普通高等教育农业部“十二五”规划教材
全国高等农林院校“十二五”规划教材

X

线性代数
学习指导

XIANXINGDAISHU XUEXI ZHIDAO

冯大光 李丽锋◎主编

中国农业出版社

普通高等教育农业部“十二五”规划教材
全国高等农林院校“十二五”规划教材

线性代数学习指导

冯大光　李丽锋　主编

中国农业出版社

图书在版编目（CIP）数据

线性代数学习指导 / 冯大光，李丽锋主编 . —北京
：中国农业出版社，2013. 2
普通高等教育农业部“十二五”规划教材　全国高等
农林院校“十二五”规划教材
ISBN 978-7-109-17412-2

Ⅰ. ①线…　Ⅱ. ①冯…　②李…　Ⅲ. ①线性代数-高
等学校-教学参考资料　Ⅳ. ①O151. 2

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2013）第 017543 号

中国农业出版社出版
（北京市朝阳区农展馆北路 2 号）
（邮政编码 100125）
策划编辑　朱　雷　魏明龙
文字编辑　魏明龙

北京通州皇家印刷厂印刷　　新华书店北京发行所发行
2004 年 1 月第 1 版　　2013 年 2 月第 2 版
2013 年 2 月第 2 版北京第 1 次印刷

开本：720mm×960mm　1/16　　印张：15
字数：266 千字
定价：24.00 元

编写人员

主　编　冯大光　李丽锋

副主编　董建国　关　驰

参　编　郭志鹏　郭金亭

主　审　惠淑荣

前　言

线性代数是数学的一个极具特色的分支，它研究内容别开生面，研究方法别具一格，解题技巧多种多样，它的学习也给很多初学者带来了很大的困难．通过做习题，可以帮助和引导学生正确理解线性代数这门课程的知识点，准确掌握理论，熟练解题方法，可以说，习题是引导学生走向研究领域的重要桥梁．为此，我们在多年教学实践的基础上，编写了《线性代数学习指导》，以引导和帮助初学者能够更好地理解线性代数的知识点，更好的掌握解题方法，为将来的应用打下坚实的基础．

本书共分为六章，每章分为基本要求、内容精要、典型例题解析、自测题、习题解答等五部分．基本要求对每章的知识点的掌握程度提出了要求；内容精要对每章的知识点进行了详尽细致的归纳，帮助学生正确理解本章的理论知识，便于学生学习和记忆；典型例题解析选择了与本章知识点相关的典型例题进行详细的分析和解答，以使学生能够掌握本章的经典解题方法；自测题部分精选了大量的典型习题，能够检验学生对本章知识点的理解和掌握程度；习题解答部分配合了《线性代数(第二版)》(鲁春铭、丰雪主编)一书，对书中的习题做了全面细致的解答．

本书是《线性代数(第二版)》(鲁春铭、丰雪主编)的配套辅导书，也可以独立使用，不仅适用于广大的教师和初学者，对准备考研的学生和科技工作者也有一定的使用价值．

本书由沈阳农业大学惠淑荣教授主审，编写中得到了编者所在

院校的大力支持，在此一并表示诚挚的谢意．

由于编者水平有限，书中不妥之处，恳请各位同仁和读者批评指正．

编　者

2012 年 7 月

目 录

第一章　n 阶行列式

一、基本要求

1. 了解行列式的概念，掌握行列式的性质．
2. 会应用行列式的性质和行列式按行(列)展开定理计算行列式．
3. 会用克莱姆(Cramer)法则解线性方程组．

二、内容精要

(一)排列和逆序

1. n 级排列

由 n 个数 1，2，…，n 组成的一个有序数组 i_1，i_2，…，i_n 称为一个 n 级排列，n 级排列的总数为 $n!$ 个．

2. 逆序及逆序数

在一个排列 $i_1\cdots i_j\cdots i_k\cdots i_n$ 中，若 $i_j>i_k$，则称这一对数 i_ji_k 构成一个逆序，一个排列中逆序的总数称为此排列的逆序数，记作 $\tau(i_1i_2\cdots i_n)$，若 τ 为奇数，则称 $i_1i_2\cdots i_n$ 为奇排列；若 τ 为偶数，则称此排列为偶排列．

