科學圖書大庫

級數 微分方程式 與複變數函數

譯者　陳弘毅

徐氏基金會出版

科學圖書大庫

級數、微分方程式與複變數函數

譯者　陳弘毅

徐氏基金會出版

徐氏基金會科學圖書編譯委員會

監修人　徐銘信　發行人　王洪鎧

科學圖書大庫

中華民國六十八年三月二十四日再版

級數、微分方程式與複變數函數

基本定價　1.80

譯者　陳弘毅　國立師範大學理學士

本書如發現裝訂錯誤或缺頁情形時，敬請「剛掛」寄回調換。謝謝惠顧。

(67)局版臺業字第1810號

出版者　財團法人臺北市徐氏基金會　臺北市郵政信箱53-2號　電話7813686 7815250號

發行者　財團法人臺北市徐氏基金會　郵政劃撥賬戶第１５７９５號

承印者　大興圖書印製有限公司　三重市三和路四段一五一號　電話9719739

原　　序

本書（共三册）是從Videregaende Matematik 改訂增補的，其第一版發行於 1960 年，本書著作原是爲化學家，生物化學家和醫師的基本研究而寫的。

原先本書特別的目的是爲將在物理化學及生物物理學方面，作更深一層的研究與探討者，提供必要的數學知識。事實上，因本書也可以用於其他方面，因此現在增加一些資料後，相信其用途將更爲廣泛。

爲科學家在數學方面編寫一本書，一方面要在嚴密與基本知識之間找出一相當的均衡，另一方面要立即闡述其可用性。爲達此目的，我們計劃採取下列的步驟：全書中將十分正確地以公式表示已獲得的結果——即使其證明省略。然而，此方法有些改變：即在本書開始時，吾人使用較嚴密的數學公式，在後半部裡，若在許多物理和化學的教科書中已十分普遍的公式，則以較不嚴謹的公式表示之。

第一册包含向量、張量和群，若沒有微積分的知識亦可讀之。由我們的經驗知：若每週授課兩小時，則第一册能在一學期內授畢，第二册爲多（實）變量函數論，在此册中時常用到向量的概念，而且在第四章的後半部用到矩陣及張量的概念。若每週上四小時，則一學期即可上完第一册及第三册的一部分，這樣即可奠定微積分的基本知識。第三册包含高等微積分方面的教材：級數、微分方程、複數函數和數值計算法，本册與其他兩册所述的特殊公式無多大關係，但需要有關矩陣的特徵值及多變量函數的知識。若每週講授四小時，則一學年可研讀第 1.3.4.5 章及第 6.8 章的一部分。

對於附有星號（*）之習題則給予解答。本書也包含許多實例，這些例子構成本書一重要部分，記號□表示例題做完而主要課文又開始，在每一册後面，列舉一些參考書，讀者在研讀該部分時可同時讀那些書或讀完該册後再讀之，將有莫大的助益。

感謝Brian Phillips和Peeter Kruus 兩位博士翻譯此書的一大部分，及H. Rosenberg 教授對原稿的許多指正與勸告，本書若有錯誤或費解處，不應該責難他們，又Barbara Zeiders 對原稿有價值的建議及無限的辛勞，Lise Seifert女士打首稿，及Emmy Christiansen 小姐打最後的抄本，在此一一誌謝！

Thor A Bak
Jonas Lichtenberg

目　録

第五章　無窮級數

第六章　微分方程式

第七章　複數函數

第八章　數值分析

第五章　無窮級數

5—1　常數項之級數

無窮級數的概念

在以前（第 134 頁）吾人已定義一實數之無窮數列為：從所有正整數所成之集合映至所有實數所成之集合的一個函數。今考察如此之一數列 u。依以前之規定，在其 n 之函數值（其第 n 個元素）記為 u_n，此時數列本身可記為 $u_1, u_2, \cdots, u_n \cdots\cdots$。

對應於數列 u，吾人可定義出一個新數列 S，且稱此一新數列為屬於 u 之**無窮級數**；但 S 在 n 之值定為

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} u_k = u_1 + u_2 + \cdots + u_n.$$

