全国高职高专教育规划教材

高等数学

■ 主编 王秀焕 谢艳云 陈志伟

高等教育出版社
HIGHER EDUCATION PRESS

全国高职高专教育规划教材

高等数学

Gaodeng Shuxue

主　编　王秀焕　谢艳云　陈志伟
副主编　范正权　王于琴　桑宗曦

高等教育出版社·北京
HIGHER EDUCATION PRESS　BEIJING

内容提要

本书是全国高职高专教育规划教材。全书围绕“高等数学”课程为专业课服务的目的，本着“必需，够用，适度”的原则，结合生活、专业课学习及社会生产中的实例，全面提高学生的数学素养和综合解题的能力。

本书内容包括函数与极限、导数与微分、导数的应用、不定积分、定积分及其应用、无穷级数、概率论初步、矩阵及其应用等内容，在每一章中均编有“开篇案例”和“本章知识概要”，其中“开篇案例”通过一个生活中的具体实例提出问题，引起学生的思考，然后给出案例分析，引出所学内容，激发学生学习兴趣；“本章知识概要”以纲要的形式给出每章的重点内容，并指出注意事项，帮助学生课后的理解和消化。

全书内容比较全面，语言叙述简练、通俗，例题示范量比较大。本书可作为高职高专院校数学通用教材，也可供其他科技人员参考。

图书在版编目(CIP)数据

高等数学/王秀焕，谢艳云，陈志伟主编. --北京：高等教育出版社，2013.7
ISBN 978-7-04-037707-1

Ⅰ.①高… Ⅱ.①王…②谢…③陈… Ⅲ.①高等数学-高等职业教育-教材 Ⅳ.①O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2013)第 133369 号

策划编辑	王玲玲	责任编辑	王玲玲	封面设计	张雨薇	版式设计	童 丹
插图绘制	宗小梅	责任校对	李大鹏	责任印制	韩 刚		

出版发行	高等教育出版社	咨询电话	400-810-0598
社 址	北京市西城区德外大街4号	网 址	http://www.hep.edu.cn
邮政编码	100120		http://www.hep.com.cn
印 刷	保定市中画美凯印刷有限公司	网上订购	http://www.landraco.com
开 本	787mm×1092mm 1/16		http://www.landraco.com.cn
印 张	13.25	版 次	2013年7月第1版
字 数	320千字	印 次	2013年7月第1次印刷
购书热线	010-58581118	定 价	23.00元

物 料 号 37707-00

前言

“高等数学”课程是高职高专院校理工科专业必修的一门公共基础课.它对培养学生的逻辑思维能力,空间想象能力以及创造性分析问题和解决问题的能力,都有着重要的作用.

本书围绕“高等数学”课程为专业课服务的目的,本着“必需,够用,适度”的原则,结合生活、专业课学习及社会生产中的实例,全面提高学生的数学素养和综合解题的能力.

本书具有以下特点:

1. 每一章均有一个“开篇案例”,通过一个生活中的具体实例提出问题,引起学生的思考,然后给出案例分析,引出将要学习的内容,激发学生的学习兴趣;

2. 每一章都标示有“学习导航”,包括“学习目标”、“教学重点”、“教学难点”,作为学生学习的引导,使学生的学习更具有目的性;

3. 以“必需、够用、适度”为原则,淡化理论学习,强化应用,降低“高等数学”课程的学习难度;

4. 例题的编制按照循序渐进的原则,符合学生认知的实际,并引入专业学习中的实际问题,培养学生分析问题和解决问题的能力;

5. 每一章结束,均给出“本章知识概要”,以纲要的形式给出每章的重点内容,并指出注意事项,帮助学生课后的理解和消化;

6. 每章篇后都有一篇知识阅读,可以增加学生的知识面.

本书由重庆机电职业技术学院、重庆水利电力职业技术学院、重庆电讯职业学院、重庆交通职业技术学院共同编写,王秀焕、谢艳云、陈志伟担任主编,范正权、王于琴、桑宗曦担任副主编,游斌、陈丹丹参与编写.具体分工如下:王秀焕编写第1、3章;谢艳云编写第4章、第5章第1—6节;陈志伟编写第6、7章;范正权编写第8章第3—4节;王于琴编写第2章第1—4节;桑宗曦编写第8章第1—2节;游斌编写第2章第4—5节;陈丹丹编写第5章第7节.本书框架结构安排、定稿由重庆机电职业技术学院王秀焕承担.

由于作者水平有限,完成时间比较仓促,本书难免有不足之处,敬请读者批评指正.

