高等学校教材

高等数学（上册）

主编　陈巨龙　孙王杰

高等教育出版社

高等学校教材

高 等 数 学

Gaodeng Shuxue

（上　册）

主编　陈巨龙　孙王杰

高等教育出版社·北京

内容提要

本书分为上、下两册，上册包括极限与连续、一元函数微分学、一元函数积分学、向量代数与空间解析几何四个单元，书后附有三角函数公式表、几种常用的平面曲线、常用积分公式、习题答案等内容。

本书可作为高等工科院校工学、理学、经济学、管理学等各专业的教材或教学参考书，也可作为成人教育的教材，还可用作工程技术人员的自学参考书。

图书在版编目(CIP)数据

高等数学．上册/陈巨龙,孙王杰主编．--北京：高等教育出版社,2014.7

ISBN 978-7-04-039524-2

Ⅰ.①高… Ⅱ.①陈… ②孙… Ⅲ.①高等数学-高等学校-教材 Ⅳ.①O13

中国版本图书馆CIP数据核字(2014)第064796号

策划编辑 李蕊　责任编辑 李蕊　特约编辑 徐飞　封面设计 李小璐
版式设计 余杨　插图绘制 宗小梅　责任校对 杨凤玲　责任印制 田甜

出版发行	高等教育出版社	咨询电话	400-810-0598
社　　址	北京市西城区德外大街4号	网　　址	http://www.hep.edu.cn
邮政编码	100120		http://www.hep.com.cn
印　　刷	廊坊市科通印业有限公司	网上订购	http://www.landraco.com
开　　本	787mm×960mm 1/16		http://www.landraco.com.cn
印　　张	17.25	版　　次	2014年7月第1版
字　　数	240千字	印　　次	2014年7月第1次印刷
购书热线	010-58581118	定　　价	29.80元

本书如有缺页、倒页、脱页等质量问题，请到所购图书销售部门联系调换

物 料 号　39524-00

前　言

数学是研究现实世界中空间形式和数量关系的科学。数学是与自然科学、社会科学、思维科学、哲学并行的学科体系，可细分为数百个分支，我们所接触的只是基础数学中最基本的知识。高等数学以变量为研究对象，探讨变量之间的基本数量关系和空间表现形式。我们学习高等数学的目的是运用数学理论及其计算方法解决实际问题，并且形成逻辑思维和形象思维能力，以适应现代社会瞬息万变的知识需求。

高等数学包括微积分学、空间解析几何、无穷级数、常微分方程等知识内容，其中微积分学又包括极限与连续、一元函数微分学、一元函数积分学、多元函数微分学、多元函数积分学，是解决自然科学中大量实际问题的有效方法，是高等数学的主要内容，而空间解析几何、无穷级数、常微分方程等既是微积分学研究的准备知识或内容延续，又可以独立地解决许多实际问题。

本教材在编写特色上力争突出专业性和实用性；对知识点的引入依据循序渐进、由浅入深的原则；强调对基本概念、基本知识的理解；淡化对理论性较强、计算技巧较高的内容的要求，突出知识的应用引导，加大数学实验部分的篇幅。

根据教学实际需要和近年来普通高校学生的实际情况，在课后习题中增加了对基本概念理解、基本知识掌握、基本计算方法训练、对所学知识点应用等方面的内容，减少了对数学理论要求较高、计算技巧要求较强的内容。在每个单元的后面都安排了综合练习题，尽量体现高等数学题目类型的多样性、知识体系的综合性、各类问题的技巧性和数学知识的广博性。另外还准备了课后习题答案，供学生在学习时参考。

上册最后安排了三个附录，主要是为学生在知识衔接、学习参考、知识延伸等方面服务。比如三角函数公式表，从目前高中数学新课标来看，这部分内容未能引起学生的足够重视，但对一元函数微积分学教学的影响却很大，在近几年的教学实践中体会很深，很有必要作为附录列出。

参加本书编写工作的有陈巨龙、孙王杰、许洁、刘丽波、崔晓梅、张庆春，全书由陈巨龙统稿。

限于作者的水平，不足乃至错误之处在所难免，诚恳希望读者批评指正，便于再版时更正。

编　者

2013.11

郑重声明

高等教育出版社依法对本书享有专有出版权。任何未经许可的复制、销售行为均违反《中华人民共和国著作权法》，其行为人将承担相应的民事责任和行政责任；构成犯罪的，将被依法追究刑事责任。为了维护市场秩序，保护读者的合法权益，避免读者误用盗版书造成不良后果，我社将配合行政执法部门和司法机关对违法犯罪的单位和个人进行严厉打击。社会各界人士如发现上述侵权行为，希望及时举报，本社将奖励举报有功人员。