S_n 通常稱為此無窮級數之第 n 個部分和，而 u_k 則稱為此級數之第 k 項。

S 可能收斂，亦可能發散。若為前者之情形，則其有一極限值 σ，且亦稱此 σ 為此無窮級數之**和**，而記之為

$$\sigma = \sum_{k=1}^{\infty} u_k = u_1 + u_2 + \cdots + u_k + \cdots$$

由於 $u_{n+1} = S_{n+1} - S_n$ 對所有 n 皆成立，於是立可得知無窮級數收斂之一必要條件為原數列 u 收斂且極限為零。然而，以後吾人將可得知這條件並非充分的（例 5－3）。

依上面之規定，無窮級數之和（若存在）記為

$$\sum_{k=1}^{\infty} u_k \quad 或 \quad u_1 + u_2 + \cdots + u_k + \cdots.$$

這兩記號常被用來表示無窮級數本身——不論其收斂與否。在實用上，此類記號所含之兩種意義並不會導至混淆不清，因此吾人亦將常使用之。

例 5－1 **幾何級數** $a+aq+aq^2+\cdots\cdots+aq^{k-1}+\cdots=\sum_{k=1}^{\infty} aq^{k-1}$ $(\neq 0)$ 在 $|q|<1$ 時收斂且和為 $a/(1-q)$；蓋因此級數之第 n 個部分和

$$S_n=a+aq+aq^2+\cdots+aq^{n-1}=a\frac{1-q^n}{1-q}$$

在 n 趨近無窮大時收斂於 $a/(1-q)$。若 $|q|\geq 1$，則由上述之必要條件可知此級數此時為發散。

例 5－2 級數

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k(k+1)}=\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\cdots+\frac{1}{k(k+1)}+\cdots$$

收斂且和為 1，蓋因其第 n 個部分和為

$$\begin{aligned}S_n&=\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)}\\&=\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)\\&=1-\frac{1}{n+1}.\end{aligned}$$

由此可知 $n\to\infty$ 時 $S_n\to 1$。

例 5－3 稱為**調和級數**之 $\sum_{k=1}^{\infty} 1/k$ 並非收斂，雖然其在 $k\to\infty$ 時 $1/k\to 0$。考察其第 n 個部分和

$$S_n=\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n},$$

吾人可知其大於積分 $\int_1^{n+1}(1/x)\,dx=\ln(n+1)$，即，$S_n>\ln(n+1)$ 因之 $n\to\infty$ 時 $S_n\to\infty$。

正項級數之收斂

顯而易見地，若級數僅含正項，則其部分和所成之數列將是單調一遞增的（monotone－increasing）。因之，此數列有一上極限卽為級數收斂之充要條件。

下列對收斂之簡易檢驗法稱為**比較檢驗法**，但僅適用於正項級數：設有兩級數$\Sigma_{n=1}^{\infty} u_n$及$\Sigma_{n=1}^{\infty} v_n$，若對大於某一固定數$N$之所有$n$皆$v_n \geq u_n$；則$v$－級數收斂時$u$－級數亦必收斂，且$u$－級數發散時$v$－級數亦必發散。只須考察此級數之第$n$個部分和卽可知其正確性。

由比較檢驗法立可得出對收斂之另二重要檢驗法。通常皆稱之為**Cauchy 檢驗法**。其中第一個為**根式檢驗法**：對一正項級數而言；若存在有一小於1之正數q及一整數N，使對所有大於或等於N之n而言，級數之第n項之n次根皆小於或等於q，則此級數為收斂。另一個為**比值檢驗法**：若對所有$n \geq N$皆$u_{n+1}/u_n \leq q$，則此一正項級數為收斂，其中q為某一小於1之正數且N為某一整數。

這兩種情形皆得之於比較u－級數與一正項之幾何級數——卽具有形式$\Sigma_{n=1}^{\infty} aq^n$，$a>0$ $q>0$之級數。如前所述，此一級數在$q<1$時收斂。若有某一數N使$n \geq N$時皆$\sqrt[n]{u_n} \leq q < 1$，則顯然在u－級數所有使$n \geq N$之項u_n將小於或等於q^n，且因有限個項（從u_1至u_{n-1}）不可能導致級數發散，故可確知此u級數為收斂。同樣，若對所有$n \geq N$時$u_{n+1}/u_n \leq q$，則

$$
\begin{aligned}
&u_{N+1} \leq u_N q, \\
&u_{N+2} \leq u_{N+1} q \leq u_N q^2 \\
&\cdot \\
&\cdot \\
&\cdot
\end{aligned}
$$

