感悟数学

——数学文化与数学科导论

张从军 李锦路
王育全 吴 波
编著

科学出版社

感悟数学

——数学文化与数学学科导论

张从军　李锦路　王育全　吴　波　编著

科学出版社

北　京

内 容 简 介

本书共50讲，内容涉及数学的思想、方法、数学语言、数学的思维方式、数学的发展历史、数学家的足迹、数学美、数学教育、数学与其他学科的关系，这些内容都可以视为数学文化的内涵，另外还包括数学中的人文成分、数学与社会的联系、数学一些学科分支的介绍等。

本书适合普通高等院校经管类各专业学生阅读和作为通识教育课程的教材，适合数学与应用数学、金融数学、信息与计算科学、统计学等专业作为学科导论等相关课程的教材，也适合其他专业学生作为学习、了解数学文化的教材和参考书。

图书在版编目(CIP)数据

感悟数学：数学文化与数学学科导论/张从军等编著. —北京：科学出版社，2014. 6

ISBN 978-7-03-040692-7

Ⅰ. ①感… Ⅱ. ①张… Ⅲ. ①数学-文化 Ⅳ. ①O1

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2014)第 105346 号

责任编辑：姚莉丽 / 责任校对：李 影

责任印制：阎 磊 / 封面设计：陈 敬

科学出版社 出版

北京东黄城根北街 16 号

邮政编码：100717

http://www.sciencep.com

保定市中画美凯印刷有限公司 印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2014 年 6 月第 一 版 开本：720×1000 B5

2014 年 6 月第一次印刷 印张：19 1/4

字数：385 000

定价：42.00 元

(如有印装质量问题，我社负责调换)

前　言

“数学文化”一词，大约是 20 年前出现的，近些年来这个词的使用频率大大增加了。不少高校相继举办数学文化节、数学文化活动月、数学文化欣赏等各种相关活动。冠以数学文化之类名称的书籍也不断出现。数学文化的相关活动可谓百花齐放、异彩纷呈；数学文化的相关书籍可谓大相径庭，各取所需。

什么是数学文化？智者见智，仁者见仁。至今似乎还没有一个统一的解释。从历史上看，从古希腊和文艺复兴时期到 20 世纪的许多文化名人，如柏拉图、达·芬奇、爱因斯坦、希尔伯特、罗素、冯·诺依曼等，往往本身就是数学家。数学的发展，是伴随着一种文化现象呈现出来的。一般认为，数学的思想、方法、数学语言、数学的思维方式、数学的发展历史、数学家的足迹、数学美、数学教育、数学与其他学科的关系，都可以视为数学文化的内涵，另外还包括数学中的人文成分、数学与社会的联系等。

对于一个学习了许多数学知识的人，如果把所有的具体数学知识都忘掉了或“抽出去”，剩下的也就是数学文化。这些“数学文化”在人的头脑中残留，就形成一个人的“数学素养”。

数学的作用是不言而喻的，但对大多数人来说，可能一辈子也没有用到那些中学学过的数学知识和高等数学知识，那些数学的概念、定理、公式可能不久就会遗忘了。但他们在数学学习的过程中所得到的训练，使其思维更具条理性、逻辑性、深刻性，他们会用数学的思维方式来思考、解决问题，这大概就是数学文化的作用。

和许多高校一样，南京财经大学从 2010 年始，也定期举办数学文化节，开设了全校性的数学文化通识教育课程和数学相关专业的学科导论课程，主持承担了与数学文化课程相关联的全国高等教育科学“十五”规划重点研究课题、教育部高等理工教育数学教学研究与改革课题、江苏省高等教育教改立项研究课题。在这些工作积累的基础上，我们几经修改，完成了现在这本书《感悟数学——数学文化与数学学科导论》（我们也权且以数学文化之类冠名吧）。

本书由张从军教授提出编写思想和策划编写内容，并执笔编写了第 1～20 讲，第 39 讲；王育全教授执笔编写了第 21～29 讲，第 40～44 讲；吴波博士执笔编写了第 30～38 讲，第 45～49 讲；美国 Shawnee 州立大学终身教授李锦路博士执笔编写了第 50 讲并审阅修改了全部 50 讲内容。