反盗版举报电话　(010) 58581897　58582371　58581879

反盗版举报传真　(010) 82086060

反盗版举报邮箱　dd@hep.com.cn

通信地址　北京市西城区德外大街4号　高等教育出版社法务部

邮政编码　100120

短信防伪说明

本图书采用出版物短信防伪系统，用户购书后刮开封底防伪密码涂层，将16位防伪密码发送短信至106695881280，免费查询所购图书真伪。

反盗版短信举报

编辑短信“JB，图书名称，出版社，购买地点”发送至10669588128

短信防伪客服电话

(010)58582300

与本书配套的数字课程资源使用说明

与本书配套的数字课程资源发布在高等教育出版社易课程网站，请登录网站后开始课程学习。

1. 访问 http://abook.hep.com.cn/1247501
2. 输入数字课程账号（见封底明码）、密码、验证码
3. 点击“进入课程”
4. 开始课程学习

账号自登录之日起一年内有效，过期作废。

使用本账号如有任何问题，请发邮件至：zhangshan@hep.com.cn

目　录

第一单元　极限与连续 …… 1
§1.1　函数 …… 1
一、集合 …… 1
二、区间与邻域 …… 3
三、函数概念 …… 5
四、函数的几种简单性态 …… 6
五、反函数 …… 7
六、复合函数 …… 7
七、初等函数 …… 8
*八、双曲函数及反双曲函数 …… 11
习题 1-1 …… 13
§1.2　极限概念 …… 14
一、数列的极限 …… 14
二、函数当 $x\to\infty$ 时的极限 …… 16
三、函数当 $x\to x_0$ 时的极限 …… 17
四、单侧极限 …… 18
五、无穷小 …… 18
六、无穷大 …… 19
习题 1-2 …… 20
§1.3　极限运算 …… 21
一、极限运算法则 …… 21
二、无穷小的比较 …… 22
三、极限存在准则　两个重要极限 …… 23
习题 1-3 …… 25
§1.4　函数的连续性 …… 26
一、函数的连续性 …… 26

二、函数的间断点 …… 27
三、初等函数的连续性 …… 28
四、闭区间上连续函数的性质 …… 28
习题 1-4 …… 30
第一单元综合练习题 …… 31
第一单元课堂讨论题 …… 33
第一单元课内实验 …… 34

第二单元 一元函数微分学 …… 45

§2.1 导数与微分概念 …… 45
一、速度与切线问题 …… 45
二、导数定义 …… 46
三、导数的实际意义 …… 48
四、可导性与连续性的关系 …… 49
五、微分概念 …… 49
习题 2-1 …… 51
§2.2 导数与微分运算 …… 53
一、四则求导法则 …… 53
二、反函数求导法则 …… 53
三、复合函数求导法则 …… 54
四、初等函数的导数 …… 55
五、微分运算 …… 56
习题 2-2 …… 57
§2.3 高阶导数与隐函数求导 …… 59
一、高阶导数 …… 59
二、隐函数的导数 …… 60
三、由参数方程所确定的函数的导数 …… 62
习题 2-3 …… 63
§2.4 微分中值定理 …… 64
一、中值定理 …… 65
二、洛必达法则 …… 68
*三、泰勒公式 …… 71
习题 2-4 …… 75

§2.5　函数性态研究 …… 77
一、函数的单调性 …… 77
二、函数的极值 …… 78
三、曲线的凹凸性与拐点 …… 80
习题 2-5 …… 82
§2.6　导数应用 …… 84
一、最值 …… 84
二、曲率 …… 85
三、微分在近似计算中的应用 …… 86
*四、方程的近似解求法 …… 86
*五、微分法在化工生产过程中的应用 …… 87
*六、微分法在经济学问题中的应用 …… 88
习题 2-6 …… 89
第二单元综合练习题 …… 90
第二单元课堂讨论题 …… 93
第二单元课内实验 …… 93
第三单元　一元函数积分学 …… 116
§3.1　定积分的概念与性质 …… 116
一、积分实例 …… 116
二、定积分的概念 …… 118
三、定积分的性质 …… 119
习题 3-1 …… 120
§3.2　不定积分概念及计算方法 …… 122
一、原函数与不定积分 …… 122
二、积分公式与积分性质 …… 124
三、凑微分法 …… 125
四、变量替换法 …… 128
五、分部积分法 …… 130
*六、特殊函数的积分 …… 133
习题 3-2 …… 137
§3.3　微积分基本定理 …… 141
一、积分上限函数 …… 141

