清华大学出版社“十二五”规划教材

高等数学（下）

郭治中　编著

清华大学出版社

清华大学出版社“十二五”规划教材

高等数学（下）

郭治中　编著

清华大学出版社
北　京

内 容 简 介

本书是作者根据高等学校数学与统计学教学指导委员会新修订的《工科类本科数学基础课程教学基本要求》，结合多年的教学经验编写而成.

教材遵循"自然而然"的原则，避免跳跃. 紧抓各主要概念、定理的几何背景，用简单、朴实且生活化的语言、方法引出主要数学概念，使其自然、朴实、顺理成章，且读起来顺畅而又印象深刻. "延伸阅读"将帮助学生加深对教材内容的理解. 习题分 A、B 类，增加了概念类题目，编排紧扣教材内容与例题，难度渐变. A 类习题为基本内容，B 类习题略作引申. 每章配有提高训练题，基本取自历年高等数学考研题，并按难易程度进行编排. 习题和提高训练题均配有答案与较为详尽的提示.

全书分上、下册. 下册内容：空间解析几何与线性空间、多元函数微分法及其应用、重积分、曲线积分与曲面积分、无穷级数.

本书可作为高等院校理、工、经管各类专业高等数学课程的教材使用.

图书在版编目（CIP）数据

高等数学. 下/郭治中编著. --北京：清华大学出版社，2013. 2
ISBN 978-7-302-31119-5

Ⅰ. ①高… Ⅱ. ①郭… Ⅲ. ①高等数学－高等学校－教材 Ⅳ. ①O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2012)第 319159 号

责任编辑：石　磊　赵从棉
封面设计：傅瑞学
责任校对：王淑云
责任印制：王静怡

出版发行：清华大学出版社
　网　　址：http://www.tup.com.cn，http://www.wqbook.com
　地　　址：北京清华大学学研大厦 A 座　　**邮　　编**：100084
　社 总 机：010-62770175　　**邮　　购**：010-62786544
　投稿与读者服务：010-62776969，c-service@tup.tsinghua.edu.cn
　质量反馈：010-62772015，zhiliang@tup.tsinghua.edu.cn
印 装 者：保定市中画美凯印刷有限公司
经　　销：全国新华书店
开　　本：185mm×230mm　　**印　张**：19.75　　**字　　数**：430 千字
版　　次：2013 年 2 月第 1 版　　**印　　次**：2013 年 2 月第1 次印刷
印　　数：1～3000
定　　价：32.00 元

产品编号：043515-01

序 PREFACE

随着当今世界科学技术的飞速发展，数学在各个领域的应用无论是广度还是深度都在不断地加速扩大，在人们强烈感知的科学技术日益数字化的今天，数学已越来越成为一种社会需要，其在自然科学、科学技术与人文社会科学领域的基础性地位已为社会所共识. 究其原因，首先在于数学在几乎所有领域获得了广泛的应用，而更为重要的则在于数学培养了人的思维能力，特别是严密的逻辑推理能力，这种能力虽然不能量化，却于无形而影响一个人的终身发展，它是人们所获得的无形资本.

大多数人在学校里学过的许多数学定义、定理、公式，在生活与工作中很少直接使用甚至根本用不到，但这些定义、定理、公式的创建过程中所蕴涵的数学思想方法却造就着方方面面的杰出人才. 数学对一个人的成长、发展的影响主要在于思维方式的培养与训练. 通过学习数学，将启发与提高人们固有的逻辑思维能力. 所以，有人称数学是思维的体操，数学思想不是只有数学家才需要具备的.

对于高等院校理工科非数学专业来讲，高等数学是数学思想与方法的浓缩，所以，高等数学是大学素质教育很重要的一门基础课程，我们不但需要教会学生如何求导数、求积分，更重要的是使学生学到高等数学所蕴涵的数学思想、方法与智慧，这将使学生受益终身. 正如本书前言所说：将高等数学作为“工具”讲授与作为“智慧工具”讲授的感知差别是不言而喻的. 当然，对于高等数学教材的编写也是如此.