本书在编写过程中，参考了大量的相关教材和资料，选用了其中的有关内容，在此谨向有关编者、作者一并表示谢意。

和通常课程的教材不同，如何编写此类既可作为教材，又可供方方面面感兴趣的读者一读的书，从选材到体例等对我们来说，都是一个新的课题，我们还在探索之中。诚恳期望有关专家、学者不吝赐教，诚恳期望使用本书的教师、同学和读者，提出并反馈宝贵意见。

编　者

2013 年 11 月 5 日

目　录

第1讲　信息时代人才的数学素养随想

21世纪的社会是一个信息社会。信息社会有两个主要特征：一是数学的应用日益广泛，二是计算机技术迅猛发展。

早在1959年，我国著名数学家华罗庚教授在《大哉数学之为用》的文章中，曾形象地概述了数学的各种应用："宇宙之大，粒子之微，火箭之速，化工之巧，地球之变，生物之谜，日用之繁，无处不用数学。"时至今日，计算机的高速计算使得许多过去无法求解的问题成为可能，大量新兴的数学方法正在被有效地采用，数学的应用范围更是急剧扩大。计算机具有处理大量信息的功能，因此定量分析的技术已经渗透到一切学科领域。如果说第二次世界大战以前，数学主要用于天文学、物理学，那么现在，数学已经深入到化学、生物学、经济学、管理学等各个学科领域了。

我们现在都能深切地感受到，计算机技术的发展已经对人类社会的全部生活（包括物质生活与文化生活）产生了十分巨大的影响。计算机被称为"改变世界的机器"是毫不为过的。

计算机最明显的功能就是能高速度地进行大量计算，这种高速计算使得求解过去无法求解的问题成为可能。因此，科学计算与理论研究、科学实验并列为科学研究的三大支柱。

综上所述，21世纪信息社会的两个重要特征，简言之就是"数学无处不在""计算机无处不在"。

数学素养是数学知识和能力的综合体现。根据上述分析，21世纪的专业人才究竟应该具备什么样的数学素养呢？我们认为，除了过去常讲的抽象思维能力、逻辑推理能力、空间想象能力、数学运算能力外，特别还应具备数学建模能力与数值计算能力（含数据处理能力），即会用数学解决实际问题，会用计算机进行科学计算。

中国科学院院士吴文俊教授在《数学教育不能从培养数学家的要求出发》一文中指出："任何数学都要讲逻辑推理，但这只是问题的一个方面，更重要的是用数学去解决问题，解决日常生活中，其他学科中出现的数学问题。学校给的数学题目都是有答案的，已知什么，求证什么，都是清楚的，题目也一定是做得出的，但是将来到了社会上，所面对的问题大多是预先不知道答案的，甚至不知道是否会有答案。这就要求培养学生的创造能力，学会处理各种实际数学问题的方法。"

中国科学院院士王梓坤在《今日数学及其应用》一文中指出:“精确定量思维是对当代科技人员共同的要求。所谓定量思维就是指人们从实际问题中提炼数学问题,抽象化为数学模型,用数学计算求出此模型的解或近似解,然后回到现实中进行检验,必要时修改模型使之更切合实际,最后编制解决问题的软件包,以便得到更广泛的方便的应用。”

1992 年美国工业与应用数学学会的一篇论文指出:“一切科学与工程技术人员的教育必须包括越来越多的数学和计算科学的内容。数学建模和相伴的计算正在成为工程设计过程中的关键工具。”美国科学、工程和公共事务政策委员会在一份报告中指出:“今天,在技术科学中最有用的数学研究领域是数值分析和数学建模。”