二、牛顿-莱布尼茨公式 …… 141
三、定积分的积分方法 …… 143
习题 3-3 …… 147
§3.4 微元法与几何应用 …… 150
一、定积分的微元法 …… 150
二、平面图形的面积 …… 150
三、立体体积 …… 153
四、平面曲线的弧长 …… 155
*五、旋转体的侧面积 …… 157
习题 3-4 …… 158
§3.5 物理应用及反常积分 …… 159
一、变力作功 …… 159
二、水压力 …… 160
*三、引力 …… 161
*四、填料层高度的计算 …… 162
五、无穷区间上的反常积分 …… 162
六、无界函数的反常积分 …… 163
习题 3-5 …… 164
第三单元综合练习题 …… 166
第三单元课堂讨论题 …… 168
第三单元课内实验 …… 169

第四单元 向量代数与空间解析几何 …… 190

§4.1 向量代数 …… 190
一、向量概念 …… 190
二、向量的线性运算 …… 190
三、空间直角坐标系 …… 192
四、向量的坐标 …… 193
五、向量在轴上的投影 …… 194
六、数量积 …… 195
七、向量积 …… 196
*八、混合积 …… 197
习题 4-1 …… 197

§4.2　曲面与空间曲线 …… 198
一、曲面方程 …… 198
二、空间曲线方程 …… 200
习题 4-2 …… 202
§4.3　平面与空间直线 …… 203
一、平面方程 …… 203
二、空间直线方程 …… 205
三、直线与平面的位置关系 …… 207
习题 4-3 …… 209
第四单元综合练习题 …… 210
第四单元课堂讨论题 …… 212
第四单元课内实验 …… 213
附录Ⅰ　三角函数公式表 …… 230
附录Ⅱ　几种常用的平面曲线 …… 234
附录Ⅲ　常用积分公式 …… 235
习题答案 …… 246

第一单元　极限与连续

高等数学以变量为主要研究对象，探讨变量之间的基本数量关系和空间表现形式. 学习高等数学的目的是运用数学理论及其计算方法解决实际问题，并且形成逻辑思维和形象思维能力，以适应现代社会瞬息万变的知识需求. 变量之间的关系主要是用函数来表达的，函数的连续性、可微性、可积性是微积分学研究的主要内容，而极限则是引导出微分学和积分学基本概念的重要工具，高等数学的学习就从这里开始.

§1.1　函　　数

在高中阶段已经系统学习了集合、区间、函数等基本概念，要求对函数的对应关系、分段函数、函数的基本特性（有界性、单调性、奇偶性、周期性）、反函数、复合函数以及基本初等函数（幂函数、指数函数、对数函数、三角函数、反三角函数）的特征、初等函数形成的认识比较清晰. 为了以后使用方便起见，本节将对以上内容做一个整体复习.

一、集合

集合的概念

一般地，我们把研究对象统称为元素，把一些元素组成的总体叫做**集合**（简称**集**）. 集合具有**确定性**（给定集合的元素必须是确定的）和**互异性**（给定集合中的元素互不相同），例如“身材比较高的人”不能构成集合，因为它的元素不是确定的①.

① 在模糊集合中对这类问题有专门研究.

含有有限个元素的集合称为**有限集**；含有无限个元素的集合称为**无限集**.

通常用大写英文字母 $A,B,C,\cdots$ 表示集合，用小写英文字母 $a,b,c,\cdots$ 表示集合中的元素. 如果 a 是集合 A 中的元素，就说 a 属于 A，记作 $a\in A$；否则就说 a 不属于 A，记作 $a\notin A$.

（1）全体非负整数组成的集合叫做自然数集，记作 $\mathbf{N}$；

（2）所有正整数组成的集合叫做正整数集，记作 $\mathbf{N}_+$；

（3）全体整数组成的集合叫做整数集，记作 $\mathbf{Z}$；

（4）全体有理数组成的集合叫做有理数集，记作 $\mathbf{Q}$；

（5）全体实数组成的集合叫做实数集，记作 $\mathbf{R}$.