的确，很高兴阅读了我院教师郭治中编写的这本《高等数学》教材，作者从事高等数学教学三十载，对这门课程有着深刻的理解与见解，加之长期以来对学生学习高等数学情况的深入了解与调研，使得该教材在内容的处理上有其独到之处，具体体现在如下几个方面.

一、教材注重启发式教学，注重对学生思维品质的培养提高. 书中概念的引入、概念的定义及由此得到的命题和定理的叙述采用自然的、循序渐进的方式，以及于学生认为自然而然的地方突然发问，对学生思维的深刻性、严密性的提高会有很大帮助. 这一做法也是对中学教育做了很好的补充和改进，数学学习提倡研究性学习，应像数学家一样学习，但由于高考压力很难做到，此教材的突出特点之一就是弥补了中学的这一缺憾，使学生通过此教材，能够认识、感受到理论知识产生的自然过程以及其中表现出的数学思想方法与智慧.

另外，作者编入了概念类习题，这将有助于学生课后认真读书.

二、因人而异，因材施教是本教材的又一特点. 基于地区差异，学校师资力量与教学质量的差异等引起的生源差异是不争的事实，历年来，学生“谈高等数学而色变”的现象较为普

遍. 高等数学的确是高等院校理工科非数学专业的一门有较高难度的基础课程,但从阅读本教材的过程中可以体会到作者精心处理"难"这一问题所做的工作. 例如:

(1) 定积分定义中和式极限 $\lim\limits_{\lambda\to 0}\sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$ 的唯一性问题: 在对区间$[a,b]$进行任意的分割及点 ξ_i 的任意取法之下存在且唯一. 作者给出了如下比喻:"班上所有同学都来计算图 5.2 所示的曲边梯形的面积,每个同学对区间$[a,b]$的分法与 ξ_i 的取法不尽相同,但极限值 $\lim\limits_{\lambda\to 0}\sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$ 都相同,因为图 5.2 所示的曲边梯形的面积是确定的."这类处理方式书中还有许多,亦即作者采用了正视难点、化解难点,而非删除难点或隐藏难点.

(2) 式 $\int \arctan x\,\mathrm{d}x^3 = x^3\arctan x - \int x^3\,\mathrm{d}\arctan x = x^3\arctan x - \int \dfrac{x^3}{1+x^2}\mathrm{d}x$ 与式 $\int \arctan x\,\mathrm{d}x^3 = x^3\arctan x - \int \dfrac{x^3}{1+x^2}\mathrm{d}x$,作者采用了前面的写法,这种不起眼的差别对于学生来讲有时可能就不是"不起眼"了.

三、创新是本教材的主旋律,作者尽量做到不落常套,不简单复制粘贴,不东拼西凑,按照高等院校理工科非数学类各本科专业对高等数学的基本要求安排内容,详略有度,层次分明,进度与难度配置合理.

例如,书中将无穷远点的邻域与有限点 x_0 的邻域 $U(x_0,\delta)$进行了统一,记为 $U(\Delta,\delta)$ $(\Delta\in\{x_0,\infty,+\infty,-\infty\})$,使得两种类型的极限定义与定理、性质的叙述得到了统一;如何使学生更深刻地理解极限定义的含义是高等数学教学的难点,作者在此不同以往地提前引入了无穷小概念,用无穷小来揭示、帮助学生进一步理解极限定义. 这的确是有意义的创新尝试.

四、本教材整体布局合理,可操作性强. 例如,作者从积分区域的表达入手来讨论多元函数积分问题,使得在解决三重积分、曲面积分这类老大难问题时思路清晰,操作性强. 且将空间区域的表达问题放在了第 7 章空间解析几何内,这样一来,不但分解了三重积分的难点,且显得顺理成章. 此外,本教材语言朴实,文字流畅,图文并茂,既便于教学,又便于学生自学.

还有许多特色,作者在前言中已提到,此处不再赘述.