21 世纪培养的各类专业科技人才,应该具有将他所涉及的专业实际问题建立数学模型的能力,这样才能在实际工作中发挥更大的创造性。

1.1 数学专业的学生要了解机器证明的思想

以沉思默想为主的传统的数学研究方式虽有数千年光荣历史,但人的脑力劳动毕竟有其生理极限,数学规律正如其他自然规律一样是客观存在,它不会迁就于人类的能力。譬如“四色定理”在 1976 年已被两位美国科学家用计算机予以证明,但迄今仍有一些学者努力寻求不依赖于电脑的“人脑证明”。谁也不知道对这一具体问题这样的证明是否存在。可以肯定的是,一定存在许多足够复杂的命题,对这些命题人脑证明是难以实现的。例如,一个举重运动员无论多么优秀,人们不能指望他有朝一日能徒手举起一艘航空母舰。数学证明的冗长和复杂已经到了常常难以对其作出鉴定的地步。数学文稿的审查正在逐渐变为一项人力所不能胜任的工作,这或许将导致新一轮的数学危机。

我们知道,大部分的推理结果在一定时期内是无法用实践来检验的,所以必须有手段来保证推理的严密可靠,数学方法是保证严密推理的光辉典范,在这个意义上它是不应该消逝的,将会消逝的是那种艰苦卓绝的手工推理方式。作为智力劳动机械化的前驱,数学研究正在逐步走向机械化。

让我们看一个机器证明的例子,进而理解机器证明的基本思想。

大家在中学里都学过什么叫恒等式,下面的等式

$$(x-1)^2=x^2-2x+1 \tag{1.1}$$

就是一个恒等式。能否不用演绎的办法而用归纳的办法来证明它是一个恒等式呢?

用 $x=1$ 代入,两边都得 0;用 $x=2$ 代入,两边都得 1;用 $x=3$ 代入,两边都得 4。

这样举了三个例子之后，能不能肯定式(1.1)就是恒等式了呢？恒等式就是要求对 x 取所有的数值时两边都相等。以上验证了三个 x 的值，怎么能断定它一定恒等呢？

其实，这样验证了三次已经证明了式(1.1)是恒等式。道理是：如果它不是恒等式，它一定是二次或一次方程，这种方程不可能有三个根。现在 $x=1,2,3$ 都是“根”，说明它是恒等式。

这里，我们用数学上承认的演绎法证明了归纳推理的有效性。

其实，一个例子就能证明式(1.1)是恒等式。取 $x=10$，代入两边都是 81，就说明了式(1.1)是恒等式。

因为如果式(1.1)不是恒等式，就可以将它整理成一个二次或一次方程：

$$ax^2+bx+c=0 \tag{1.2}$$

因为式(1.1)左边展开后至多有 4 项，每项系数都是 ±1，右边系数绝对值最大的是 2，因此 a,b,c 都是绝对值不大于 6 的整数。用 $x=10$ 代入方程(1.2)得

$$100a+10b+c=0 \tag{1.3}$$

因而

$$|100a|=|10b+c|\leqslant 66 \tag{1.4}$$

因为 $|a|\leqslant 6$，所以 $a=0$。

由式(1.3)得

$$10b+c=0$$

因而

$$|10b|=|c|\leqslant 6 \tag{1.5}$$

所以又有 $b=0$，从而 $c=0$。

这就证明了方程(1.2)是恒等式。

这个方法也适用于检验高次的多变元的代数等式是不是恒等式，只用一个例子就可以了。当次数越高、变元越多时，例子所涉及的数值就越大。

这些数学事实表明，归纳推理可以有效地证明一般性的问题，甚至可以用一个例子证明一般的命题，而特例的验证可以在计算机中进行，这正是“机器证明定理”的基本思想之一。

用举例的方法证明几何定理的研究，这是在近 30 年活跃起来的领域。企图用几何证明数学定理，这是历史上一些杰出的数学家与哲学家美妙的梦想。17 世纪法国哲学家、数学家，解析几何的创始人笛卡儿曾经有过一个大胆的设想：“一切问题化为数学问题，一切数学问题化为代数问题，一切代数问题化为代数方程求解问题”。笛卡儿想得太简单化了，但这种设想使他用坐标方法——解析几何方法，把初等几何问题化成了代数问题，对数学作出了杰出的贡献。如果笛卡儿的设想得以实现，一切科学问题都可以机械地解决了，因为代数方程求解是有机械法则的。