集合的表示方法

（1）列举法：把集合的元素一一列举出来，并用“{　}”括起来表示集合. 例如，方程 $x^2-1=0$ 的解集可表示为 $A=\{1,-1\}$；

（2）描述法：用集合所有元素的共同特征来表示集合. 例如，区间 $[a,b]$ 可表示为 $B=\{x\mid a\leqslant x\leqslant b\}$.

集合间的基本关系

（1）子集：一般地，对于两个集合 A,B，如果集合 A 中的任意一个元素都是集合 B 的元素，就说 A,B 有包含关系，称集合 A 为集合 B 的**子集**，记作 $A\subseteq B$（或 $B\supseteq A$）.

（2）相等：如果集合 A 是集合 B 的子集，且集合 B 是集合 A 的子集，此时集合 A 中的元素与集合 B 中的元素完全一样，称集合 A 与集合 B **相等**，也可叫做**等集**，记作 $A=B$.

（3）真子集：如果集合 A 是集合 B 的子集，但至少存在一个元素属于 B 且不属于 A，称集合 A 是集合 B 的**真子集**.

（4）空集：把不含任何元素的集合称为**空集**，记作 $\varnothing$. 规定空集是任何集合的子集.

（5）由上述集合之间的基本关系，可以得到下面的结论：

① 任何一个集合是它本身的子集，即 $A\subseteq A$；

② 对于集合 A,B,C，如果 A 是 B 的子集，B 是 C 的子集，则 A 是 C 的子集；

③ 子集包括“真子集”和“全集”.

集合的基本运算

(1) 并集:一般地,由所有属于集合 A **或**属于集合 B 的元素组成的集合称为 A 与 B 的**并集**,记作 $A\cup B$(在求并集时,它们的公共元素在并集中只能出现一次),即

$$A\cup B=\{x\mid x\in A\quad 或\ x\in B\}.$$

(2) 交集:一般地,由所有属于集合 A **且**属于集合 B 的元素组成的集合称为 A 与 B 的交集,记作 $A\cap B$,即

$$A\cap B=\{x\mid x\in A\quad 且\ x\in B\}.$$

(3) 差集:一般地,由所有属于集合 A 而不属于集合 B 的元素组成的集合称为 A 与 B 的**差集**,记作 $A-B$,即

$$A-B=\{x\mid x\in A\quad 且\ x\notin B\}.$$

(4) 全集:一般地,如果一个集合含有我们所研究问题中涉及的所有元素,那么就称这个集合为**全集**,通常记作 U.

(5) 补集:对于一个集合 A,由全集 U 中不属于集合 A 的所有元素组成的集合称为集合 A 相对于全集 U 的**补集**,简称为集合 A 的补集,记作 A^C,即

$$A^C=\{x\mid x\in U\quad 且\ x\notin A\}.$$

集合的并、交、补运算满足交换律、结合律、分配律、对偶律,这里不再赘述.

二、区间与邻域

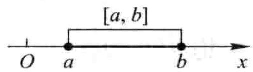
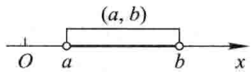
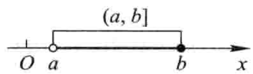
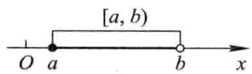
(1) 变量定义:在观察某一现象的过程中常常会遇到各种不同的量,其中有的量在过程中不变化,称之为**常量**;有的量在过程中是变化的,也就是可以取不同的数值,称之为**变量**①.

(2) 区间:如果变量的变化是连续的,则其变化范围可表示为区间. 在数轴上,**有限区间**是指介于某两点之间的线段上点的全体所构

① 在工程实践中还有一种量,虽然是变化的,但它的变化相对于所研究的对象是极其微小的,我们也把它看作常量.

成的集合. 见表1-1.