编　者

2013年4月

目录

第1章　函数与极限

第2章　导数与微分

第3章　导数的应用

第4章 不定积分

第5章 定积分及其应用

第6章 无穷级数

第7章 概率论初步

第8章　矩阵及其应用

第1章 函数与极限

【开篇案例】

龟兔赛跑新传

龟兔赛跑的故事想必大家都听过,结局是兔子输给了乌龟.话说兔子为了挽回自己的颜面,又约乌龟赛跑.兔子对乌龟说:“上次我因为睡觉输给了你,这次我同样先让你跑一半的路程,但这次我不会再睡觉了.”乌龟慢吞吞地说:“你还是追不上我的.”于是认真给兔子分析:“当我跑到一半的路程时,你开始跑,你跑的同时,我也在跑,当你跑到路程的一半时,我又跑了一段路程,你没有追上我;你又继续追我,但同时我也在继续跑啊,你跑完咱俩之间距离的一半,我又跑了一段距离,你又没有追上我,咱俩之间总有一定的距离;这样继续下去,我跑到终点,你我之间的距离还不是零,你还是追不上我.”

同学们,乌龟根据什么原理得出了这样的结论呢?

“极限”是本章学习的一个重点内容,“什么是极限?怎样求极限”是本章学习后必须要掌握的内容.上述案例中,“兔子追不上乌龟”的过程就是一个典型的极限问题.随着时间的增加,兔子和乌龟之间的距离越来越短,向零趋近.也就是说“兔子追不上乌龟”的过程即随着时间的不断增加,兔子和乌龟之间距离的极限为零.

【学习导航】

学习目标

1. 了解函数概念,熟练掌握基本初等函数的性质及其图形,会建立简单实际问题的函数关系.

2. 理解数列及函数极限的定义.

3. 熟练掌握复合函数的复合过程及求极限的方法.

4. 会比较无穷小量,判断函数的连续性.

教学重点:函数极限的计算及连续性的判断.

教学难点:分析复合函数结构;两个重要极限.

§1.1　函　数

1.1.1　函数的概念

1．函数的定义

定义1　设 D 是一个数集，如果对属于 D 中的任意 x，按照对应法则 f，都有唯一确定的实数 y 与之相对应，那么称 y 为 x 的函数，记作 $y=f(x)$．其中 x 称为**自变量**，y 称为**因变量**，数集 D 称为函数的定义域．

2．函数的两要素

函数的定义域和对应法则．

例1　求下列函数的定义域：

(1) $f(x)=\dfrac{\sqrt{x-2}}{x-4}$；　　(2) $f(x)=\begin{cases}3x, x\leqslant 0,\\ x^2, x>0.\end{cases}$

解　(1) 若使函数有意义，则必须满足 $x-2\geqslant 0$ 且 $x\neq 4$，故函数的定义域为 $[2,4)\cup(4,+\infty)$．

(2) 该函数是分段函数，分段函数的定义域是各段函数定义域的并集，故函数的定义域为全体实数 $\mathbf{R}$．

注意：常见的定义域约束条件：

a. 分母不能为零；

b. 根号开偶次方根，例如，$y=\sqrt{f(x)}$，$f(x)\geqslant 0$；根号开奇次方根，例如，$\sqrt[3]{f(x)}$，$f(x)\in\mathbf{R}$；

c. 对数函数的真数必须大于零；

d. 分段函数的定义域为各段函数定义域的并集；

e. 若函数式是上述的混合式，则应取各部分定义域的交集．

例2　已知函数 $f(x)=3x^2+2x-4$，则对应法则 f 是什么？

解　对应法则为

$$f(\quad)=3(\quad)^2+2(\quad)-4.$$

如果两个函数的定义域相同，对应法则也相同，那么称这**两个函数相同**．

例3　判断下列函数是否相同？

(1) $y=x$ 与 $y=\sqrt{x^2}$；　(2) $y=\ln x^2$ 与 $y=2\ln x$；　(3) $y=4x$ 与 $y=4u$．

解　(1) 不相同，因为对应法则不同．(2) 不相同，因为定义域不同．(3) 相同．

3．函数的表示法

函数的表示法就是用来确定函数的对应法则的方法．函数的表示方法有如下三种：

解析法　用数学式子表示函数的方法叫解析法．解析法的优点在于便于理论的分析与研究．

表格法　它是将自变量的值与对应的函数值列为表格，如三角函数表、对数表等，列表法的优点是所求的函数值容易查得．

图像法 以图形表示函数的方法叫图像法,这种方法在工程技术上应用很普遍,优点是直观形象.