20世纪40年代后期，电子计算机问世以后，各国数学家先后提出过几种用机器证明初等几何定理的方法，但一直未能在计算机上真正地证明非平凡的几何定理(美国人证明的四色定理，不属于纯粹的几何定理)。直到1977年，中国数学家吴文俊教授发表了初等几何机器证明新方法之后，在电子计算机上证明初等几何定理才成为现实。一个古老的梦开始实现了。用吴氏方法已在计算机上证明了600多条不平凡的几何定理，其中包括一些新发现的定理。

吴氏方法的基本思想是：先把几何问题化为代数问题，再把代数问题化为代数恒等式的检验问题，代数恒等式的检验是机械的，问题的转化过程也是机械的，整个问题也就机械化了。在吴氏方法的基础上，1986年，洪加威发表了他的引起广泛兴趣的结果：对于相当广泛的一类几何命题，只要检验一个实例便能确定这条命题是不是成立。

特例的检验，竟能代替演绎推理的证明。这不仅是深刻的数学思想，也具极高的哲学意味。微观上的偶然性，呈现出宏观上的必然性。普遍性寓于特殊性之中。

1.2 财经类各专业的学生要掌握数学软件的使用

计算机已成为经济和管理研究强有力的甚至是不可或缺的工具。在许许多多的经济理论和实证研究中，大量应用计算机进行辅助分析和处理，借助Mathematica、Matlab、Lingo等数学与通用软件系统进行符号计算、数值计算与计算机绘图，结合理论研究分析，根据具体问题研制相应的各种计算机辅助分析软件及前置和结果处理程序。研究工作往往必须将理论证明与计算机处理相结合完成。计算机可以迅速完成用人工难以甚至无法处理的大量繁琐、复杂、困难的运算与推导工作。

Mathematica数学软件可用于数值计算、符号运算、函数作图，就像通常的计算器一样方便。例如，分解因式、解方程组、解微分方程，求极限、求函数的导数、微分、积分，三角函数表，幂级数展开，求矩阵的乘积，求矩阵的逆，可以到任意位，可以作一元函数的图形，二元函数的图形等。

Matlab语言是一种高效率的用于科学工程计算的高级语言。与Basic、Fortran、C等语言比较，Matlab的语法规则简单，更加贴近人的思维方式。用Matlab写程序，犹如在一张演算纸上排列公式和求解问题，编程效率很高，因此称为“演算纸式的”科学工程的算法语言。Matlab语言调试方便，调试过程中可设置中断点，存储多个中间结果，把编辑、编译、连接和执行融为一体，并能快速排除程序中的错误。可以说，Matlab不仅是一种语言，而且在广义上是一种语言开发系统。Matlab语言扩充能力强，能够方便地扩展其功能和方便地调用Fortran语言和C语言的已有程序，从而可充分利用已有的程序资源。Matlab语言在进行矩阵运算方

面，显得特别简捷、高效和方便。随着 Matlab 版本的不断更新，其功能越来越强，使之在诸如一般数值计算、数字信号处理、系统识别、自动控制、振动理论、时序分析与建模、优化设计、神经网络控制、化学统计学、动态仿真系统、特殊函数和图形等领域表现出一般高级语言难以比拟的优势，并且可方便地用于几乎所有的科学和工程计算的各个方面。

Matlab 语言易学易用，不要求使用者有高深的数学和程序语言知识，不需要使用者深刻了解算法和编程技巧。只要将数学方程算式按 Matlab 语言规则输入给计算机，Matlab 将如你所愿给出该问题的相应解。