总之,高等数学是大学素质教育很重要的一门基础课程,新中国成立以来,我国出版了不少优秀的高等数学教材,随着社会进步、经济发展以及科学技术的飞跃,教材改革实属必然. 而如何做到因人而异,因材施教,特别是体现出高等数学所蕴涵的数学思想与智慧,教材是一个重要因素. 郭治中老师编写这本《高等数学》教材正是对此所做的有益尝试,希望这本教材能够在高等数学的教学改革中起到积极作用.

滕志东

2012.6.6

前言 FOREWORD

本教材编写的指导思想是：无论问题的导入还是理论探讨，都遵循“自然而然”的原则，避免跳跃，尽量做到教材本身就是一条“连续而光滑的曲线”；紧紧抓住各主要概念、定理的几何背景，尽量用简单、朴实且生活化的语言、方法引出主要数学概念，揭示概念创建的原本思想过程，使其自然、朴实且顺理成章；尽量体现出“形”与“数”的完美结合，使学生读起来顺畅而又印象深刻；在这些基础之上再进行数学抽象，得出严格、精准的数学定义及结论.

本教材也做了一些不同于以往教材的探索性工作，在分段函数、函数的周期延拓、极限、定积分的几何应用、多元复合函数的导数、方向导数、拉格朗日乘数法、线性空间、向量空间、重积分、曲线积分、曲面积分等部分与通常的讲法相比多少都做了一些改变，同时注重分解与化解难点. 例如：

(1) 极限内容是高等数学教学中公认的难点，如何使学生更好地理解 ε-δ 类极限定义(的内涵)，理解用此类定义证明题目时的关键所在，是每个讲授高等数学教师所苦恼，且又没有多少好办法的一件事情. 而整个高等数学体系又都是建立在极限(定义)基础之上，其重要性不言而喻. 所以，使学生加深对极限定义的理解，是这门课程的基本要求. 为此，本教材提前引入了无穷小概念，以特殊无穷小为标准尺，对极限证明题进行论证，以期由此衬托出极限定义的内涵，帮助学生对极限定义的进一步理解. 多年的教学实践证明，这种讲法对学生的确起到了帮助作用.

(2) 在掌握了不定积分与定积分的计算之后，其他所有积分计算问题的本质都是将其转换为定积分进行计算，而转换的关键在于积分区域的表达，所以，本教材将积分区域的表达问题贯穿始终. 例如，教材特别强调空间 3 种基本区域的表达，使多元函数积分的计算问题清晰明了，且在讲授空间解析几何时很自然地引入这些概念，使得三重积分的难点得以分解. 对于第一、二类曲线积分、曲面积分也是如此处理.

(3) 教材增加了极坐标系的相关内容，如极坐标系下常见函数的表达、常见区域的表达，使学生较为系统地了解掌握这些内容，为更好地学习、掌握重积分及曲面积分奠定了基础.

另外，也许由于历史原因，有些高等数学教材在许多基本概念的定义方面有些小问题，例如导数定义：在一定条件下极限 $\lim\limits_{\Delta x \to 0}\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$ 存在时，称函数 $f(x)$ 在 x_0 点可导，记为 $f'(x_0)$. 亦即符号 $f'(x_0)$ 表示上述极限存在，但又有“$f'(x_0)$ 不存在”这样的提法.

本教材则避免了类似情况.

高等数学是人类逻辑思维、智慧的结晶,并非仅仅是各学科的“工具”,更为显然的是,将高等数学作为“工具”讲授与作为“智慧工具”讲授的感知差别是不言而喻的. 本教材在内容叙述方面顾及到了这一点,尽量做到使学生多想多练,引导学生通过对现象的分析、研究,自然而然地得到相关定理、性质,尽量剥去数学定理“抽象”、“云里雾里”的外衣,使学生变被动接受为主动创造与获取,同时也尽量避免教者将其作为单纯的“工具”讲授而使之变为“应试”教育的教材而丢弃“智慧”精髓.

另外,书中除“延伸阅读”用楷体排版外,还有个别例题、定理的证明以及个别简短的补充内容也使用了楷体,这些内容可根据专业需求及课时数的多少选择取舍.