1.1.2 函数的特性

1. 有界性

设函数 $f(x)$ 在数集 D 上有定义,若存在正数 M,使对一切 $x\in D$ 有

$$|f(x)|\leqslant M,$$

则称 $f(x)$ 在 D 上**有界**. 如果这样的 M 不存在,那么称 $f(x)$ 在 D 上**无界**,即对任给的正数 M,总存在 $x_1\in D$,使 $|f(x_1)|>M$.

函数的有界性与数集 D 有关,例如,$f(x)=\dfrac{1}{x}$ 在 $[2,+\infty)$ 上有界,上边界为 $\dfrac{1}{2}$,下边界为 0.

一个函数如果在其定义域上有界,那么称它为**有界函数**. 有界函数的图形必位于两条直线 $y=M$ 与 $y=-M$ 之间. 例如,$y=\sin x$ 是有界函数,因为在它的定义域 $(-\infty,+\infty)$ 内,$|\sin x|\leqslant 1$. 又从图 1-1 不难看出,函数 $y=x^3$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内无界;函数 $y=x^2$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内仅有下界. 因此说它们都是**无界函数**.

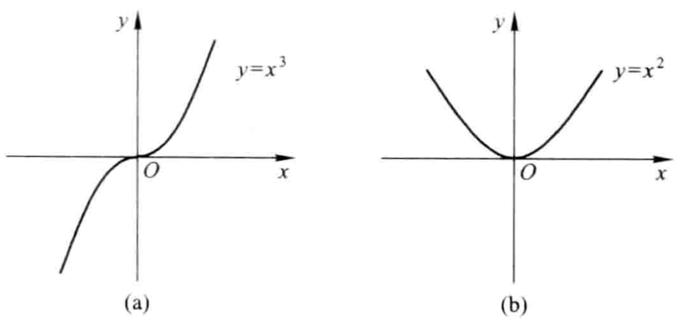

图 1-1

2. 单调性

设函数 $f(x)$ 在数集 D 上有定义,如果对 D 中任意两个数 x_1,x_2,当 $x_1<x_2$ 时,总有

$$f(x_1)\leqslant f(x_2)\quad (\text{或 } f(x_1)\geqslant f(x_2)).$$

那么称 $f(x)$ 在数集 D 上**单调增加(或单调减少),简称单增(或单减)**. 如果当 $x_1<x_2$ 时,总有

$$f(x_1)<f(x_2)\quad (\text{或 } f(x_1)>f(x_2))$$

那么称 $f(x)$ 在数集 D 上**严格单增(或严格单减)**.

单增和单减的函数统称为**单调函数**,严格单增和严格单减的函数统称为**严格单调函数**.

例如,函数 $f(x)=x^3$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内是严格单增的,因为对任意 $x_1,x_2\in\mathbf{R}$,有

$$f(x_1)-f(x_2)=x_1^3-x_2^3=(x_1-x_2)(x_1^2+x_1x_2+x_2^2).$$

当 $x_1<x_2$ 时,由于 $x_1-x_2<0$,而

$$x_1^2+x_1x_2+x_2^2=\left(x_1+\frac{x_2}{2}\right)^2+\frac{3}{4}x_2^2>0,$$

故总有 $f(x_1)-f(x_2)<0$,即 $f(x_1)<f(x_2)$.

又如,函数 $g(x)=x^2$ 在区间 $(-\infty,0]$ 上严格单减,在区间 $[0,+\infty)$ 上严格单增,但在整个区

间内却不是单调的. 这说明函数的单调性亦与数集 D 有关.

3. 奇偶性

设 $y=f(x)$, $x\in D$, 其中 D 关于原点对称, 即当 $x\in D$ 时有 $-x\in D$. 如果对任意 $x\in D$, 总有

$$f(-x)=-f(x) \quad (\text{或} f(-x)=f(x)),$$

那么称 $f(x)$ 为**奇函数**(或**偶函数**).

例如, $f(x)=x^3$ 是奇函数, $g(x)=x^2$ 是偶函数, 因为对任意 $x\in\mathbf{R}$, 总有

$$f(-x)=(-x)^3=-x^3=-f(x),$$
$$g(-x)=(-x)^2=x^2=g(x).$$

又如, 三角函数中, 正弦函数 $y=\sin x$ 是奇函数, 余弦函数 $y=\cos x$ 是偶函数, 而 $y=\sin x+\cos x$ 既不是奇函数, 也不是偶函数.

在坐标平面上, 偶函数的图形关于 y 轴对称, 奇函数的图形关于原点对称.

4. 周期性

设函数 $y=f(x)$, $x\in D$. 若存在常数 $l\neq 0$, 使对任意 $x\in D$ 有 $(x+l)\in D$, 总有

$$f(x+l)=f(x),$$

则称 $f(x)$ 为**周期函数**, l 称为 $f(x)$ 的一个周期. 通常所说周期函数的周期是指**最小正周期**.

