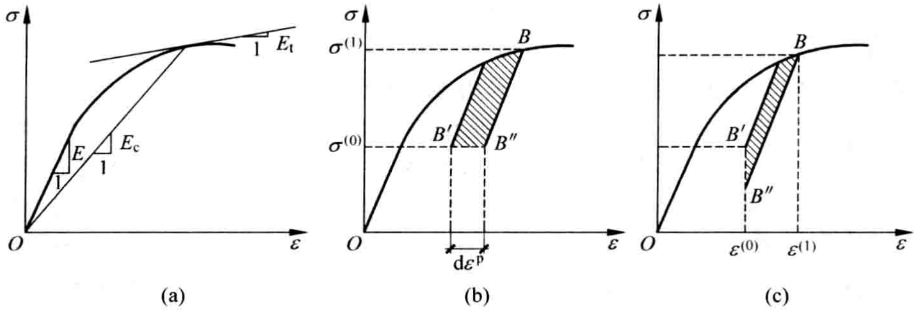

图　1-4

(此时应变不能回到加载前的位置 B' 点,而是 B'' 点),这样的应力变化过程称为**应力循环**。在此应力循环过程中,塑性应变只有微量变化。在应力-应变平面上,应力闭循环($\sigma^{(0)} \to \sigma^{(1)} \to \sigma^{(0)}$)总是顺时针的,表明这一循环过程不可能提取有用功,即

$$\oint \varepsilon \mathrm{d}\sigma \leqslant 0 \tag{1-5}$$

即材料的物质微元在应力空间中的任意应力闭循环中的余功非正,此为**杜拉克(Drucker)公设**。

如图 1-4(c)所示,在应变空间,材料微元在任意应变闭循环($\varepsilon^{(0)} \to \varepsilon^{(1)} \to \varepsilon^{(0)}$)中的功非负时,若微量增加的 $\mathrm{d}\sigma$ 产生的应变也是微量增加的 $\mathrm{d}\varepsilon$,则有

$$\oint \sigma \mathrm{d}\varepsilon \geqslant 0 \tag{1-6}$$

此为**依留辛公设**。

不等式(1-4)～(1-6)是在一维应力状态下讨论得到的,更一般的应力状态将在第 4 章讨论,它们是塑性力学中非常重要的理论。

1.2　金属材料的塑性性质

1.2.1　塑性本构方程

材料发生塑性变形后,应力-应变关系不再是唯一的。当材料处于弹性范围内时,本构关系为

$$\sigma = E\varepsilon\text{(初始弹性范围内)}$$

$$\mathrm{d}\sigma = E\mathrm{d}\varepsilon\text{(相继弹性范围内)}$$

$$d\varepsilon^p = 0$$

在这里首先要判定材料是否经历过塑性变形，然后再根据应力是否位于屈服点所限的相继弹性范围内，最后采用不同的应力和应变关系。

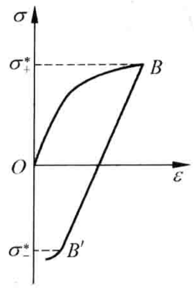

图 1-5

如果应力是位于相继弹性范围的边界上（称材料处于塑性状态），如图 1-5 中的 B 点（$\sigma=\sigma_+^*$）或 B' 点（$\sigma=\sigma_-^*$）。这时，根据应力的变化不同，应力-应变关系也不同，但都只能建立增量形式的本构关系。例如，设应力位于 B 点，当应力增大时（$d\sigma>0$），材料将从一个塑性状态进入相邻的新的塑性状态，这种应力变化称为**加载过程**。注意，加载过程是针对一点**应力状态**而言，不是针对一种结构而言的。加载过程可用下式表示：

$$\text{sign}\sigma \cdot d\sigma > 0 \tag{1-7}$$

其中 $\sigma=\sigma_+^*$。如果是在 B' 点，则 $\sigma=\sigma_-^*$。在应力加载过程中，应力-应变关系为

$$d\sigma = E_t d\varepsilon$$

一般地 E_t 不是常数，所以上式不是线性关系。根据以上分析，有

$$d\varepsilon = d\varepsilon^e + d\varepsilon^p = \frac{d\sigma}{E} + d\varepsilon^p = \frac{d\sigma}{E_t}$$

