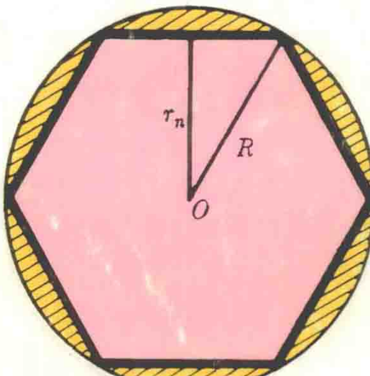
高级中学试验课本

数学 V



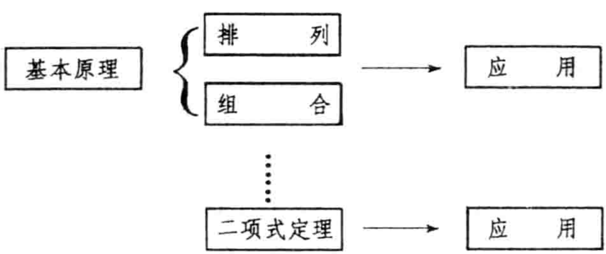
人民教育出版社

第一章　排列、组合、二项式定理

排列与组合的内容是学习概率的预备知识，也是进一步学习数理统计、近世代数、组合数学等其他高等数学必备的基础；由于它的内容比较抽象，解题方法特殊，所以这部分内容又是发展逻辑思维能力的很好题材.

二项式定理是在初中乘法公式及组合数公式的基础上学习的内容，它与概率论中二项分布、微积分中求导公式的推导都有极密切的联系，是进一步学习数学时经常用到的基础知识.

本章要学习的主要内容如下面框图所示



一　排列与组合

1.1　基本原理

我们先看下面的问题：

从甲地到乙地，可以乘火车，也可以乘汽车，还可以乘轮船．一天中，火车有 4 班，汽车有 2 班，轮船有 3 班，那么一天中乘坐这些交通工具从甲地到乙地共有多少种不同的走法？

因为一天中乘火车有 4 种走法，乘汽车有 2 种走法，乘轮船有 3 种走法，每一种走法都可以从甲地到达乙地．因此，一天中乘坐这些交通工具从甲地到乙地共有

$$4+2+3=9$$

种不同的走法．

一般地，有如下原理：

加法原理　做一件事，完成它可以有 n 类办法，在第一类办法中有 m_1 种不同的方法，在第二类办法中有 m_2 种不同的方法，……，在第 n 类办法中有 m_n 种不同的方法．那么完成这件事共有

$$N=m_1+m_2+\cdots+m_n$$

种不同的方法．

我们再看下面的问题：

由 A 村去 B 村的道路有 3 条，由 B 村去 C 村的道路有 2 条（图 1-1）．从 A 村经 B 村去 C 村，共有多少种不同的走法？

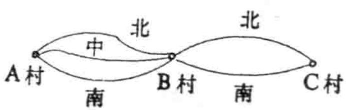


图　1-1

这里，从 A 村到 B 村有 3 种不同的走法，按这 3 种走法中的每一种走法到达 B 村后，再从 B 村到 C 村又有 2 种不同

的走法. 因此,从 A 村经 B 村去 C 村共有

$$3\times2=6$$

种不同的走法.

一般地,有如下原理:

乘法原理　做一件事,完成它需要分成 n 个步骤,做第一步有 m_1 种不同的方法,做第二步有 m_2 种不同的方法,……,做第 n 步有 m_n 种不同的方法. 那么完成这件事共有

$$N=m_1\times m_2\times\cdots\times m_n$$

种不同的方法.

注: 加法原理的前提是"做一件事,完成它可以有 n 类办法",乘法原理的前提是"做一件事,完成它需要分成 n 个步骤",这两句话可以简称加法原理的前提是"分类",乘法原理的前提是"分步",这正是两个基本原理的主要区别.

例 1　书架上层放有 6 本不同的数学书,下层放有 5 本不同的语文书.