3. 对换

在排列 $i_1\cdots i_j\cdots i_k\cdots i_n$ 中，交换任意两个数 i_j 和 i_k 的位置，称为一次对换，对换改变排列的奇偶性，任何一个排列都可经过若干次对换变成自然顺序，并且所做对换的次数与这个排列有相同的奇偶性．

在所有的 n 级排列中，奇排列个数＝偶排列个数＝$\frac{n!}{2}$.

(二)n 阶行列式的定义

由 n^2 个元素 a_{ij}(i，$j=1$，2，…，n)组成的记号

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

称为 n 阶行列式．其值是所有取自不同行不同列的 n 个元素的乘积 $a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots$

a_{nj_n} 的代数和，各项的符号由 n 级排列 $j_1j_2\cdots j_n$ 决定，当 $j_1j_2\cdots j_n$ 为偶排列时，对应项取正号，当 $j_1j_2\cdots j_n$ 为奇排列时，对应项取负号，即

$$D=\sum_{j_1j_2\cdots j_n}(-1)^{\tau}a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n},$$

其中 $\sum\limits_{j_1j_2\cdots j_n}$ 表示对所有 n 级排列求和，τ 为排列 $j_1j_2\cdots j_n$ 的逆序数.

注：（1）n 阶行列式 $D=|a_{ij}|$ 的每一项可以写成 $(-1)^{\tau_1+\tau_2}a_{i_1j_1}a_{i_2j_2}\cdots a_{i_nj_n}$，其中 τ_1 和 τ_2 分别是 n 级排列 $i_1i_2\cdots i_n$ 和 $j_1j_2\cdots j_n$ 的逆序数.

（2）n 阶行列式的每一项 $a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$ 为取自不同行不同列的 n 个元素.

(三)行列式的基本性质

性质 1 行列式的行变成相应的列（行列式转置），行列式的值不变，即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

性质 2 行列式的两行（或列）互换，行列式改变符号.

推论 如果行列式有两行（或列）完全相同，则行列式的值等于零.

性质 3 数乘行列式等于用这个数乘该行列式中任意一行（或列），即

$$k\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ ka_{i1} & ka_{i2} & \cdots & ka_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

推论 若行列式中有一行（或列）元素全为零，则该行列式为零.

性质 4 行列式若有两行（或列）元素对应成比例，则该行列式等于零.

性质 5 如果行列式的某一行（或列）的所有元素都可表示为两项之和，则该行列式等于两个行列式的和，这两个行列式的此行（或列）的元素分别为对应的两个加数之一，其余各行（或列）的元素与原行列式相同，即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1}+b_{i1} & a_{i2}+b_{i2} & \cdots & a_{in}+b_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{i1} & b_{i2} & \cdots & b_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

性质 6　将行列式某行(或列)的 k 倍加到另一行(或列)上，其值不变．

(四)行列式按行(或列)展开定理

设
$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

则有
$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}A_{kj} = a_{i1}A_{k1}+a_{i2}A_{k2}+\cdots+a_{in}A_{kn}=\begin{cases} D, & i=k, \\ 0, & i\neq k; \end{cases}$$
$$\sum_{i=1}^{n} a_{ij}A_{ik} = a_{1j}A_{1k}+a_{2j}A_{2k}+\cdots+a_{nj}A_{nk}=\begin{cases} D, & j=k, \\ 0, & j\neq k. \end{cases}$$

这里 A_{ij} 为 a_{ij} 的代数余子式，$A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}$，M_{ij} 是将 n 阶行列式中元素 a_{ij} 所在的第 i 行和第 j 列的元素划掉，剩余的元素按原位置次序所构成的 $n-1$阶行列式．