1.3 学会数学实验，提高动手能力

计算机仿真实验(即计算机模拟)，就是将所要研究问题的数学模型转换为输入计算机进行运算的形式，或将所要研究的问题设计成实验，将图形显示在计算机屏幕上，由计算机进行大量计算，甚至推导与证明，得出某种新的结论或新的发现。这种研究方法正在部分地代替实际实验或成为其重要的补充。一些“实验数学家”正在创立一种新的数学研究方法，即主要通过计算机实验从事新的发现。在这些数学家看来，数学正在成为一门“实验科学”。也有一些数学家认为，由于计算机的出现，今日数学已不仅是一门科学，还是一种关键的普遍适用的技术。

“数学实验”可以理解为“数学模型方法”的初步实践，“数学模型方法”已成为科学技术中常用的非常重要的方法，它是数学和其他科学技术之间的媒介和桥梁。所谓“数学模型”是指利用数学语言模拟现实，即将某种事物的主要特征、主要关系抽象出来，用数学语言概括地或近似地表达出来的一种数学结构。所谓“数学模型方法”是指利用数学模型解决实际问题的一般数学方法。用“数学模型方法”解决实际问题的过程是根据实际问题的特点和要求，作出某些合理的假设，使问题简化，并进行抽象概括，建立数学模型，然后研究求解所建立的数学模型方法与算法。最后将求解所得到的结果返回到实际中去解释、检验。

“数学实验”具有以下特点：

以问题为载体——通过实际问题的解决，培养应用数学知识解决实际问题的意识与能力。因此选择适当的实际问题就十分重要。

以计算机为手段——实际问题的解决离不开数值计算，计算机的强大功能正是高速计算。

以软件为工具——科学计算工具的主体是各种软件，而它们的共同基础是数学软件工具，合理使用软件工具可以使有限的资源发挥更好的效益，避免低水平的重复劳动。因此，进行数学实验要充分利用数学软件。

以学生为主体——“数学实验”既然是实验，就要求学生多动手、多上机，多练，

在老师指导下探索建立模型解决问题的方法，在失败与成功中获得真知。

“数学实验”是一种新的教学和学习模式，是大学数学学习的重要组成部分，是学好微积分、线性代数、概率论与数理统计等课程的重要环节，它将数学知识、数学建模与计算机应用三者融为一体。通过数学实验深入理解数学基本概念和基本理论，熟悉常用的数学软件，培养运用所学知识建立数学模型，使用计算机解决实际问题的能力。

可以毫不夸张地说，如果你具备了较高的、全面的、当今人才所需的数学素养，你就拥有了通往成功之门的钥匙。

参 考 文 献

[1] 张景中. 数学与哲学. 长沙:湖南教育出版社,1990.

第 2 讲　数学的作用和魅力

数学发展的历史非常悠久，大约在一万多年前，人类从生产实践中就逐渐形成了“数”和“形”的概念。

17 世纪以前是数学发展的初级阶段，其内容主要是常量数学，如初等几何、初等代数；从文艺复兴时期开始，数学发展进入了第二个阶段，即变量数学阶段，产生了微积分、解析几何、高等代数；从 19 世纪开始，数学获得了巨大的发展，形成了近代数学阶段，产生了实变函数、泛函分析、非欧几何、拓扑学、近世代数、计算数学、数理逻辑等新的数学分支。近半个多世纪以来，现代自然科学和技术的发展，正在改变着传统的学科分类与科学研究的方法。“数、理、化、天、地、生”这些曾经以纵向发展为主的基础学科与日新月异的技术相结合，使用数值、解析和图形并举的方法，推出了横跨多种学科门类的新兴领域，在数学科学内也产生了新的研究领域和方法，数学发展至今，已经成为拥有 100 多个分支的科学体系。数学科学按其内容可分成五个大学科：纯粹（基础）数学、应用数学、计算数学、运筹与控制和概率论与数理统计。

随着科学技术的迅猛发展，数学的地位日益提高，这是因为当今科学技术发展的一个重要特点是高度的、全面的定量化。定量化实际上就是数学化。

被后人称为“数学王子”的德国大数学家高斯曾说过：“数学是科学之王，数论是数学之王，它常常屈尊去为天文学和其他自然科学效劳，但在所有的关系中，它都堪称第一”。

我们先从以下几方面谈一谈对数学作用的认识。

2.1　数学是一切科学的共同语言

享有“近代自然科学之父”尊称的大物理学家伽利略说过：“展现在我们眼前的宇宙像一本用数学语言写成的大书，如不掌握数学符号语言，就像在黑暗的迷宫里游荡，什么也认识不清。”