(1) 从中任取一本,有多少种不同的取法?

(2) 从中任取数学书与语文书各一本,有多少种不同的取法?

分析: 书架中的书分为两类,一类是在上层的不同的数学书,一类是在下层的不同的语文书,求从中任取一本书共有多少种取法,可根据加法原理考虑;求从中任取数学书与语文书各一本有多少种取法,可根据乘法原理考虑.

解: (1) 从书架上任取一本书,有两类办法:第一类办法是从上层取数学书,可以从 6 本书中任取一本,有 6 种方法;第二类办法是从下层取语文书,可以从 5 本书中任取一

本，有 5 种方法．根据加法原理，得到不同的取法的种数是

$$N=m_1+m_2=6+5=11.$$

答：从书架上任取一本书，有 11 种不同的取法．

（2）从书架上任取数学书与语文书各一本，可以分成两个步骤完成：第一步取一本数学书，有 6 种方法；第二步取一本语文书，有 5 种方法．根据乘法原理，得到不同的取法的种数是

$$N=m_1\times m_2=6\times 5=30.$$

答：从书架上取数学书与语文书各一本，有 30 种不同的方法．

注：本例中“从中任取一本书”、“从中任取数学书与语文书各一本”，就是基本原理中的“做一件事”，要完成这件事首先要考虑完成这件事的方法是否可以分类？是否需要分步？如果完成这件事可以分类就用加法原理来解决，如果完成这件事需要分步就用乘法原理来解决．

例 2　由数字 1，2，3，4，5 可以组成多少个三位数（各位上的数字允许重复）？

分析：组成的三位数字可分为三个步骤，第一步是百位上数字，第二步是十位上数字，第三步是个位上数字，因此，需要用乘法原理．

解：要组成一个三位数可以分成三个步骤完成：第一步确定百位上的数字，从 5 个数字中任选一个数字，共有 5 种选法；第二步确定十位上的数字，由于数字允许重复，仍有 5 种选法；第三步确定个位上的数字，同理，它也有 5 种选法．根据乘法原理得到可以组成的三位数的个数是

$$N=5\times5\times5=5^3=125.$$

答：可以组成125个三位数.

例3 将3封信投入6个信箱内，有多少种不同的投法？

分析：这个题可以分三步考虑，第一步先投第一封信，因为有6个信箱，因此，有6种不同的投法；第二步考虑投第二封信；第三步考虑投第三封信；这三步都完成才算做完这件事，因此，可以考虑用乘法原理来解此题.

解：第一步先投第一封信，因为有6个信箱，所以有6种不同的投法；第二步投第二封信，同样有6种投法；第三步投第三封信，同样也有6种投法，这三步都完成才是一种投法，根据乘法原理，共有不同的投法有

$$6\times6\times6=6^3=216(\text{种}).$$

答：共有216种不同的投法.

注：这类问题是一种典型问题．例如3个球投入6个坛子，有多少种不同的投法，就属于这类问题；又如号码锁开锁的号码构成种数也属于这类问题.

习　题　一

1. 一件工作可以用两种方法完成，有5人会用第一种方法完成，另有4人会用第二种方法完成，选出一个人来完成这件工作，共有多少种选法？
2. 在读书活动中，一个学生要从2本科技书、2本政治书、3本文艺书里任选一本，共有多少种不同的选法？
3. 一名儿童做加法游戏．在一个红口袋中装着20张分别

标有数 1,2,…,19,20 的红卡片,从中任抽一张,把上面的数作为加数;在另一个黄口袋中装着 10 张分别标有数 1,2,…,9,10 的黄卡片,从中任抽一张,把上面的数作为加数.这名儿童一共可以列出多少个加法式子?