例如, 函数 $y=x-[x]$ 是周期函数(图 1-2). 又如, 三角函数中, $\sin x$ 和 $\cos x$ 是周期为 2π 的周期函数, $\tan x$ 和 $\cot x$ 是周期为 π 的周期函数. 但并非任何周期函数都有最小正周期. 例如, 常量函数 $f(x)=C$ 是周期函数, 任何实数都是它的周期, 因而不存在最小正周期.

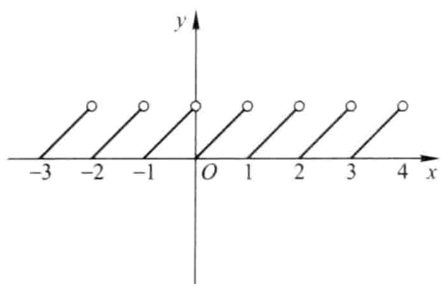

图 1-2

1.1.3 反函数

定义 2 设函数 $y=f(x)$ 的定义域为 D, 值域为 W. 若对 W 中每一值 y_0, D 中必有一个值 x_0, 使 $f(x_0)=y_0$, 则令 x_0 与 y_0 相对应, 便可在 W 上确定一个函数, 称此函数为函数 $y=f(x)$ 的**反函数**, 记作

$$x=f^{-1}(y),\ y\in W.$$

相对于反函数 $x=f^{-1}(y)$ 来说, 原来的函数 $y=f(x)$ 称为**原函数**.

由定义 2 可知, 反函数 $x=f^{-1}(y)$ 的定义域和值域分别是它的原函数 $y=f(x)$ 的值域和定义域. 因此也可以说两者互为反函数.

例如, 函数 $y=x^3$ 的反函数是 $x=\sqrt[3]{y}$, $y=\dfrac{1}{x}$ 的反函数是 $x=\dfrac{1}{y}$.

由于我们所说的函数总是指单值函数, 在这个意义上, 并不是任何一个函数都有反函数的. 例如, $y=x^2$ 就没有反函数, 因为对值域 $[0,+\infty)$ 上任一正数 y, 在其定义域 $(-\infty,+\infty)$ 内有两个互为相反的 x 值与之对应(图 1-3).

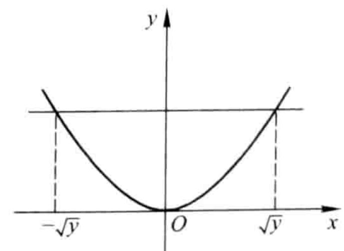

图 1-3

1.1.4　复合函数

定义 3　已知两个函数

$$y=f(u),u\in D_1,$$
$$u=\varphi(x),x\in D_2,$$

如果 $D_2^*=\{x\mid \varphi(x)\in D_1,x\in D_2\}\neq\varnothing$，那么对每个 $x\in D_2^*$，通过函数 $u=\varphi(x)$ 有确定的 $u\in D_1$ 与之对应，又通过函数 $y=f(u)$ 有确定的实数 y 与 u 对应，从而得到一个以 x 为自变量，y 为因变量，定义在 D_2^* 上的函数，称它为由函数 $y=f(u)$ 与 $u=\varphi(x)$ 复合而成的**复合函数**，记作

$$y=f[\varphi(x)],x\in D_2^*,$$

其中 u 称为**中间变量**.

注意：复合函数分解过程可以从外到内逐层分解为简单函数. 如 $y=\sin^2 x$，函数实质为 $y=(\sin x)^2$，很明显最外层为 $y=u^2$，内层函数为 $y=\sin x$.

例 4　分解函数 $f(x)=e^{\sqrt{\sin x}}$.

解　按照从外到内的原则，上述函数可以分解为 $f(x)=e^u$，$u=\sqrt{v}$，$v=\sin x$.

1.1.5　初等函数

1. 五种基本初等函数

（1）指数函数

$$y=a^x\quad(a>0,a\neq 1).$$

定义域为全体实数 $\mathbf{R}$，值域为 $(0,+\infty)$. 当 $a>1$ 时为严格单增函数；当 $0<a<1$ 时为严格单减函数（图 1-4）.

在今后的学习中，常用的指数函数是 $y=e^x$，其中 $e=2.7182818284\cdots$ 为无理数.