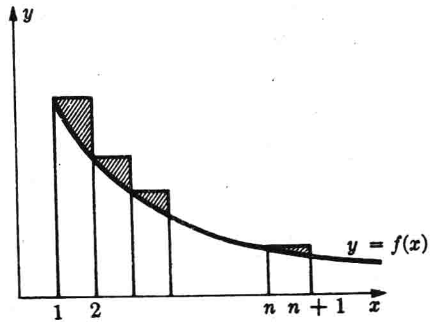
又，在u－級數中$n \geq N$之所有項皆各小於或等於在一收斂之幾何級數：$\Sigma_{n=1}^{\infty} u_N q^{-N} q^n$中之對應項。

同時，很顯然地，一級數若對所有$n \geq N$皆$\sqrt[n]{u_n} \geq 1$或$u_{n-1}/u_n \geq 1$，則此級數必為發散，蓋因此時甚至上述收斂之必要條件（$n \to \infty$時$u_n \to 0$）亦不滿足。

必須注意的是，上述對$\sqrt[n]{u_n}$與u_{n+1}/u_n之論述並非窮舉的。例如，若$n \to \infty$時$\sqrt[n]{u_n} \to 1-0$，則u－級數可能收斂亦可能發散。亦卽表Cauchy檢驗法只是收斂的**充分**條件。

吾人所將論述的最後一個正項級數（設其各項之值順次遞減）之收斂檢驗法是所謂的**積分檢驗法**。此時級數與一連續函數 $f(x)$ 之積分相比較；其中 $f(x)$ 在 $x \geq 1$ 時爲正值且遞減，在 $x = n$ 時其值爲 u_n（$n = 1, 2, 3, \cdots$）。

於是可知，若廣義積分 $\int_1^\infty f(x)\,dx$ 收斂則 $\sum_{n=1}^\infty u_n$ 收斂，而若此一積分發散則此級數發散。其證明可由比較第 n 個部分和與積分上限爲 $n+1$ 之 $f(x)$ 之積分而得出（圖 5－1）



$$\int_1^{n+1} f(x)\,dx < S_n < \int_1^{n+1} f(x)\,dx + u_1$$

圖 5 — 1

上述對於正項級數之考察，可易推廣至僅含非負值項或僅含負值項或僅含非正值項之級數。

例 5－4

$$\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^2} \text{ 爲收斂} \left(\text{比較檢驗法及例 } 5-2\text{，} u_n < \frac{1}{(n-1)\cdot n} \right).$$

$$\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{3^n + 2} \text{ 爲收斂} \left(\text{比值檢驗法，} n \to \infty \text{ 時 } \frac{u_{n+1}}{u_n} \to \frac{1}{3} (<1) \right)$$

$$\sum_{n=1}^\infty n2^{-n} \text{ 爲收斂} \left(\text{根式檢驗法，} n \to \infty \text{ 時 } \sqrt[n]{u_n} \to \tfrac{1}{2} (<1) \right).$$

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}}\ (\alpha > 1)$ 爲收斂 $\left(\text{積分檢驗法},\ f(x) = \frac{1}{x^{\alpha}}\right)$.

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}}\ (0 < \alpha \leq 1)$ 爲發散 $\left(\text{積分檢驗法},\ f(x) = \frac{1}{x^{\alpha}}\right)$.

任意級數之收斂

吾人將處理級數 $\Sigma_{n=1}^{\infty} u_n$，其中之諸項之符號並無事先之假設。就此一級數而言，吾人也將考慮到由其項之絕對值所構成之一級數，即 $\Sigma_{n=1}^{\infty} |u_n|$。若 $\Sigma |u_n|$ 收斂，則可證 Σu_n 亦必收斂。然而，其逆敘述並不眞；即，Σu_n 之收斂並不能使 $\Sigma |u_n|$ 收斂（見例 5－5）。

若對一級數 Σu_n 而言，Σu_n 與 $\Sigma |u_n|$ 之收斂皆爲眞，則此級數稱爲**絕對收斂**。於是對級數之絕對收斂的檢驗步驟與僅含正項（或非負值之項）之級數之收斂檢驗法相同。