习题分为基本类习题与提高训练题. 基本类习题分为 A,B 类,习题选配紧扣教材内容与例题,难度渐变,避免偏、难、怪及技巧性要求过高的题目,使学生能够较为顺畅地完成作业而使得自信心得以建立,又能通过习题掌握教材内容所揭示的数学思想方法. 习题编入了概念性题目,主要目的是促使学生认真读书. A 类习题为基本内容,B 类习题略作引申(根据内容需要,个别节的习题无 B 类),以期满足不同学生及专业的需要. A,B 类习题附有答案及提示. 每章所配的提高训练题基本取自历年高等数学考研题,根据题目所涉及的知识要求以及难易程度进行了编排,同时给出了答案与较为详尽的提示. 这部分习题仅供考研及数学爱好者参考,不作为教学要求.

全书分上、下册,共 11 章. 上册内容包括函数与极限、导数与微分、微分中值定理与导数应用、不定积分、定积分及其应用、微分方程. 下册内容包括空间解析几何与线性空间、多元函数微分法及其应用、重积分、曲线积分与曲面积分、无穷级数.

上、下册基本内容共需 170 学时左右,对于 170 学时左右的专业,习题可选择 A 类,再适当选一些 B 类习题;对于 198 学时或更多学时的专业,习题可同时选择 A,B 类,亦可选讲一些“延伸阅读”的内容.

几点说明与建议:(1)极限的 ε-δ 定义部分主要要求学生能够理解定义的内涵,提前引入无穷小的目的正在于此,并非强调对题目的新证法;(2)本教材的观点是:多元函数积分计算的关键是积分区域的表达,所以对区域的表达应给予足够重视;(3)建议多用邻域符号.

在教材编写过程中,得到了学院领导、教务处、许多同行教师及研究生的鼎力相助,特别是由于笔者所教历届本科生的期望与热情鼓励,才使得笔者最终提笔,在此一并致谢. 但笔者深知水平实在有限,错误在所难免,恳望同行及读者批评指教,不胜感激!

编　者

2012 年 10 月

目录 CONTENTS

第7章

空间解析几何与线性空间

几何学包括平面几何学与空间几何学，这在中学已学过. 那么，何为解析几何？简单讲，解析几何就是用代数的方法研究几何学的一种学问，也叫代数几何学，研究对象为平面几何时叫做平面解析几何，为空间几何时叫做空间解析几何.

几何学是人类历史上最早创建的数学理论之一，提到几何学，我们不得不提到一个人——欧几里得(公元前330—前275). 古希腊数学家欧几里得在总结前人知识的基础上写出了《几何原本》这一鸿篇巨著，在人类历史上首次明确地建立起了"由少量定义，自明公理出发，应用逻辑推理的方法演绎、创建数学体系"的基本思想方法，并应用这一方法创建了几何学. 他给出了点、线、直线及两直线平行等定义，给出了最基本的几个公理，如：

(1) 等于同一量的所有量彼此相等；

(2) 等量加等量其和仍相等，如 $A=B, C=D$，则 $A+C=B+D$；

(3) 整体大于部分.

并由此演绎出了数百个数学命题. 欧几里得将距离、角度转换成坐标系，描述了一幅有限维的空间图形，欧氏空间也被理解为线性流形. 据说，除《圣经》之外，没有任何其他著作，其研究、使用和传播之广泛能够与《几何原本》相比；其向人类展示出的数学之精髓——逻辑演绎、推理，对人类科学思维的影响无与伦比. 由此也告诉我们，学习高等数学时应该汲取的养分.

同样，提到解析几何学，我们也不得不提到一个人——吴文俊，2000年. 我国著名数学家吴文俊因在几何定理的机器证明问题上的重大研究成果而获得国家最高科学技术奖，其方法被国际数学界称为吴方法，而其方法的基本思想正是几何问题代数化. 何为几何问题代数化？简单讲，就是将几何图形数字化. 将$\triangle ABC$放入平面直角坐标系内，我们只需知道此三角形三个顶点的坐标 $A(x_1, y_2)$，$B(x_2, y_2)$，$C(x_3, y_3)$，通过代数运算即可得到这个三角形所有边的长度及三个角的角度，这就是几何问题的代数化.