(五)克莱姆(Cramer)法则

方程组
$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+a_{nn}x_n=b_n \end{cases}$$
称为 n 元非齐次线性方程组，当其系数行列式
$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}\neq 0$$
时，此方程组有唯一解，且可表示为
$$x_1=\frac{D_1}{D},\ x_2=\frac{D_2}{D},\ \cdots,\ x_n=\frac{D_n}{D},$$
其中 $D_j(j=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$是将行列式 D 中的第 j 列元素换成常数 b_1，b_2，$\cdots$，b_n，其余元素不变而得到的行列式的值．

当 $b_1=b_2=\cdots=b_n=0$ 时，对应方程组称为 n 元齐次线性方程组．

注：(1) 克莱姆法则只适用于方程的个数与未知数的个数相等的线性方程组．

(2) 对于 n 元非齐次线性方程组，当系数行列式 $D\neq 0$ 时有唯一解，当系数行列式 $D=0$ 时克莱姆法则失效，方程组可能有解也可能无解.

(3) 对于 n 元齐次线性方程组，当系数行列式 $D\neq 0$ 时有唯一零解，当系数行列式 $D=0$ 时，齐次线性方程组有非零解(无穷多解).

三、典型例题解析

例 1 计算

$$D=\begin{vmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \cdots & 2 & 0 & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ 2012 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 2013 \end{vmatrix}.$$

解 D 中第 1 行的非零元素只有 $a_{1,2012}$，因而 j_1 只能取 2 012，同理由第 2，3，…，2013 行知，$j_2=2011$，$j_3=2010$，…，$j_{2012}=1$，$j_{2013}=2013$，组成一个 2 013 级排列

$$2012，2011，\cdots，2，1，2013，$$

此排列的逆序数为 $1+2+\cdots+2011$，由于 D 中非零项只有一项，即

$$D=(-1)^{1+2+\cdots+2011}1\times 2\times\cdots\times 2012\times 2013=2013!$$

例 2 计算下列行列式：

(1) $D=\begin{vmatrix} 103 & 100 & 204 \\ 199 & 200 & 395 \\ 301 & 300 & 600 \end{vmatrix}$； (2) $D=\begin{vmatrix} 2 & 4 & 4 & -3 \\ 1 & -6 & -2 & 1 \\ -3 & 5 & 2 & 0 \\ 4 & -12 & 0 & 3 \end{vmatrix}$.

解 (1) 注意到该行列式第 1 列、第 3 列与第 2 列的整数倍接近，把第 2 列的(-1)倍加到第 1 列，把第 2 列的(-2)倍加到第 3 列，即可化简得

$$D\xlongequal[c_3-2c_2]{c_1-c_2}\begin{vmatrix} 3 & 100 & 4 \\ -1 & 200 & -5 \\ 1 & 300 & 0 \end{vmatrix}\xlongequal{c_2\div 100}100\begin{vmatrix} 3 & 1 & 4 \\ -1 & 2 & -5 \\ 1 & 3 & 0 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{c_2-3c_1}100\begin{vmatrix} 3 & -8 & 4 \\ -1 & 5 & -5 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}\xlongequal{\text{按第 3 行展开}}100\begin{vmatrix} -8 & 4 \\ 5 & -5 \end{vmatrix}$$

$$=2000.$$

(2) 注意到该行列式的第 4 列含有 0 元素，且 $a_{24}=1$，所以，可用行列式的性质把第 4 列的元素 a_{14}，a_{44} 化为 0，再按第 4 列展开

$$D=\begin{vmatrix}2&4&4&-3\\1&-6&-2&1\\-3&5&2&0\\4&-12&0&3\end{vmatrix}\xlongequal[r_4-3r_2]{r_1+3r_2}\begin{vmatrix}5&-14&-2&0\\1&-6&-2&1\\-3&5&2&0\\1&6&6&0\end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{\text{按第 4 列展开}}(-1)^{2+4}\begin{vmatrix}5&-14&-2\\-3&5&2\\1&6&6\end{vmatrix}\xlongequal[r_3+3r_1]{r_2+r_1}\begin{vmatrix}5&-14&-2\\2&-9&0\\16&-36&0\end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{\text{按第 3 列展开}}(-2)\cdot(-1)^{1+3}\begin{vmatrix}2&-9\\16&-36\end{vmatrix}=-144.$$