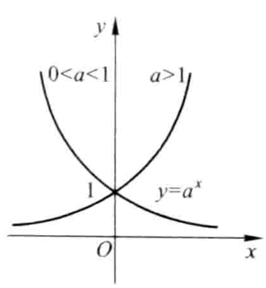

图 1-4

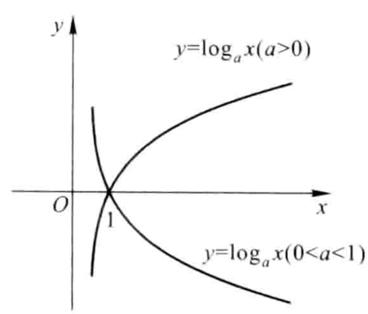

图 1-5

（2）对数函数

$$y=\log_a x\ (a>0,a\neq 1).$$

定义域为 $(0,+\infty)$，值域为 $(-\infty,+\infty)$. 当 $a>1$ 时为严格单增函数，当 $0<a<1$ 时为严格单减函数. 它的图形位于 y 轴的右方，且通过点 $(1,0)$（图 1-5）.

工程数学中常常用到以 e 为底的对数函数 $y=\log_e x$，称为自然对数，并简记作 $y=\ln x$.

（3）幂函数

$$y=x^\mu\quad(\mu\in\mathbf{R},\mu\neq 0).$$

μ 值不同,函数的图像不同. 可把它看作指数函数 $y=\mathrm{e}^{u}$ 与对数函数 $u=\mu\ln x$ 的复合函数:

$$x^{\mu}=\mathrm{e}^{\mu\ln x},\quad 0<x<+\infty .$$

并且它的图形总经过点(1,1). $\mu=-1,-2,\frac{1}{2},\frac{1}{3}$ 的图形如图 1-6(a),(b),(c),(d)所示.

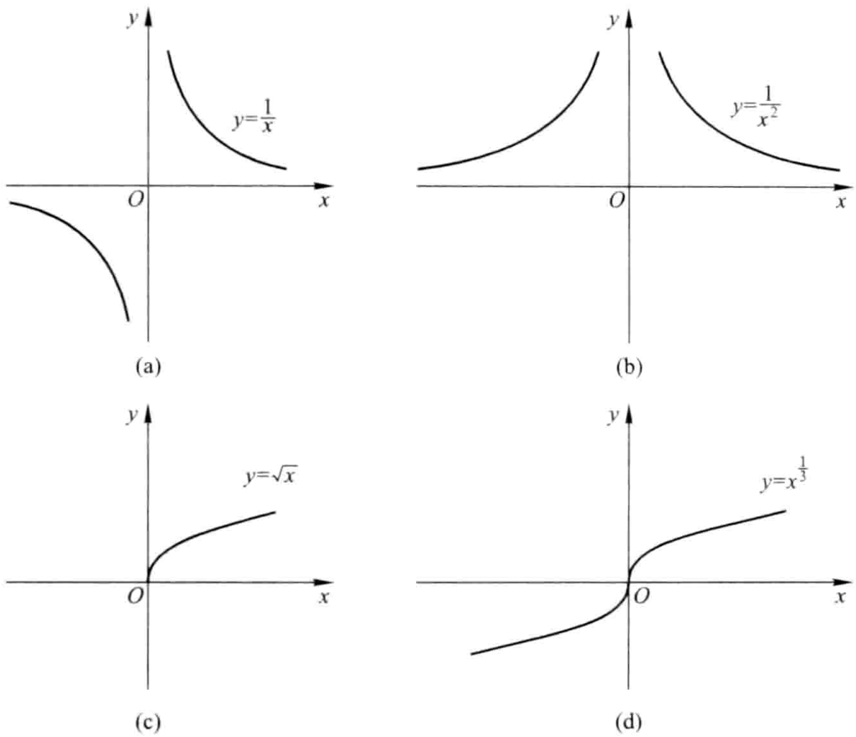

图 1-6

(4) 三角函数

正弦函数　　$y=\sin x,-\infty<x<+\infty$;

余弦函数　　$y=\cos x,-\infty<x<+\infty$;

正切函数　　$y=\tan x, x\neq(2k+1)\frac{\pi}{2}\ (k\in\mathbf{Z})$;

余切函数　　$y=\cot x, x\neq k\pi\quad (k\in\mathbf{Z})$;

正割函数　　$y=\sec x, x\neq(2k+1)\frac{\pi}{2}\ (k\in\mathbf{Z})$;

余割函数　　$y=\csc x, x\neq k\pi\ (k\in\mathbf{Z})$.

a. 正弦函数与余弦函数都是以 2π 为周期的周期函数. 正弦函数为奇函数,余弦函数为偶函数. 由于

$$|\sin x|\leqslant 1,\ |\cos x|\leqslant 1,$$

所以它们是有界函数,其图形位于两条平行直线 $y=1$ 与 $y=-1$ 之间(图 1-7(a),(b)).

b. 正切函数与余切函数都是以 π 为周期的函数. 它们都是奇函数,其图形关于原点对称. 正切函数在区间 $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ 内严格单增,余切函数在区间 $(0,\pi)$ 内严格单减(图 1-8(a),(b)).