7.1 向量空间及其线性运算

7.1.1 空间概述——线性空间与向量空间

目前人们感知的现实宇宙为**三维几何空间**，它可以看做由无数多个点所构成，但我们说

不清楚现在自己在宇宙中的位置，如果想要说清楚就必须建立坐标系，例如空间直角坐标系.

空间直角坐标系：过平面直角坐标系的原点 O 作垂直于坐标面的直线，其方向为：右手握直线，使除拇指外的四指从 x 轴正向转向 y 轴正向，拇指所指方向即为此直线的方向，再将直线标以单位(图 7.1)，称这样的直线为 z 轴，这时的三维空间称为**三维直角坐标空间**.

如下命题是我们中学就熟知的.

命题 7.1 过空间一点作且只能作一张垂直于已知直线的平面.

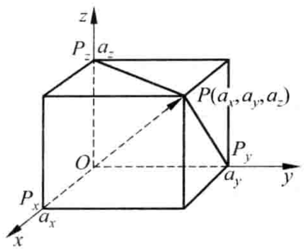

图 7.1

在三维空间中任取一点 P，过 P 点分别作垂直于 x,y,z 坐标轴的平面，它们分别交 x,y,z 轴于三点 P_x,P_y,P_z(图 7.1)，由命题 7.1，此三点是唯一确定的，顺次用 a_x,a_y,a_z 表示点 P_x,P_y,P_z 在 x,y,z 坐标轴上的坐标，则 P 点确定了唯一的一组数 (a_x,a_y,a_z)；将上述过程反过来，给定一组数 (a_x,a_y,a_z)，必唯一确定空间的一个点 P. 所以，空间点 P 与数组 (a_x,a_y,a_z) 一一对应. 称数组 (a_x,a_y,a_z) 为空间点 P 在直角坐标系下的坐标，也记点 P 为 $P(a_x,a_y,a_z)$. 称 a_x,a_y,a_z 分别为点 P 的 x,y,z 坐标.

如此一来，三维直角坐标空间中的每个点的旁边都有了一个数组 (a_x,a_y,a_z)，用于说明该点的位置. 但无论如何，这时空间中的每个点都静静地待在自己的位置上，空间显得如此寂静，点与点之间没有任何关系. 现在我们给空间点赋予一种运算(规则)——**线性运算**.

设 $P(a_x,a_y,a_z)$，$Q(b_x,b_y,b_z)$ 为三维直角坐标空间中的任意两点，λ 为任意实数，对此二数组赋予如下运算：

$$\begin{cases}(a_x,a_y,a_z)+(b_x,b_y,b_z)=(a_x+b_x,a_y+b_y,a_z+b_z),\\ \lambda(a_x,a_y,a_z)=(\lambda a_x,\lambda a_y,\lambda a_z),\end{cases} \tag{7.1}$$

等号右边的数组显然为空间的新点，由点 $P(a_x,a_y,a_z)$，$Q(b_x,b_y,b_z)$ 所生成；这意味着空间中任意一个或两个点在上述运算下可以生成另外的点. 如此以来，空间中的点与点之间有了关系，空间不再寂静，非常活跃. 我们称式(7.1)给出的运算为空间直角坐标系下的线性运算，称赋予线性运算后的三维直角坐标空间为**三维线性空间**，简称**线性空间**.

设 $P(a_x,a_y,a_z)$ 为空间任意一点，称以原点 $O(0,0,0)$ 为起点，$P(a_x,a_y,a_z)$ 为终点的有向线段为向量，记为 $\overrightarrow{OP}$(关于向量更详细的讨论见下一段).