注： 一般数字行列式的计算都是采用把某行(或列)元素中除去某一元素外的其他元素，用行列式的性质都化为零，再使用按行(或列)展开的性质，降低行列式的阶数进行计算，通常这样的行(或列)都选取含 0 元素较多的行(或列).

例 3　设

$$D=\begin{vmatrix}1&5&7&8\\1&1&1&1\\2&0&3&6\\1&2&3&4\end{vmatrix},$$

求 $A_{41}+A_{42}+A_{43}+A_{44}$，其中 A_{4j} 为元素 $a_{4j}(j=1,2,3,4)$ 的代数余子式.

解　根据行列式按一行(或一列)的展开公式，有

$$A_{41}+A_{42}+A_{43}+A_{44}=1\cdot A_{41}+1\cdot A_{42}+1\cdot A_{43}+1\cdot A_{44}$$

$$=\begin{vmatrix}1&5&7&8\\1&1&1&1\\2&0&3&6\\1&1&1&1\end{vmatrix}=0\text{(两行元素相同)}.$$

注： 此题若直接计算四个代数余子式，则计算较繁琐且易出现差错，所以在进行行列式的计算时，优先考虑利用行列式的性质，可以有效地简化运算过程.

例 4　计算 n 阶行列式

$$D_n=\begin{vmatrix}a&b&b&\cdots&b\\b&a&b&\cdots&b\\b&b&a&\cdots&b\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots\\b&b&b&\cdots&a\end{vmatrix}.$$

解　考虑到所有列(或行)相加后每个元素均等于 $a+(n-1)b$，于是，将其他所有列加到第 1 列，然后提出公因子 $a+(n-1)b$，则

$$D_n=\begin{vmatrix} a+(n-1)b & b & b & \cdots & b \\ a+(n-1)b & a & b & \cdots & b \\ a+(n-1)b & b & a & \cdots & b \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a+(n-1)b & b & b & \cdots & a \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{c_1\div[a+(n-1)b]}[a+(n-1)b]\begin{vmatrix} 1 & b & b & \cdots & b \\ 1 & a & b & \cdots & b \\ 1 & b & a & \cdots & b \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & b & b & \cdots & a \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{r_2-r_1,\ \cdots,\ r_n-r_1}[a+(n-1)b]\begin{vmatrix} 1 & b & b & \cdots & b \\ 0 & a-b & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & a-b & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a-b \end{vmatrix}$$

$$=[a+(n-1)b](a-b)^{n-1}.$$

注：该行列式的特征是：所有行(或列)对应元素相加后相等，这时可把其他所有行(或列)加到第 1 行(或第 1 列)，提取公因子后再化简计算.

例 5 计算行列式

$$D_{n+1}=\begin{vmatrix} a_0 & b_1 & b_2 & \cdots & b_{n-1} & b_n \\ c_1 & a_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ c_2 & 0 & a_2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ c_{n-1} & 0 & 0 & \cdots & a_{n-1} & 0 \\ c_n & 0 & 0 & \cdots & 0 & a_n \end{vmatrix}，其中\ a_1a_2\cdots a_n\neq 0.$$