由于在量子电动力学方面作出突出贡献而于 1965 年获得了诺贝尔物理学奖的物理学家费曼曾说过：“若是没有数学语言，宇宙似乎是不可描述的。”

目前，社会的数学化程度正日益提高，数学语言已成为人类社会中交流和储存信息的重要手段。

2.2 数学是打开其他科学大门的钥匙

在17世纪工业革命时代,弗朗西斯·培根曾提出"知识就是力量"的响亮口号,同时还说"数学是打开科学大门的钥匙"。

物理学家伦琴因发现X射线而成为1901年开始的诺贝尔物理学奖的第一位获奖者,当有人问他需要什么时,他的回答是:"第一是数学,第二是数学,第三是数学。"

对计算机做出了划时代贡献的冯·诺依曼认为:"数学处于人类智能的中心领域——数学方法渗透、支配着一切自然科学的理论分支——它已越来越成为衡量成就的主要标志。"

马克思也说:"一门科学只有当它达到能够成功地运用数学时,才算真正发展了。"

回顾科学发展的历史,凡具有划时代意义的科学理论与实践的成就,无一例外地借助于数学的力量。

2.3 数学是其他学科的显微镜

有人把哲学与数学比喻为人类的望远镜和显微镜。

哲学家谈论原子在物理学家研究原子之前,哲学家谈论元素在化学家研究元素之前,哲学家谈论无限在数学家研究无限之前。哲学是人类认识世界的先导,它用于观察前方。数学则是对一门学科的对象进行定量与细致的研究。

哲学从一门学科退出,意味着这门学科的诞生;数学进入一门学科,意味着这门学科的成熟。

哲学在任何具体学科领域都无法工作,但它可以从事任何具体学科无法完成的工作,它为这个学科提供思想和前瞻。数学在任何具体学科领域都可能施展,但它的应用必须结合具体学科,它为这个学科提供工具和支撑。

从哲学的观点来看,任何事物都是量和质的统一体,都有自身量的方面的规律,不掌握量的规律,就不可能对各种事物的质获得明确、清晰的认识。而数学正是一门研究量的科学,它不断地在总结和积累量的规律性,因而必然成为人们认识世界的有力工具。

2.4 数学是人类训练思维的体操

数学成果是人类文明发展史上理性智慧的结晶。数学学习和研究需要逻辑思维与直觉思维、发散思维与收敛思维;需要演绎与归纳;需要概括、抽象、类比、转

化、联想、反推;需要渐悟与顿悟。这些都是人们的高级心智活动。

数学抽象有几个具有普遍意义的基本法则:特征分离概括化、关系定性特征化、新元添加完备化、结构关联对偶化、公理更新和谐化。这些都是思维反映数学客体必须遵循的客观规律。

数学研究的东西一次次抽象,使人头脑中已难以想象。但数学用符号、语言一步一步可以讲得很严格,推理论证毫不含糊。

数学不肯定“是什么”的问题,它只说“如果是什么,那就如何如何”,数学命题都是带有假定的,这是数学的特点。

数学学习对于训练思维的严谨、深刻、条理具有不可替代的作用。

2.5 数学是一门创造美的艺术

美国代数学家哈尔莫斯说:“数学是创造性艺术,因为数学家创造了美好的新概念;数学是创造性艺术,因为数学家像艺术家一样地生活,一样地思索;数学是创造性艺术,因为数学家这样对待它。”

“美”是艺术家所追求的一种境界。其实,“美”也是数学中公认的一种评价标准。当数学家创造了一种简便的方法,做出一种简化的证明,找到一种新的应用时,就会在内心深处获得一种美的享受,数学中的“美”体现在和谐性、对称性、简洁性等诸多方面。