一級數若爲收斂，但非絕對收斂，則稱爲**條件收斂**。可易知如此之一級數必含無數個正項與無數個負項（項爲負值）。

絕對收斂之級數之和不受其諸項重新排列的影響，即，項的次序是無關緊要的。對於一含無數個正項與無數個負項之絕對收斂級數而言，上列事實可由利用下列事實而加以證明：此種級數之諸正項之和與諸負項之和皆爲收斂。

對於條件收斂之級數而言，Riemann 的一個定理是可以成立的；即，對如此之一級數之項之次序吾人可加以適當改變，使其產生之新級數之和等於一任意指定之數。再者，吾人亦可將其項之次序改變使新級數成爲發散。此時，項之次序甚重要。

俱含正項與負項之特殊一類級數，係由所謂**交錯級數**所形成，即其具有形式 $\Sigma_{n=1}^{\infty} u_n (-1)^{n+1}$（或 $\Sigma_{n=1}^{\infty} u_n (-1)^n$）者，其中對所有 n 皆 $u_n > 0$。Leibniz 檢驗法可以檢驗此類級數的收斂。此種檢驗法即：若一交錯級數之第 n 項之絕對值遞減且在 n 趨近無窮大時趨近於 0，亦即若 $u_1 > u_2 > u_3 > u_4 \cdots\cdots$ 且 $n \to \infty$ 時 $u_n \to 0$，則此級數爲收斂。

這可由考察級數 $\Sigma_{n=1}^{\infty} u_n (-1)^{n+1}$ 之第 n 個部分和而得證：

$$S_n = u_1 - u_2 + u_3 \cdots\cdots \pm u_n$$

於此，數列 S_n（n 偶數）為單調一遞增（$S_2 < S_4 < S_6 < \cdots$），而數列 S_n（n 奇數）為單調一遞減（$S_1 > S_3 > S_5 > \cdots$）。這實為對 u_n 之第一個假設的顯然結果。於是數列 S_n（$n = 1, 2, 3, \cdots\cdots$）可分為一單調一遞增與一單調一遞減之數列。再者，由 u_n 之第二個假設可知，此兩數列之第p 個元素之差在 $p \to \infty$ 時趨近於0。因此，此兩單調數列有一共同之極限 S。由此可知所予之交錯級數為收斂一其和為 S（圖 5－2）

同時可知，只考慮級數之最初 n 項時之誤差必小於其後一項之絕對值，即：$|S_n - S| < u_{n+1}$

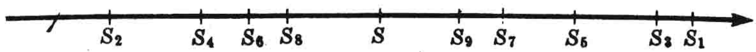


圖 5－2

例 5－5　級數 $\Sigma_{n=1}^{\infty}(1/n)(-1)^{n+1}$ 為收斂（由Leibniz 判定法）。然而，其並非絕對收斂，蓋因其所對應之絕對值級數並非收斂（例5－3）。如前所述可知，可改變項之次序使所得之新級數發散。今吾人舉一例說明之。

依上述所予之諸元素之次序，部分和所成之數列為

$$1\ ;\ \frac{1}{2}\ ;\ \frac{5}{6}\ ;\ \frac{7}{12}\ ;\ \frac{47}{60}\ ;\ \frac{37}{60}\ ;\ \cdots\cdots$$

這顯示此級數之和介於（例如）$\frac{47}{60}$ 與 $\frac{37}{60}$ 之間。今項之次項改變為：

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{4}+\frac{1}{7}+\frac{1}{9}+\frac{1}{11}+\frac{1}{13}-\frac{1}{6}+\frac{1}{15}+\cdots\cdots+\frac{1}{29}-\frac{1}{8}+\cdots\cdots,$$