由此可得

$$d\varepsilon^p = \left(\frac{1}{E_t} - \frac{1}{E}\right)d\sigma = \frac{E-E_t}{EE_t} = \frac{1}{E_p}d\sigma$$

E_p 称为**塑性模量**，它是 $d\sigma$ 与 $d\varepsilon^p$ 的比值，一般不是常数（因为 E_t 不是常数）。

如果应力变化是向弹性范围内部的，使材料从塑性状态回到弹性状态，这种应力变化称为**卸载过程**。同样地，卸载也是针对一点应力状态而言的。卸载过程可用下式表示：

$$\text{sign}\sigma \cdot d\sigma < 0 \tag{1-8}$$

这时应力-应变关系为

$$d\sigma = E d\varepsilon, \quad d\varepsilon^p = 0$$

不等式(1-7)、(1-8)分别称为**加载准则**、**卸载准则**，这只是最简单的表示形式，更一般的形式用屈服函数来表示，这将在以后的章节中讨论。

1.2.2 屈服点和强化规律

在塑性力学的基本理论中，很重要的一个问题是要确定弹性范围的边

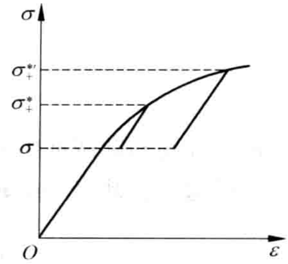

图　1-6

界，在一维应力情况下，就是要确定屈服点。初始屈服点可以由实验确定，相继屈服点(σ_+^*，σ_-^*)则不然，它本身是与以前的变形历史有关的，不能只由瞬时的应力或应变来确定。例如，对于同一个应力值 σ，它可能位于弹性范围的边界上，也可能位于不同的相继弹性范围之内；其相继屈服点可以是 σ_+^* 或 $\sigma_+^{*\prime}$ 等(图 1-6)。因此，只有了解了此刻以前的全部变形历史，才能确定相继屈服点，继而判别瞬时应力是位于某一相继弹性范围之内或位于弹性范围的边界上，因而**相继屈服点是应力和塑性变形历史的函数**。应力在相继弹性范围内的变化(也是应力历史或变形历史的一部分)不影响相继屈服点，只当应力变化为加载过程时(即塑性应变变化时)，相继屈服点才改变，所以相继屈服点只与加载过程的那部分历史有关，这部分历史称为材料塑性变形性质的记录史，可用参数 H_α 表示。于是相继屈服点可写成

$$\sigma^* = \sigma^*(\sigma, H_\alpha) \quad 或 \quad f(\sigma, H_\alpha) = 0 \tag{1-9}$$

相继屈服点的变化规律称为**强化规律**，又称为加载函数。确定材料的强化规律，即确定式(1-9)中的函数 $f(\sigma, H_\alpha)=0$ 的具体形式。这是一个塑性力学中至今尚未很好解决的问题。下面介绍两种最简单的模型，也是当前较为普遍采用的模型(对于复杂应力状态也是如此)。

1. 等向强化模型

强化模型认为：材料如果在一个方向得到强化，则在各个方向都有同等的强化。等向强化模型完全没有考虑材料的包辛格效应，这是一个缺点；但因为它在应用中比较简单，所以仍然得到了比较多的应用。在一维应力情况下，则有

$$\sigma_+^* \equiv |\sigma_-^*| \tag{1-10}$$

或者写成函数形式

$$f(\sigma, H_\alpha) = \sigma^2 - (\sigma^*)^2 = 0, \quad (\sigma^*)^2 \geqslant \sigma_s^2 \tag{1-11}$$

其中 σ^* 乃此前加载历史中应力在数值上曾达到过的最大值。当 $(\sigma^*)^2 < \sigma_s^2$ 时，取 $(\sigma^*)^2 = \sigma_s^2$。应当注意，$(\sigma^*)^2$ 为一单调增加(只增不减)的正数，它是材料力学性质记录史的一种参数。式(1-11)乃式(1-9)的具体化。而**加载准则**和**卸载准则**可分别写成