著名数学家庞加莱曾说:“科学家研究自然是因为他爱自然,他之所以爱自然,是因为自然是美好的。如果自然不美,就不值得理解,如果自然不值得理解,生活就毫无意义。当然,这里所说的美,不是那种激发感观的美,也不是质地美和表现美……我说的是各部分之间有和谐秩序的深刻美,是人的纯洁心智所能掌握的美。”

数学能陶冶人的美感,增进理性的审美能力。一个人数学造诣越深,越是拥有一种直觉力,这种直觉力实际上就是理性的洞察力,也是由美感所驱动的选择力,这种能力有助于使数学成为人们探索宇宙奥秘和揭示规律的重要力量。

正如德国数学家皮索特和萨马斯基在合著的《普通数学》中所说:“数学是艺术又是科学,它也是一种智力游戏,然而它又是描绘现实世界的一种方式和创造现实世界的一种力量。”

那么,如何领悟数学的魅力呢?

当你对数学所揭示的自然规律浮想联翩时,当你对数学本身的简洁与和谐回味无穷时,当你对数学家们的成就拍案叫绝时,当你对复杂深奥的数学问题豁然开朗时,你的内心会有说不出的惊奇、喜悦和陶醉,这时你事实上已经领悟了数学的魅力。

王元明教授在《数学是什么》一书中，认为可从以下几个方面来领悟数学的魅力。

诱人的猜想。

数学上有许多重要的猜想，所谓猜想就是由人们的直观或直觉上的判断认为可能成立但又未经严格证明的命题。一个深刻的猜想能成为推动数学不断向前发展的动力。如哥德巴赫猜想、费马关于素数的猜想、波利亚猜想、欧拉猜想——哥尼斯堡七桥问题等。

神奇的预言。

数学正确地反映了现实世界中的空间形式与数量关系，表现出了惊人的准确性和预见性。在自然科学中，由于数学推导而得出的结论可以先于经验事实而成为神奇的预言，这样的例子举不胜举。

1781 年，人们发现了太阳系中第 6 颗行星天王星。实际观测数据表明，天王星的运行规律与计算结果差异甚大。是万有引力定律有问题，还是有其他原因影响天王星的正常运行？1844～1845 年，两个年轻人——英国的耶得默斯和法国的勒威烈各自独立地根据万有引力定律和天王星的观测资料，进行了大量的计算，推算出在天王星附近还有一颗行星，并给出了其运行轨道和位置。

1845 年 9 月，耶得默斯通知了英国天文台，可惜未被重视。一年以后，德国天文台根据勒威烈所预言的位置，找到了那颗行星，即海王星。这是人类历史上第一次通过数学计算准确地预言未知行星的事例。

美妙的和谐。

客观世界中的万事万物运行有序、和谐统一。因此，作为研究客观世界的形与数的数学也以其和谐、有序而令人陶醉。

让我们来欣赏一下黄金分割点：把一条长为 L 的线段分为长度分别为 L_1 与 L_2 的两部分，使 L_1 为 L 与 L_2 的比例中项，即 $\frac{L}{L_1}=\frac{L_1}{L_2}$，由此可得 $\frac{L_1}{L}=\frac{\sqrt{5}-1}{2}=0.618$，其倒数为 $\frac{L}{L_1}=\frac{\sqrt{5}+1}{2}=1.618$。

人们把这两个比值称为黄金比。17 世纪著名的德国天文学家开普勒曾把黄金分割与勾股定理并列，誉为古希腊几何学中的两颗明珠。黄金分割是古希腊毕达哥拉斯学派所发现，正五角星是该学派的标志，正五角星相邻两个顶点的距离（如 AB）与其边长（如 AC）之比，或者说正五角形边长与其对角线之比，正好是黄金比。

文艺复兴时期，有好几位颇具几何修养的艺术大师，如丢勒(Durer)、达·芬奇(Da Vinci)等人，他们把几何学上对图形的定量分析应用于一般的绘画艺术，给绘画艺术建立起了科学理论基础。在这一过程中，他们发现黄金分割与人们审美观