其中有2，4，8，……個相鄰正項順次分別插入兩負項間。令其部分和所對應之數列為

$$S_1,\ S_2,\ S_3,\ \cdots\cdots,\ S_n,\ \cdots\cdots$$

一發散之部分數列可易由此選出；例如

$$T_1,\ T_2,\ T_3,\ \cdots\cdots,\ T_n,\ \cdots,$$

其中 $T_n = S_{n+2^n-1}$。蓋因，此時下列敘述為眞：

$$\begin{aligned}T_{n+1}-T_n &= S_{n+1+2^{n+1}-1}-S_{n+2^n-1}\\ &=\frac{1}{2\cdot 2^n-1}+\frac{1}{2(2^n+1)-1}+\frac{1}{2(2^n+2)-1}+\cdots\\ &\qquad +\frac{1}{2(2^{n+1}-1)-1}-\frac{1}{2(n+1)}\\ &>2^n\frac{1}{2(2^{n+1}-1)-1}-\frac{1}{2(n+1)}=\frac{1}{4-3\cdot 2^{-n}}\\ &\qquad -\frac{1}{2(n+1)}>\frac{1}{4}-\frac{1}{2(n+1)},\end{aligned}$$

因此對所有 $n>2$ 亦皆 $T_{n+1}-T_n>\frac{1}{8}$ 。於是部分數列 T_n 發散爲 ∞，故可知數列 S_n 不可能收斂。

收斂級數之運算

設兩級數 $\Sigma_{k=0}^{\infty}u_k$ 與 $\Sigma_{k=0}^{\infty}v_k$ 皆爲收斂且其和各爲 U 與 V 。則級數 $\Sigma_{k=0}^{\infty}au_k$，（ a 爲任意常數）收斂且和爲 aV 。又 $\Sigma_{k=0}^{\infty}(u_k+v_k)$ 亦爲收斂且和爲 $U+V$ 。這兩樣結果可由考察其適當之部分和而得知，故其皆可適用於任意之收斂級數。

吾人已知，項之次序對於一絕對收斂級數是無關緊要的，但其對於條件收斂級數則不然。若所論及之兩級數皆爲絕對收斂且依下列規則正式相乘：

$$\begin{aligned}\left(\sum_{k=0}^{\infty}u_k\right)\left(\sum_{k=0}^{\infty}v_k\right) &= (u_0+u_1+u_2+\cdots)(v_0+v_1+v_2+\cdots)\\ &= u_0v_0+(u_0v_1+u_1v_0)+(u_0v_2+u_1v_1+u_2v_0)\\ &\qquad +\cdots\\ &=\sum_{k=0}^{\infty}\left(\sum_{n=0}^{k}u_nv_{k-n}\right),\end{aligned}$$

如此所得出之級數將亦爲絕對收斂，且其和爲 UV 。

上列敍述可更大略而簡潔地敍述如下：對於絕對收斂級數之計算可如同對有限和之計算。至於條件收斂級數之情形並不如此。於此，有一應特別注意的是，無限個圓括弧的插入恒產生一具有同一和之（新）級數；但

移去無限個圓括弧時，則甚至其施之於絕對收斂級數，亦可產生一發散級數。舉例而言，下列之級數即有如此之情形

$$\sum_{k=0}^{\infty}(1-1)=(1-1)+(1-1)+(1-1)+\cdots.$$

在具有形式 $S=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots\cdots+a_nx^n+\cdots\cdots$（其中 x 爲固定數）之絕對收斂級數的這一特殊情形中，有幾個公式可成立；例如，

$$S^2={a_0}^2+2a_0a_1x+({a_1}^2+2a_0a_2)x^2+2(a_0a_3+a_1a_2)x^3+\cdots.$$

這實爲上述乘法規律之結果，再者

$$\begin{aligned}S^{1/2}={a_0}^{1/2}\Bigg[1+\frac{a_1}{2a_0}x&+\left(\frac{1}{2}\frac{a_2}{a_0}-\frac{1}{8}\frac{{a_1}^2}{{a_0}^2}\right)x^2\\&+\left(\frac{1}{2}\frac{a_3}{a_0}-\frac{1}{4}\frac{a_1a_2}{{a_0}^2}+\frac{1}{16}\frac{{a_1}^3}{{a_0}^3}\right)x^3+\cdots\Bigg]\qquad(a_0\neq 0),\\S^{-1}={a_0}^{-1}\Bigg[1-\frac{a_1}{a_0}x&+\left(\frac{{a_1}^2}{{a_0}^2}-\frac{a_2}{a_0}\right)x^2\\&+\left(\frac{2a_1a_2}{{a_0}^2}-\frac{a_3}{a_0}-\frac{{a_1}^3}{{a_0}^3}\right)x^3+\cdots\Bigg]\qquad(a_0\neq 0).\end{aligned}$$