显然，向量 $\overrightarrow{OP}$ 与点 $P(a_x,a_y,a_z)$ 是一一对应的，所以，可用 (a_x,a_y,a_z) 来表示向量 $\overrightarrow{OP}$，即

$$\overrightarrow{OP}=(a_x,a_y,a_z).$$

设 $\overrightarrow{OQ}=(b_x,b_y,b_z)$，则线性运算(7.1)可看做是向量 $\overrightarrow{OP}$ 与 $\overrightarrow{OQ}$ 间的运算，即

$$\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{OQ}=(a_x+b_x,a_y+b_y,a_z+b_z),$$

$$\lambda \overrightarrow{OP} = (\lambda a_x, \lambda a_y, \lambda a_z).$$

当我们将空间点 $P(a_x,a_y,a_z)$ 看做空间向量 $\overrightarrow{OP}=(a_x,a_y,a_z)$ 时的线性空间称为**向量空间**. 所以,向量空间实际上是赋予了某种几何意义的线性空间.

每两个坐标轴所在的平面称为坐标面,有 xOy, xOz, yOz 坐标面。这三张坐标面将空间分成了 8 个部分,每个部分叫做一个卦限,共 8 个卦限,用Ⅰ,Ⅱ,Ⅲ,Ⅳ,Ⅴ,Ⅵ,Ⅶ,Ⅷ顺次表示(图 7.2).

容易得到结果:xOy 坐标面上的任意点 (x,y,z) 的第三坐标 $z=0$,反之,第三坐标为 0 的点在 xOy 面上;x 轴上的点 (x,y,z) 的第二、三坐标为 0,反之,第二、三坐标为 0 的点在 x 轴上;点 (x,y,z) 位于第二卦限的充分必要条件是 $x\leqslant 0, y\geqslant 0, z\geqslant 0$. 同理可讨论 yOz 面,zOx 面,y 轴,z 轴以及其他卦限上点的坐标所具有的特点.

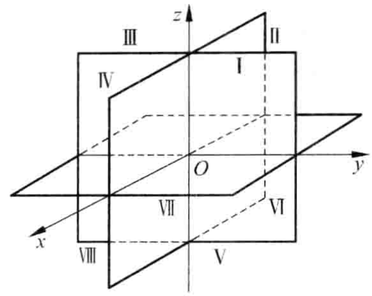

图 7.2

7.1.2 向量及其线性运算(坐标运算)

平面向量的概念在中学已熟知,而空间向量与平面向量无本质区别,我们就向量的基本内容以及某些重要性质罗列如下,对新的内容将详加讨论.

1. **向量的基本概念**

向量 既有大小又有方向的量,物理学中也称为矢量.

向量的表示 常用 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c},\cdots,\overrightarrow{AB},\overrightarrow{CD},\cdots$ 表示,$\overrightarrow{AB}$ 表示法明确了 A 为起点 B 为终点.

模 向量 $\boldsymbol{a}$ 的大小,记为 $|\boldsymbol{a}|$.

单位向量 模为 1 的向量.

零向量 模为 0 的向量,零向量具有任意方向.

自由向量 根据向量的定义,向量仅由大小和方向确定而与起点无关,这就是向量的自由性,亦称向量为自由向量.

在物理学及其他应用学科中,有时要求向量与起点或终点有关,如力 $\boldsymbol{F}$ 的作用效果往往与作用点有关,这样的向量称为固定向量,本书讨论的向量若无特殊声明均为自由向量.

向量相等 大小相等,方向相同的两个向量相等.

向量平行 向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 平行是指将它们的起点放在同一点时其方向相同或相反,记为 $\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}$.

平行定理 设 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 为二向量,$\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}\Leftrightarrow \exists \lambda\in\mathbb{R}$,使 $\boldsymbol{b}=\lambda\boldsymbol{a}$.

向量与直线平行 向量与直线平行是指将向量的起点放在直线上,其终点也在直线上.

两向量的夹角 设向量 $\boldsymbol{a}=\overrightarrow{OA}$,$\boldsymbol{b}=\overrightarrow{OB}$,则 $\angle AOB=\theta(0\leqslant\theta\leqslant\pi)$ 为向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角,记为 $(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})$(图 7.3).

两向量垂直 向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 垂直是指它们的夹角为$\frac{\pi}{2}$,记为 $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$.