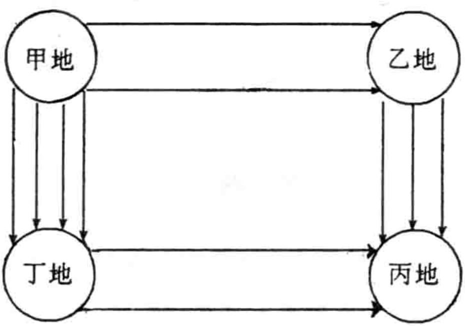
4. 乘积 $(a_1+a_2+a_3)(b_1+b_2+b_3+b_4)(c_1+c_2+c_3+c_4+c_5)$ 展开后共有多少项?

5. 一个口袋内装有 5 个小球,另一个口袋内装有 4 个小球,所有这些小球的颜色互不相同.

(1) 从两个口袋内任取一个小球,有多少种不同的取法?

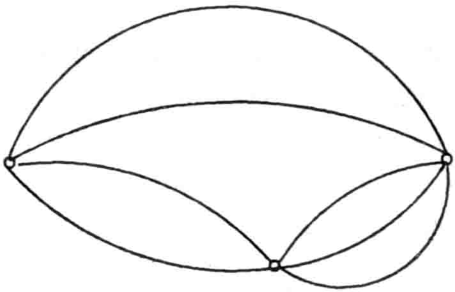
(2) 从两个口袋内各取一个小球,有多少种不同的取法?

6. 如图,从甲地到乙地有 2 条路可通,从乙地到丙地有 3 条路可通;从甲地到丁地有 4 条路可通,从丁地到丙地有 2 条路可通.从甲地到丙地共有多少种不同的走法?



(第 6 题)

7. 如图,从甲地到乙地有 2 条陆路可走,从乙地到丙地有 3 条陆路可走,又从甲地不经过乙地到丙地有 2 条水路可走.



(第 7 题)

(1) 从甲地经乙地到丙地有多少种不同的走法?

(2) 从甲地到丙地共有多少种不同的走法?

研 究 题

1. 在所有的两位自然数中，个位数字小于十位数字的两位数共有多少个?
2. x 取 1，2,3;y 取 1,2,3,4,5. 问可以组成多少个不同的点 $A(x, y)$.
3. 求 360 有多少个正约数(包括 1 和 360 在内).

1.2 排列

我们看下面的问题:

问题 1 北京、上海、广州三个民航站之间的直达航线，需要准备多少种不同的飞机票?

这个问题就是从北京、上海、广州三个民航站中，每次取出两个站,按照起点站在前、终点站在后的顺序排列，求一共

有多少种不同的排法.

首先确定起点站,在三个站中,任选一个站为起点站，有3种方法;其次确定终点站，当选定起点站以后，终点站就只能在其余的两个站中选,因此,有2种方法. 那么，根据乘法原理,在三个民航站中,每次取两个,按起点站在前、终点站在后的顺序排列的不同方法共有

$$3\times 2=6$$

种. 也就是说,需要准备如下6种不同的飞机票:

起点站	终点站	飞机票
北京	上海	北京——上海
	广州	北京——广州
上海	北京	上海——北京
	广州	上海——广州
广州	北京	广州——北京
	上海	广州——上海

问题2 有红、黄、绿三种颜色的旗子，把这不同颜色的三面旗子全部取出来,排成一定的顺序,升挂起来，表示一个信号,问总共可以表示多少种不同的信号?

这个问题就是从红、黄、绿三种颜色的旗子，每次全部取出来按照一定的顺序排列,每一种排列顺序就表示一种信号,求一共有多少种不同的信号，就是求一共有多少种不同的排列方法.

我们可以这样考虑,将红、黄、绿三种颜色的旗子排在上、中、下三个位置,求排列方式有多少种可以分三步来排：先排

上端，因为有三种颜色的旗子，所以排在上端共有 3 种方法；再排中间位置，当上端排好后，还余两种旗子，所以有 2 种方法；最后排下端位置，当上端和中间位置都排完后最后只剩一面旗子，所以有 1 种排法，那么，根据乘法原理，三种颜色的旗子，按上、中、下的位置排成一排，共有不同的排法

$$3\times2\times1=6$$

种，也就是说，可以排成如下 6 种不同的顺序，表示 6 种信号：

红黄绿　红绿黄　黄红绿　黄绿红　绿红黄　绿黄红

问题 3　由数字 1,2,3,4 可以组成多少个没有重复数字的三位数？

这个问题就是从 1,2,3,4 这四个数字中，每次取出三个，按照百位、十位、个位的顺序排列起来，求一共有多少种不同的排法.