解 化三角形行列法，把第 $i+1(i=1, 2, \cdots, n-1)$列的$-\frac{c_i}{a_i}$倍加到第 1 列，得

$$D_{n+1}=\begin{vmatrix} a_0-\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{b_ic_i}{a_i} & b_1 & b_2 & \cdots & b_{n-1} & b_n \\ 0 & a_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & a_n \end{vmatrix}$$

$$= a_1a_2\cdots a_n\left(a_0 - \sum_{i=1}^{n}\frac{b_ic_i}{a_i}\right).$$

注：该行列式的特征是"三线型"行列式．"三线型"行列式是指除某一行、某一列和对角线或次对角线不为零外，其余元素均为零的行列式，主要求解方法有化三角形行列式法、降阶法以及数学归纳法．

例 6　计算 n 阶行列式

$$D_n=\begin{vmatrix} x_1 & a & a & \cdots & a & a \\ b & x_2 & a & \cdots & a & a \\ b & b & x_3 & \cdots & a & a \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ b & b & b & \cdots & x_{n-1} & a \\ b & b & b & \cdots & b & x_n \end{vmatrix}.$$

解　把 x_n 改写为 $x_n=(x_n-a)+a$，利用行列式的加法性质把 D_n 拆分成

$$D_n=\begin{vmatrix} x_1 & a & a & \cdots & a & 0 \\ b & x_2 & a & \cdots & a & 0 \\ b & b & x_3 & \cdots & a & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ b & b & b & \cdots & x_{n-1} & 0 \\ b & b & b & \cdots & b & x_n-a \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} x_1 & a & a & \cdots & a & a \\ b & x_2 & a & \cdots & a & a \\ b & b & x_3 & \cdots & a & a \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ b & b & b & \cdots & x_{n-1} & a \\ b & b & b & \cdots & b & a \end{vmatrix}.$$

把第二个行列式的第 i 行的(-1)倍加到第 $i-1$ 行$(i=2, 3, \cdots, n)$上，则有

$$D_n=(x_n-a)D_{n-1}+\begin{vmatrix} x_1-b & a-x_2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & x_2-b & a-x_3 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x_3-b & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x_{n-1}-b & 0 \\ b & b & b & \cdots & b & a \end{vmatrix}\text{（按最后一列展开）}$$

$$=(x_n-a)D_{n-1}+a\prod_{j=1}^{n-1}(x_j-b),$$

即
$$D_n=(x_n-a)D_{n-1}+a\prod_{j=1}^{n-1}(x_j-b). \tag{1}$$

由 a，b 的对称性，可得

$$D_n=(x_n-b)D_{n-1}+b\prod_{j=1}^{n-1}(x_j-a). \tag{2}$$

当 $a\neq b$ 时，由(1)式、(2)式消去 D_{n-1}，得

$$D_n=\frac{a\prod_{j=1}^{n}(x_j-b)-b\prod_{j=1}^{n}(x_j-a)}{a-b}.$$

当 $a=b$ 时，由(1)式得递推公式

$$\begin{aligned}
D_n&=(x_n-a)D_{n-1}+a\prod_{j=1}^{n-1}(x_j-a)\\
&=(x_n-a)\left[(x_{n-1}-a)D_{n-2}+a\prod_{j=1}^{n-2}(x_j-a)\right]+a\prod_{j=1}^{n-1}(x_j-a)\\
&=(x_n-a)(x_{n-1}-a)D_{n-2}+a(x_n-a)\prod_{j=1}^{n-2}(x_j-a)+a\prod_{j=1}^{n-1}(x_j-a)\\
&=(x_n-a)(x_{n-1}-a)\left[(x_{n-2}-a)D_{n-3}+a\prod_{j=1}^{n-3}(x_j-a)\right]+\\
&\quad a(x_n-a)\prod_{j=1}^{n-2}(x_j-a)+a\prod_{j=1}^{n-1}(x_j-a)\\
&=(x_n-a)(x_{n-1}-a)(x_{n-2}-a)D_{n-3}+a(x_n-a)(x_{n-1}-a)\prod_{j=1}^{n-3}(x_j-a)+\\
&\quad a(x_n-a)\prod_{j=1}^{n-2}(x_j-a)+a\prod_{j=1}^{n-1}(x_j-a)\\
&\quad\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&=(x_n-a)(x_{n-1}-a)\cdots(x_1-a)+a\prod_{j=2}^{n}(x_j-a)+a(x_1-a)\prod_{j=3}^{n}(x_j-\\
&\quad a)+\cdots+a(x_n-a)\prod_{j=1}^{n-2}(x_j-a)+a\prod_{j=1}^{n-1}(x_j-a)\\
&=\prod_{j=1}^{n}(x_j-a)+a\sum_{i=1}^{n}\prod_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n}(x_i-a).
\end{aligned}$$