共线向量 相互平行的向量.

共面向量 $k(k\geqslant 3)$个向量称为共面向量,指将它们的起点放在同一点时,终点均在同一平面上.

显然,任何两个向量都是共面向量.

下面讨论向量的坐标运算.

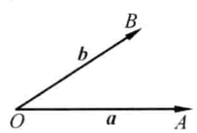

图 7.3

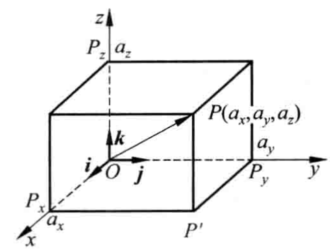

图 7.4

2. **向量的坐标运算与投影**

如图 7.4 所示,设向量$\overrightarrow{OP}=(a_x,a_y,a_z)$,$\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}$ 分别表示与 x,y,z 轴同方向的单位向量,则

$$\overrightarrow{OP_x}=a_x\boldsymbol{i},\quad \overrightarrow{OP_y}=a_y\boldsymbol{j},\quad \overrightarrow{OP_z}=a_z\boldsymbol{k},$$

从而

$$\overrightarrow{OP}=a_x\boldsymbol{i}+a_y\boldsymbol{j}+a_z\boldsymbol{k},$$

事实上,由图 7.4 可得

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OP}&=\overrightarrow{OP_x}+\overrightarrow{P_xP}=\overrightarrow{OP_x}+\overrightarrow{P_xP'}+\overrightarrow{P'P}\\&=\overrightarrow{OP_x}+\overrightarrow{OP_y}+\overrightarrow{OP_z}\\&=a_x\boldsymbol{i}+a_y\boldsymbol{j}+a_z\boldsymbol{k},\end{aligned}$$

称向量 $a_x\boldsymbol{i},a_y\boldsymbol{j},a_z\boldsymbol{k}$ 为向量$\overrightarrow{OP}$分别在 x,y,z 坐标轴方向上的分向量.

设向量 $\boldsymbol{a}=(a_x,a_y,a_z)$,$\boldsymbol{b}=(b_x,b_y,b_z)$,根据向量的线性运算可得

$$\boldsymbol{a}\pm\boldsymbol{b}=(a_x\pm b_x,a_y\pm b_y,a_z\pm b_z)=(a_x\pm b_x)\boldsymbol{i}+(a_y\pm b_y)\boldsymbol{j}+(a_z\pm b_z)\boldsymbol{k},$$

$$\lambda\boldsymbol{a}=(\lambda a_x,\lambda a_y,\lambda a_z)=\lambda a_x\boldsymbol{i}+\lambda a_y\boldsymbol{j}+\lambda a_z\boldsymbol{k}.$$

称 a_x,a_y,a_z 分别为向量 $\boldsymbol{a}=(a_x,a_y,a_z)$的 x,y,z 坐标,也称其为向量 $\boldsymbol{a}=(a_x,a_y,a_z)$分别在 x,y,z 轴上的投影,顺次记为 $\mathrm{Prj}_x\boldsymbol{a}$,$\mathrm{Prj}_y\boldsymbol{a}$,$\mathrm{Prj}_z\boldsymbol{a}$;显然,由线性运算公式(7.1)知

$$\mathrm{Prj}_x(\boldsymbol{a}\pm\boldsymbol{b})=\mathrm{Prj}_x\boldsymbol{a}\pm\mathrm{Prj}_x\boldsymbol{b},$$

$$\mathrm{Prj}_y(\boldsymbol{a}\pm\boldsymbol{b})=\mathrm{Prj}_y\boldsymbol{a}\pm\mathrm{Prj}_y\boldsymbol{b},$$

$$\mathrm{Prj}_z(\boldsymbol{a}\pm\boldsymbol{b})=\mathrm{Prj}_z\boldsymbol{a}\pm\mathrm{Prj}_z\boldsymbol{b},$$

$$\mathrm{Prj}_x\lambda\boldsymbol{a} = \lambda\mathrm{Prj}_x\boldsymbol{a},$$
$$\mathrm{Prj}_y\lambda\boldsymbol{a} = \lambda\mathrm{Prj}_y\boldsymbol{a},$$
$$\mathrm{Prj}_z\lambda\boldsymbol{a} = \lambda\mathrm{Prj}_z\boldsymbol{a}.$$