第一步，先确定百位上的数字，在 1,2,3,4 这四个数字中任取一个，有 4 种方法；

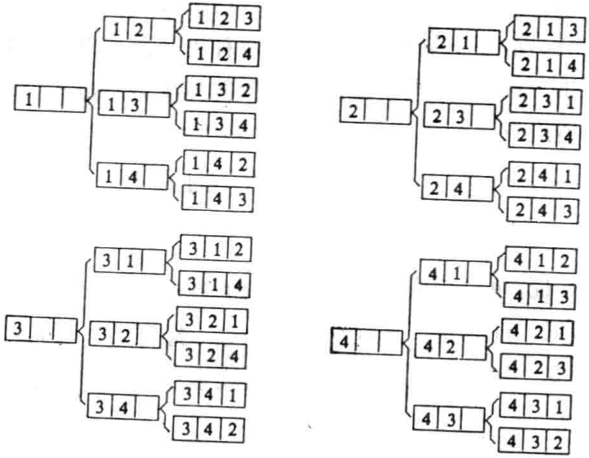
第二步，确定十位上的数字，当百位上的数字确定以后，十位上的数字只能从余下的三个数字中取，有 3 种方法；

第三步，确定个位上的数字，当百位、十位上的数字都确定以后，个位上的数字只能从余下的两个数字中取，有 2 种方法.

根据乘法原理，从四个不同的数字中，每次取出三个排成一个三位数的方法共有

$$4\times3\times2=24$$

种. 也就是说，可以排成 24 个不同的三位数. 具体排法如下



我们把被取的对象(如上面问题中的民航站、旗子、数字)叫做**元素**. 上面的问题 1,就是从 3 个不同的元素中,任取 2 个,然后按一定的顺序排成一列,求一共有多少种不同的排法;问题 2,就是从 3 个不同的元素中,取 3 个,然后按照一定的顺序排成一列,求一共有多少种不同的排法;问题 3,就是从 4 个不同的元素中,任取 3 个,然后按一定的顺序排成一列,求一共有多少种不同的排法.

一般地说,从 n 个不同元素中,任取 $m(m\leqslant n)$ 个元素(本章只研究被取出的元素各不相同的情况),按照一定的顺序排成一列,叫做从 n 个不同元素中取出 m 个元素的一个**排列**.

从排列的定义知道,如果两个排列相同,不仅这两个排列的元素必须完全相同,而且排列的顺序也必须完全相同. 如果两个排列所含的元素不完全相同,它们就是两个不同的排列,例如问题 1 中的飞机票"上海—北京"和"上海—广州",它

们所含的元素不相同，所以它们是两个不同的排列. 即使所含的元素完全相同，但是排列的顺序不同，它们也是两个不同的排列，例如问题 3 中的三位数“213”和“231”，虽然它们所含的元素完全相同，但是排列的顺序不相同，也是两个不同的排列.

在实际问题中，有时需要写出某个排列问题的所有排列，那么，怎样写才能做到既不重复，又不遗漏呢？我们通过下面例题进行说明.

例 1 说明从 4 个元素 a,b,c,d 中每次取出 1 个元素、2 个元素、3 个元素的排列的写法.