注：该行列式的特征是：除对角线元素以外，上三角各元素相等，下三角各元素也相等，这类题一般用拆分法或数学归纳法求解.

例 7 计算 n 阶行列式

$$D_n=\begin{vmatrix}0&0&\cdots&0&a&b\\0&0&\cdots&a&b&0\\\vdots&\vdots&&\vdots&\vdots&\vdots\\a&b&\cdots&0&0&0\\b&0&\cdots&0&0&a\end{vmatrix}.$$

解 第1行、第1列均只有两个非零元素，不妨按第1行展开，得

$$D_n=(-1)^n a\begin{vmatrix}0&0&\cdots&0&a&0\\0&0&\cdots&a&b&0\\\vdots&\vdots&&\vdots&\vdots&\vdots\\a&b&\cdots&0&0&0\\b&0&\cdots&0&0&a\end{vmatrix}+(-1)^{n+1}b\begin{vmatrix}0&0&\cdots&a&b\\0&0&\cdots&b&0\\\vdots&\vdots&&\vdots&\vdots\\a&b&\cdots&0&0\\b&0&\cdots&0&0\end{vmatrix}$$

$$=(-1)^n a^2\begin{vmatrix}0&0&\cdots&0&a\\0&0&\cdots&a&b\\\vdots&\vdots&&\vdots&\vdots\\0&a&\cdots&0&0\\a&b&\cdots&0&0\end{vmatrix}+(-1)^{n+1}b\cdot(-1)^{\frac{(n-1)(n-2)}{2}}\cdot b^{n-1}$$

$$=(-1)^n a^2\cdot(-1)^{\frac{(n-2)(n-3)}{2}}a^{n-2}+(-1)^{n+1}\cdot(-1)^{\frac{(n-1)(n-2)}{2}}\cdot b^n$$

$$=(-1)^{\frac{(n-1)(n-2)}{2}}\cdot a^n+(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}\cdot b^n$$

注：该行列式的特征是：所求行列式某一行(或列)至多有两个非零元素，一般按此行(或列)展开即可求解.

例 8　计算 n 阶行列式

$$D_n=\begin{vmatrix}x&-1&0&\cdots&0&0\\0&x&-1&\cdots&0&0\\0&0&x&\cdots&0&0\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots&\vdots\\0&0&0&\cdots&x&-1\\a_n&a_{n-1}&a_{n-2}&\cdots&a_2&a_1\end{vmatrix}.$$

解　按第 1 列展开，

$$D_n=xD_{n-1}+(-1)^{n+1}a_n\begin{vmatrix}-1&0&\cdots&0&0\\x&-1&\cdots&0&0\\\vdots&\vdots&&\vdots&\vdots\\0&0&\cdots&-1&0\\0&0&\cdots&x&-1\end{vmatrix}=xD_{n-1}+a_n,$$

由此递推，得

$$\begin{aligned}D_n&=a_n+xD_{n-1}\\&=a_n+x(a_{n-1}+xD_{n-2})\\&=a_n+xa_{n-1}+x^2D_{n-2}\\&\cdots\cdots\\&=a_n+a_{n-1}x+a_{n-2}x^2+\cdots+x^{n-1}D_1\\&=a_n+a_{n-1}x+a_{n-2}x^2+\cdots+a_1x^{n-1}.\end{aligned}$$