無窮乘積

對於無窮乘積之概念，吾人不擬作詳細之討論。吾人將僅討論無窮乘積

$$\prod_{n=1}^{\infty}(1+u_n)=(1+u_1)(1+u_2)\cdots(1+u_n)\cdots,$$

其中之因子無一爲零，若由其**部分乘積**

$$P_n=\prod_{k=1}^{n}(1+u_k)=(1+u_1)\cdots(1+u_n),$$

所成之數列

$$P_1,\ P_2,\ P_3,\ \cdots\cdots,\ P_n,\ \cdots\cdots,$$

收斂且極限 P 異於 0，則稱此無窮乘積收斂於**值** P。

收斂之一必要條件顯然是，$n\to\infty$時 $u_n\to 0$。由考察對應之部分和可證，一僅含正值因子之無窮乘積收斂之充要條件爲對應之無窮級數

$$\ln(1+u_1)+\ln(1+u_2)+\ln(1+u_3)+\cdots$$

收斂。再者，如吾人所料，乘積之值P與級數之和S的關係爲$P=e^S$

類似於級數絕對收斂之概念，若乘積之因子之次序任意改變後所得之乘積之值仍皆與原乘積之值相同，則稱此無窮乘積爲**絕對收斂**。吾人可證，無窮乘積$\Pi_{n=1}^{\infty}(1+u_n)$（其中無一因子爲零）絕對收斂之充要條件爲：級數$\Sigma_{n=1}^{\infty}u_n$絕對收斂。

習　題

*1. 求下列收斂無窮級數之和

$$\sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{1+(-1)^n}{2^n}+\frac{1-(-1)^n}{3^n}\right).$$

*2. 檢驗下列無窮級數之收斂：

(a) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{\ln n}$.　(d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)$.　(g) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}$.

(b) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\ln n}$.　(e) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^n$.　(h) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{n!}$.

(c) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n^2\ln n}$.　(f) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^{n^2}$.　(i) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^n}{n!}$.

3. 試談無窮級數$\Sigma_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}/(2n-1)$爲條件收斂。

4. 檢驗下列無窮級數之絕對收斂，條件收斂，或發散。

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}n}{3^{n-1}}$.　(c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\ln n}{2n}$.

(b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^{1/3}}$.　(d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{-3^{n+1}}{5^{n-1}n^2}$.

5. 考察無窮級數

$$\frac{1}{\sqrt{2}-1}-\frac{1}{\sqrt{2}+1}+\frac{1}{\sqrt{3}-1}-\frac{1}{\sqrt{3}+1}+\cdots\cdots$$

6. 以第 7 頁上之方法計算下列二絕對收斂級數之乘積

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a^n}{n!} \quad 與 \quad \sum_{n=0}^{\infty}\frac{b^n}{n!}$$

7. 求有限級數 $\Sigma_{n=1}^{N}\sin nx$ 之和，其中 x 爲一任意常數，檢驗其所對應之無窮級數之收斂。

8. 設一無窮級數 $a_1+a_2+a_3+\cdots\cdots$ 之部分和爲 S_1，S_2，S_3，… 若

$$\lim_{n\to\infty}\frac{S_1+S_2+\cdots+S_n}{n}=S.$$

則稱此一無窮級數爲 Cesaro 可和，且其有 Cesaro 和 S。

(1)試證級數 $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots+1/2^n+\cdots$ 有 Cesaro 和

(2)考察下列諸級數

$$1-1+1-1+1-\cdots$$
$$1-2+3-4+\cdots$$
$$1+0-1+1+0-1+\cdots$$

9. 若下式成立，則無窮級數 $a_1+a_2+a_3+\cdots\cdots$ 稱爲 Abel－可和，且有 Abel 和 S

$$\lim_{x\to 0+0}\sum_{n=1}^{\infty}a_n e^{-nx}=S,$$

或即，

$$\lim_{\xi\to 1-0}\sum_{n=1}^{\infty}a_n\xi^n=S.$$

試證上面第 8 題之級數爲 Abel－可和。（一般而言，可證 Cesaro 可和性必滿足 Abel 可和性，且有同樣之和）。

10. 仿上述無窮級數可和之定義（第 8 與 9 題），廣義積分 $\int_0^\infty f(x)\,dx$ 之 Cesaro 値定義爲