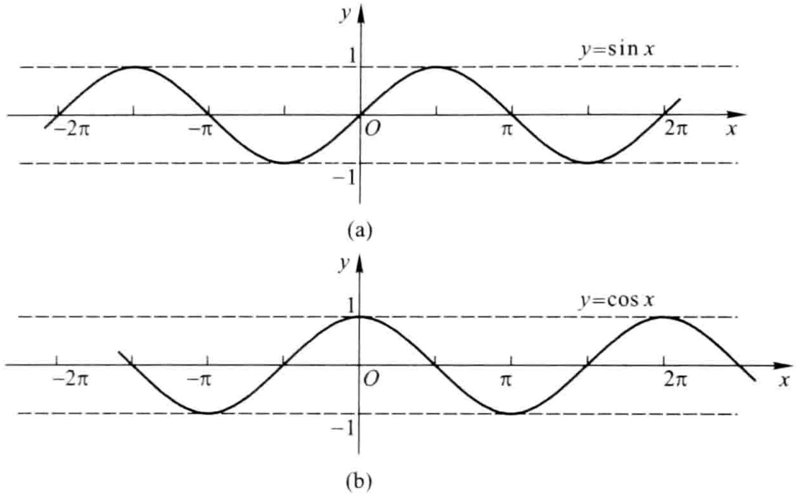

图 1-7

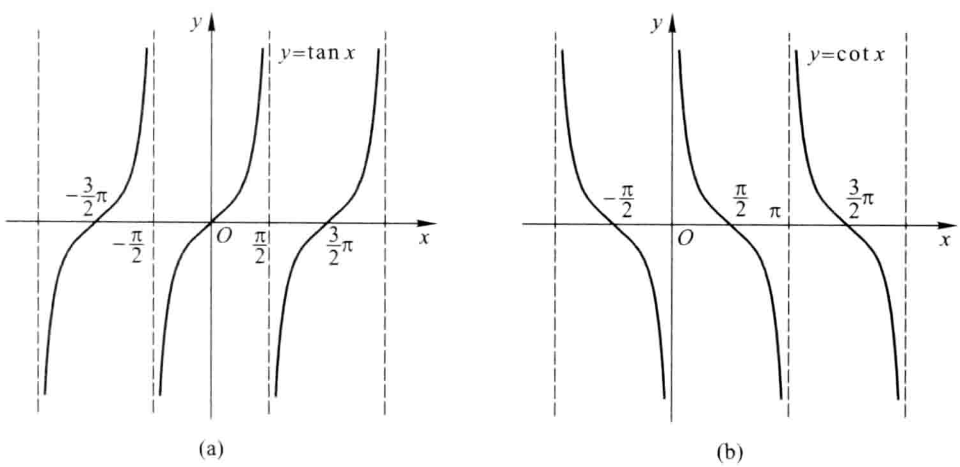

图 1-8

c. 正割函数与余割函数也都是以 2π 为周期的周期函数. 正割函数为偶函数,余割函数为奇函数. 由于 $\sec x=\dfrac{1}{\cos x}$, $\csc x=\dfrac{1}{\sin x}$,故可以将它们分别转化为对余弦函数和正弦函数的讨论.

(5) 反三角函数

反三角函数是三角函数的反函数,由于三角函数都是周期函数,故对于其值域的每个 y 值,与之对应的 x 值有无穷多个,因此在三角函数的定义域上,其反函数是不存在的. 为了避免多值性,我们在各个三角函数中适当选取它们的一个严格单调区间来研究其反函数,常用的反函数有四个:

反正弦函数　　$y=\arcsin x, x\in[-1,1], y\in\left[-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right]$;

反余弦函数　　$y=\arccos x, x\in[-1,1], y\in[0,\pi]$;

反正切函数　　$y=\arctan x, x\in(-\infty,+\infty), y\in\left(-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right)$;

反余切函数　　$y=\operatorname{arccot} x, x\in(-\infty,+\infty), y\in(0,\pi)$.
它们的图形如图 1-9(a)(b)(c)(d)所示.