解： 从 4 个元素 a,b,c,d 中每次取出一个元素的排列写法是

$$a;b;c;d.$$

从 4 个元素 a,b,c,d 中每次取出 2 个元素的排列写法可以这样来写：第一个位置上的元素是 4 种写法，我们可以把 a,b,c,d 任意一个元素写在第一个位置上；可以写 a，或写 b，或写 c，或写 d，有 4 种写法；第一个位置上的元素写好后，第二个位置上的元素的写法就有 3 种. 例如，第一个位置上写元素 a，那么第二个位置上就只能写 b,c,d 三个元素，即 ab,ac,ad. 如果第一个位置上写元素 b，那么第二个位置上就只能写元素 a,c,d 三个元素，即 ba,bc,bd. 如果第一个位置上写元素 c，那么第二个位置上就只能写元素 a,b,d 三个元素，即 ca,cb,cd. 第一个位置上写元素 d，那么第二个位置上就只能写 a,b,c 三个元素，即 da,db,dc.

从图 1-2 中可以清楚地看出，从 4 个元素 a,b,c,d 中每

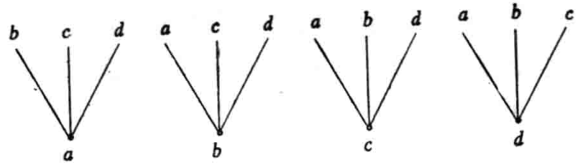


图 1-2

次取出两个元素所有不同的排列是

ab	ba	ca	da
ac	bc	cb	db
ad	bd	cd	dc

假如从 4 个元素 a,b,c,d 中每次取出 3 个元素的所有排列，类似地可以列出如图 1-3 所示.

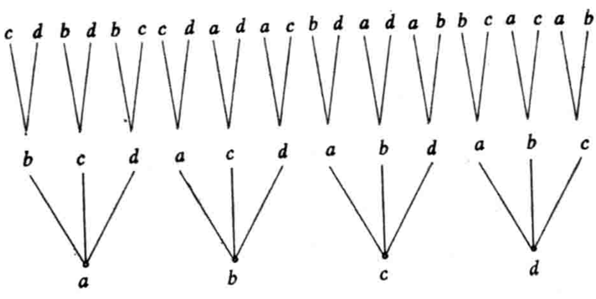


图 1-3

由此可以写出所有的排列:

abc	bac	cab	dab
abd	bad	cad	dac
acb	bca	cba	dba

$acd \quad bcd \quad cbd \quad dbc$

$adb \quad bda \quad cda \quad dca$

$adc \quad bdc \quad cdb \quad dcb$

思考题 在例 1 中，从 4 个元素每次取出 3 个元素的排列共多少个？不必排，能否用乘法原理算出有多少个排列？

例 2 从字母 a,b,c,d 每次取出 4 个的排列，根据乘法原理求一共有多少个排列？如果按字典排列法(即按给定的字母顺序排列)，由排列 $abcd$ 排到 $dcba$，当排到 $bdca$ 时是第几个排列？

分析： 求从字母 a,b,c,d 中取 4 个的排列个数，可以分四步排，再根据乘法原理求出一共有多少个排列.

所谓字典排列法就是按英文字母或给定字母的顺序，第一位字母在前的必须排在前面，第一位上的字母相同时，第二位上的字母在前的必须排在前面，等等. 求从 $abcd$ 排到 $dcba$ 当排到 $bdca$ 时是第几个排列，可以先计算出 a 排在第一个位置上的排列有多少个，再计算出 b 排在第一个位置上，a 排在第二个位置上有多少个，依此计算到 $bdca$ 为止，即可求出是第几个排列.

解： 假设有排好顺序的四个位置，求从 a,b,c,d 中取 4 个元素的排列，相当于将这四个字母按顺序填到这 4 个位置，求一共有多少种方法.

第一步，先排第一个位置上的字母，可以从 4 个字母中任取一个填空，有 4 种方法；

第二步，确定排在第二个位置上的字母，可以从剩下的 3

个字母中任取一个填空，有 3 种方法；

第三步，确定排在第三个位置上的字母，可以从剩下的 2 个字母中任取一个填空，有 2 种方法；

第四步，将只剩的一个字母，填在第四个空中，有 1 种方法.