表 1-1

区间名称	满足的不等式	记号	在数轴上的表示
闭区间	$a \leqslant x \leqslant b$	$[a,b]$	
开区间	$a<x<b$	(a,b)	
半开区间	$a<x \leqslant b$	$(a,b]$	
半开区间	$a \leqslant x<b$	$[a,b)$	

无限区间:

$[a,+\infty)$表示不小于 a 的实数的全体,也可记为$\{x \mid x \geqslant a\}$;

$(-\infty,b)$表示小于 b 的实数的全体,也可记为$\{x \mid x<b\}$;

$(-\infty,+\infty)$表示全体实数 $\mathbf{R}$,其中$-\infty$ 和$+\infty$ 分别读作"负无穷大"和"正无穷大",它们不是数值,仅仅是记号而已.

(3) 邻域:设 a 与 δ 是两个实数,且 $\delta>0$,满足不等式$|x-a|<\delta$ 的实数 x 的全体称为点 a 的 **δ 邻域**,记作 $U(a,\delta)$,即

$$U(a,\delta)=\{x \mid a-\delta<x<a+\delta\}.$$

点 a 称为**邻域中心**,正数 δ 称为**邻域半径**.

将点 a 的 δ 邻域中心点 a 去掉,称为 a 的**去心 δ 邻域**,记作 $\mathring{U}(a,\delta)$,即

$$\mathring{U}(a,\delta)=\{x \mid 0<|x-a|<\delta\}=\{x \mid a-\delta<x<a+\delta, x \neq a\}.$$

如果不需要特别指出邻域半径 δ,也可将邻域记为 $U(a)$,将去心邻域记为$\mathring{U}(a)$.

开区间$(a-\delta,a)$称为点 a 的左 δ 邻域,开区间$(a,a+\delta)$称为点 a

的右 δ 邻域.

三、函数概念

(1) 函数定义:如果当变量 x 在其变化范围内任意取定一个数值时,变量 y 按照某种法则 f 总有唯一确定的数值与它对应,则称 y 是 x 的**函数**. 变量 x 的变化范围叫做函数的**定义域**,记作 $D(f)$,x 叫做**自变量**,y 叫做**函数值**或**因变量**,变量 y 的变化范围叫做函数的**值域**,记作 $f(D)$.

函数也可以用映射概念来定义:设数集 $D\subset\mathbf{R}$,称映射 $f:D\to\mathbf{R}$ 为定义在 D 上的函数.

注 为了表明 y 是 x 的函数,常用记号 $y=f(x)$,$y=F_2(x)$ 等来表示. 这里的字母 f,F_2 表示 y 与 x 之间的对应法则即函数关系,可以任意采用不同的字母及下标来表示.

(2) 函数相同:由函数定义可知,函数构成的要素为:定义域、对应关系和值域. 由于值域是由定义域和对应关系决定的,所以如果两个函数的定义域相同,对应关系也相同,就称这两个函数是相同的. 但是两个函数的表达方式可能有差异.

(3) 函数的表示方法:

① 解析法:用数学式子表示自变量和因变量之间对应关系的方法即是解析法.

例 1 $y=x^2$ 表示顶点在坐标原点,以 y 轴为对称轴,开口向上的抛物线.

② 表格法:将自变量值与对应函数值列成表格来表示函数关系的方法即是表格法.

例 2 在实际应用中经常用到的平方表、三角函数表等都是用表格法表示的函数.

③ 图示法:用坐标平面上的曲线来表示函数的两个变量之间对应关系的方法即是图示法. 一般地,用横坐标表示自变量,纵坐标表示因变量.

例 3 在直角坐标系中,半径为 R、圆心在原点的圆可用图示法

表示,如图 1-1 所示.

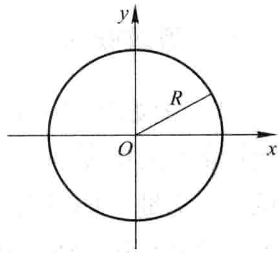


图 1-1

四、函数的几种简单性态

(1) 函数的有界性:如果对属于某一区间 I 的所有 x 值,总有 $|f(x)| \leqslant M$ 成立,其中 M 是一个与 x 无关的常数,则称 $f(x)$ 在区间 I **有界**;否则称 $f(x)$ 在区间 I **无界**.

注 一个函数,如果在其整个定义域内有界,则称为**有界函数**. 如函数 $\sin x$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内是有界的.