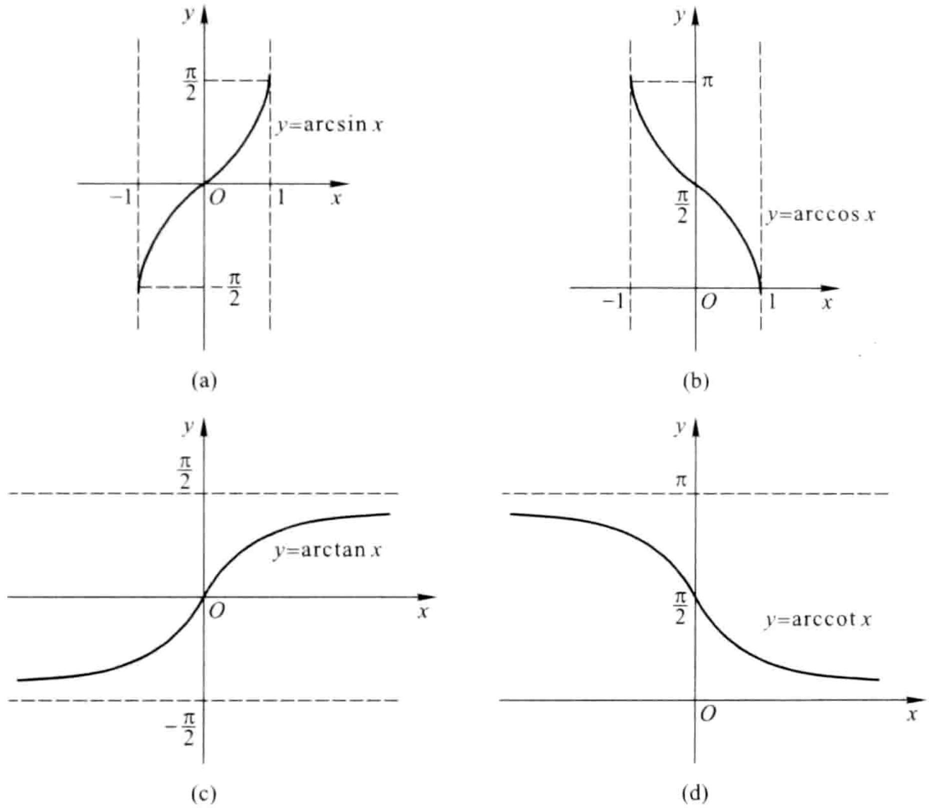

图 1-9

上列五种函数统称为**基本初等函数**,是最常用、最基本的函数.

2. 初等函数

由基本初等函数和常函数经过有限次的四则运算与有限次的函数复合所产生并且能用一个解析式表示的函数称为**初等函数**.

例如,函数

$$y=\sqrt{1+x^2}, y=3\sin\left(2x+\frac{2}{3}\pi\right)$$

都是初等函数.

实训 1-1

1. 求下列函数的定义域:

(1) $y=\sqrt{3x-2}$;　　(2) $y=\dfrac{1}{x^2-4}$;

(3) $y=\dfrac{1}{x+1}+\arcsin(x-3)$;　　(4) $y=\sin\sqrt{x}$.

2. 判断下列各组中两个函数是否相同？并说明理由.

（1）$f(x)=3\lg x, g(x)=\lg x^3$；

（2）$f(x)=1, g(x)=\sin^2 x+\cos^2 x$.

3. 判断下列函数的奇偶性：

（1）$y=\sin x\cos x^2$；　　（2）$y=\dfrac{\sin x}{x}$；

（3）$y=\sqrt[3]{(1-x)^2}+\sqrt[3]{(1+x)^2}$；　　（4）$y=\sin x+\cos x$.

4. 指出下列函数的复合过程：

（1）$y=\cos x^2$；　　（2）$y=\ln\ln\sin x$；

（3）$y=(2-4x)^2$；　　（4）$y=\sin^2(x+1)$；

（5）$y=\sqrt{e^{\sin x}}$；　　（6）$y=\ln(1+x^2)$.

5. 设有一块边长为 a 的正方形薄板，将它的四个角减去边长相等的四个小正方形制作成一个无盖的盒子，试将盒子的体积表示成关于小正方形边长的函数.

§1.2 极限的概念

1.2.1 数列的极限

1. 数列的概念

数列是按照一定的次序排列起来的一列数

$$u_1, u_2, u_3, \cdots, u_n, \cdots$$

简记为$\{u_n\}$. 数列可以看作是定义在正整数集合上的函数

$$u_n=f(n)\ (n=1,2,3,\cdots),$$

u_n称为数列的通项或一般项.