于是，根据乘法原理，得到排列的种数为

$$4\times3\times2\times1=24$$

种.

下面计算按字典排列，从 $abcd$ 排到 $bdca$ 是第几个排列.

由上述分析可如下计算：

第一个位置排 a，根据乘法原理可以计算出共有排列 $3\times2\times1=6$ 个；

第一个位置排 b，第二个位置排 a，共有排列 $2\times1=2$ 个；

第一个位置排 b，第二个位置排 c，共有排列 $2\times1=2$ 个；

第一个位置排 b，第二个位置排 d，共有排列 $2\times1=2$ 个，而这两个排列中最后一个即为

$$bdca.$$

也就是说，排列 $bdca$ 是第

$$6+2+2+2=12$$

个排列.

思考题 在本例中，按字典排列法，第 18 个排列是什么？

1.3 排列数公式

从上节例 1 的排法知道：4 个不同元素取出 2 个元素的

所有排列的个数为 12,我们把个数 12 叫做从 4 个不同元素中取出 2 个元素的排列数，那么从 4 个不同元素中取出 3 个元素的排列数为 24.

从 n 个不同元素中取出 $m(m\leqslant n)$ 个元素的所有排列的个数,叫做从 n 个不同元素中取出 m 个元素的**排列数**,用符号 P_n^m 表示❶.

例如，从 8 个不同元素中取出 5 个元素的排列数表示为 P_8^5，从 7 个不同元素中取出 6 个元素的排列数表示为 P_7^6.

注意排列与排列数是不同的. 例如，从 3 个元素 a,b,c 中，每次取出 2 个元素的所有排列为

$$ab, ac, ba, bc, ca, cb.$$

每一个就是一个排列，一共有 6 个排列，6 就是从 3 个元素 a,b,c 中，每次取出 2 个元素的排列数.

现在我们研究计算排列数的公式.

求排列数 P_n^2 可以这样考虑：假定有排好顺序的 2 个空位(图 1-4)，从 n 个不同元素 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 中任意取 2 个去填

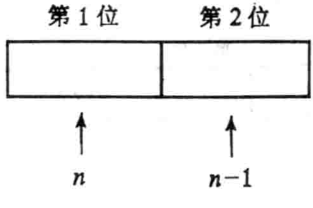


图 1-4

空，一个空位填一个元素，每一种填法就得到一个排列；反过

❶ P 是英文 Permutation(排列)的第一个字母.

来，任一个排列总可以由这样的一种填法得到．因此，所有不同填法的种数就是排列数 P_n^2.

现在我们计算有多少种不同的填法．完成这件事可分为两个步骤：

第一步，先排第一个位置的元素，可以从这 n 个元素中任选一个填空，有 n 种方法；

第二步，确定排在第二个位置的元素，可以从剩下的 $n-1$ 个元素中任选一个填空，有 $n-1$ 种方法．

于是，根据乘法原理，得到排列数为

$$P_n^2=n(n-1).$$

求排列数 P_n^3 可以按依次填 3 个空位来考虑，得到

$$P_n^3=n(n-1)(n-2).$$

同样，求排列数 P_n^m 可以这样考虑：假定有排好顺序的 m 个空位（图 1-5），从 n 个不同元素 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 中任意取 m 个去填空，一个空位填一个元素，每一种填法就得到一个排列；反过来，任一个排列总可以由一种填法得到．因此，所有不同填法的总数就是排列数 P_n^m.

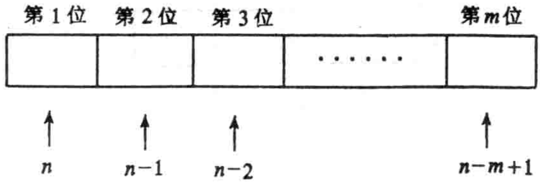


图 1-5

现在我们计算共有多少种不同的填法（图 1-5）：

第一步，第 1 位可以从 n 个元素中，任选一个填上，共有