(2) 函数的单调性:如果函数 $f(x)$ 在区间 (a,b) 内随着 x 增大而增大,即对于 (a,b) 内任意两点 x_1 及 x_2,当 $x_1<x_2$ 时,恒有 $f(x_1) \leqslant f(x_2)$,则称函数 $f(x)$ 在区间 (a,b) 内是**单调增加**的;如果函数 $f(x)$ 在区间 (a,b) 内随着 x 增大而减小,即对于 (a,b) 内任意两点 x_1 及 x_2,当 $x_1<x_2$ 时,恒有 $f(x_1) \geqslant f(x_2)$,则称函数 $f(x)$ 在区间 (a,b) 内是**单调减小**的.

例 4 函数 $f(x)=x^2$ 在区间 $(-\infty,0)$ 内是单调减小的,在区间 $(0,+\infty)$ 内是单调增加的.

(3) 函数的奇偶性:如果函数 $f(x)$ 对于定义域内的任意 x,都满足 $f(-x)=f(x)$,则称 $f(x)$ 为**偶函数**;如果函数 $f(x)$ 对于定义域内的任意 x,都满足 $f(-x)=-f(x)$,则称 $f(x)$ 为**奇函数**.

注 偶函数的图形关于 y 轴对称,奇函数的图形关于坐标原点中心对称.

(4) 函数的周期性:对于函数 $f(x)$,若存在一个不为零的常数 l,使得关系式 $f(x+l)=f(x)$ 对于定义域内任何 x 值都成立,则称 $f(x)$ 为**周期函数**,l 是 $f(x)$ 的**周期**.

注 周期函数的周期通常是指最小正周期.

例 5 函数 $\sin x$ 是以 2π 为周期的周期函数;函数 $\tan x$ 是以 π 为周期的周期函数.

五、反函数

(1) 反函数定义：设有函数 $y=f(x)$，若变量 y 在函数的值域内任取一值 y_0 时，变量 x 在函数的定义域内有唯一确定的值 x_0 与之对应，即 $f(x_0)=y_0$，称为函数 $y=f(x)$ 的**反函数**，表示为 $x=\varphi(y)$ 或 $x=f^{-1}(y)$.

相对于反函数 $x=\varphi(y)$ 来说，原来的函数 $y=f(x)$ 称为直接函数.

注　由定义可知，函数 $y=f(x)$ 也是函数 $x=\varphi(y)$ 的反函数.

(2) 反函数存在定理：若 $y=f(x)$ 在 (a,b) 内单调增加（或单调减少），其值域为 $f(D)$，则它的反函数必然在 $f(D)$ 上确定，且单调增加（或单调减少）.

例 6　$y=x^2$ 的定义域为 $(-\infty,+\infty)$，值域为 $[0,+\infty)$，对于 y 取定的非负值，可求得 $x=\pm\sqrt{y}$，若我们不加条件，由 y 的值就不能唯一确定 x 的值，也就是在区间 $(-\infty,+\infty)$ 上，函数不是单调增加或单调减少的，故其没有反函数. 如果我们加上条件，要求 $x\geqslant 0$，则对 $y\geqslant 0$，$x=\sqrt{y}$ 就是 $y=x^2$ 在要求 $x\geqslant 0$ 时的反函数，即函数在此要求下单调增加.

(3) 反函数性质：在同一坐标平面内，直接函数 $y=f(x)$ 与其反函数 $x=\varphi(y)$ 的图形关于直线 $y=x$ 对称.

例 7　函数 $y=2^x$ 与函数 $y=\log_2 x$ 互为反函数，它们的图形关于直线 $y=x$ 对称，如图 1-2 所示.

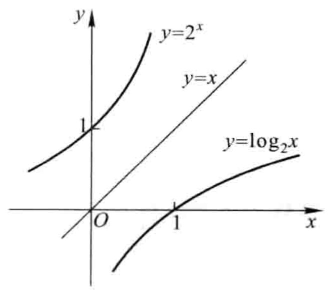


图 1-2

六、复合函数

复合函数定义：若 y 是 u 的函数 $y=f(u)$，而 u 又是 x 的函数 $u=\varphi(x)$，且 $\varphi(x)$ 的函数值落在 $f(u)$ 的定义域内，则 y 通过 u 的联系也成为 x 的函数，称之为由函数 $y=f(u)$ 及 $u=\varphi(x)$ 复合而成的函数，简称**复合函数**，记作 $y=f[\varphi(x)]$.

其中 u 称为**中间变量**，它既是 $y=f(u)$ 的自变量，又是 $u=\varphi(x)$ 的