2. 数列的极限

定义 1 对于数列$\{u_n\}$，如果当 n 无限增大时，通项 u_n 无限接近于一个常数 A，那么称 A 为**数列$\{u_n\}$当 $n\to\infty$ 时的极限**，记作

$$\lim_{n\to\infty} u_n=A \text{ 或 } u_n\to A\ (n\to\infty).$$

若极限存在，则称**数列$\{u_n\}$收敛**；否则，称**数列$\{u_n\}$发散**.

例 1 求下列数列的极限，并判断数列的敛散性.

（1）$\{u_n\}=\dfrac{1}{n}$；　（2）$\{u_n\}=(-1)^n\dfrac{1}{n+1}$；　（3）$\{u_n\}=n$.

解 （1）极限为 0，数列收敛；

（2）极限为 0，数列收敛；

（3）极限不存在，数列发散.

定理 1 单调有界数列必有极限.

1.2.2 函数的极限

1. 当 $x\to\infty$ 时,函数 $f(x)$ 的极限

定义 2 如果当 $|x|$ 无限增大时,函数 $f(x)$ 的值无限趋近于某一常数 A,那么称 A 为**函数 $f(x)$ 当 $x\to\infty$ 时的极限**,记作

$$\lim_{x\to\infty}f(x)=A \text{ 或 } f(x)\to A\ (x\to\infty).$$

例如,$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x}=0$.

2. 当 $x\to+\infty$ 时,函数 $f(x)$ 的极限

定义 3 如果 $x>0$,当 x 无限增大时,函数 $f(x)$ 的值无限趋近于某一常数 A,那么称 A 为**函数 $f(x)$ 当 $x\to+\infty$ 时的极限**,记作

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=A \text{ 或 } f(x)\to A\ (x\to+\infty).$$

3. 当 $x\to-\infty$ 时,函数 $f(x)$ 的极限

定义 4 如果 $x<0$,当 x 无限减小时,函数 $f(x)$ 的值无限趋近于某一常数 A,那么称 A 为**函数 $f(x)$ 当 $x\to-\infty$ 时的极限**,记作

$$\lim_{x\to-\infty}f(x)=A \text{ 或 } f(x)\to A\ (x\to-\infty).$$

例如,$\lim\limits_{x\to+\infty}\arctan x=\dfrac{\pi}{2}$,$\lim\limits_{x\to-\infty}\arctan x=-\dfrac{\pi}{2}$.

4. 当 $x\to x_0$ 时,函数 $f(x)$ 的极限

定义 5 设函数 $f(x)$ 在 x_0 的某一去心邻域 $N(\hat{x}_0,\delta)$①内有定义,当 x 无限接近 x_0 时,函数 $f(x)$ 的值无限趋近于某一常数 A,则称 A 为**函数 $f(x)$ 当 $x\to x_0$ 时的极限**,记作

$$\lim_{x\to x_0}f(x)=A \text{ 或 } f(x)\to A\ (x\to x_0).$$

例如,$\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x^2-4}{x-2}=\lim\limits_{x\to2}(x+2)=4$.

5. 当 $x\to x_0^+$ 时,函数 $f(x)$ 的极限

定义 6 设函数 $f(x)$ 在 x_0 的某一右半邻域 $(x_0,x_0+\delta)$ 内有定义,当 x 从 x_0 右侧无限接近 x_0 时,函数 $f(x)$ 的值无限趋近于某一常数 A,则称 A 为**函数 $f(x)$ 当 $x\to x_0^+$ 时的右极限**,记作

$$\lim_{x\to x_0^+}f(x)=A \text{ 或 } f(x)\to A\ (x\to x_0^+).$$

6. 当 $x\to x_0^-$ 时,函数 $f(x)$ 的极限

定义 7 设函数 $f(x)$ 在 x_0 的某一左半邻域 $(x_0-\delta,x_0)$ 内有定义,当 x 从 x_0 左侧无限接近 x_0 时,函数 $f(x)$ 的值无限趋近于某一常数 A,则称 A 为**函数 $f(x)$ 当 $x\to x_0^-$ 时的左极限**,记作

$$\lim_{x\to x_0^-}f(x)=A \text{ 或 } f(x)\to A\ (x\to x_0^-).$$

定理 2 极限存在的充要条件是

---

① 以 x_0 为中心,以 $2\delta(\delta>0)$ 为长度的开区间 $(x_0-\delta,x_0+\delta)$ 内一切点 x 的全体,称为点 x_0 的 δ 邻域,记作 $N(x_0,\delta)$,在 x_0 的 δ 邻域中去掉 x_0,称为点 x_0 的去心邻域,记作 $N(\hat{x}_0,\delta)$. 区间 $(x_0,x_0+\delta)$ 称为点 x_0 的右半邻域,区间 $(x_0-\delta,x_0)$ 称为点 x_0 的左半邻域.