一般地,设 u 为一条射线,称为 u 轴,θ 为向量 $\boldsymbol{a}$ 与 u 轴的夹角(图 7.5),向量 $\boldsymbol{a}$ 在 u 轴上的投影记为 $\mathrm{Prj}_u\boldsymbol{a}$,则有

$$\mathrm{Prj}_u\boldsymbol{a} = |\boldsymbol{a}|\cos\theta, \tag{7.2}$$

且

$$\mathrm{Prj}_u\lambda\boldsymbol{a} = \lambda\mathrm{Prj}_u\boldsymbol{a}, \tag{7.3}$$

由图 7.6 容易得到(注意 $OA=BC$)

$$\mathrm{Prj}_u(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}) = \mathrm{Prj}_u\boldsymbol{a} + \mathrm{Prj}_u\boldsymbol{b}. \tag{7.4}$$

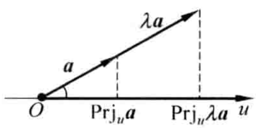

图 7.5

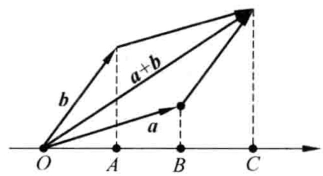

图 7.6

前面向量的平行定理可写成如下定理.

定理 7.1 设向量 $\boldsymbol{a}=(a_x,a_y,a_z)$,$\boldsymbol{b}=(b_x,b_y,b_z)$,其中 $\boldsymbol{a}\neq\boldsymbol{0}$,则 $\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}$ 的充分必要条件是

$$\frac{b_x}{a_x}=\frac{b_y}{a_y}=\frac{b_z}{a_z}.$$

证明 因为

$$\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}\Leftrightarrow\exists\lambda\in\mathbb{R},\text{使 }\boldsymbol{b}=\lambda\boldsymbol{a}\Leftrightarrow(b_x,b_y,b_z)=(\lambda a_x,\lambda a_y,\lambda a_z)$$
$$\Leftrightarrow b_x=\lambda a_x,b_y=\lambda a_y,b_z=\lambda a_z\Leftrightarrow\frac{b_x}{a_x}=\frac{b_y}{a_y}=\frac{b_z}{a_z}(=\lambda).$$

即两向量平行的充分必要条件是对应坐标成比例.

这里规定,如果向量 a 的某个坐标为 0,例如 $a_x=0$,则认为 $b_x=0$.

例 1 设 $\boldsymbol{a}=(1,-2,2)$,$\boldsymbol{b}=(0,1,-1)$,$\boldsymbol{c}=2\boldsymbol{a}-3\boldsymbol{b}$,求向量 $\boldsymbol{c}$ 在 x,y,z 轴上的投影.

解 因为

$$\boldsymbol{c}=2(1,-2,2)-3(0,1,-1)=(2,-4,4)-(0,3,-3)=(2,-7,7),$$

所以,$\boldsymbol{c}$ 在 x,y,z 轴上的投影分别为

$$\mathrm{Prj}_x\boldsymbol{a}=2,\quad \mathrm{Prj}_y\boldsymbol{a}=-7,\quad \mathrm{Prj}_z\boldsymbol{a}=7.$$

例 2 设 $\boldsymbol{a}=(2,-3,1)$,(1)求与 $\boldsymbol{a}$ 平行的所有向量;(2)求与 $\boldsymbol{a}$ 平行且在 x 轴上的投影为 -1 的向量.

解 (1) 设所求向量为 $\boldsymbol{b}=(b_x,b_y,b_z)$,则 $\boldsymbol{b}=\lambda a=(2\lambda,-3\lambda,\lambda)(\lambda\in\mathbb{R})$.